

Collection **G**ESTION

**SÉRIE : Production et Techniques quantitatives
appliquées à la gestion**

dirigée par Vincent Giard, Professeur des Universités (IAE de Paris Université de Paris 1)

Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas

**Bernard ROY
Denis BOUYSSOU**

GESTION



ECONOMICA

49, rue Héricart, 75015 Paris

GUIDE DE LECTURE

Ce livre a été organisé de façon à en faciliter des lectures différentes selon la personnalité du lecteur. Certes, une lecture ordonnée, méthodique, de la première à la dernière page, n'est nullement déconseillée mais le balisage porté en marge, l'usage de petits caractères, la multiplicité des renvois, la richesse de l'index terminologique, la présence de résumés ainsi que celle d'introductions permettant de situer paragraphes, sections et chapitres dans le plan d'ensemble devraient également rendre possible une lecture moins ordonnée, adaptée aux attentes de diverses catégories de lecteurs. Ceux-ci pourront, par exemple, choisir de "naviguer" entre les sept premiers chapitres introduisant des concepts et des méthodes et les trois derniers présentant des cas réels d'application. Nous espérons ainsi rendre cet ouvrage utile aussi bien aux décideurs ou aux demandeurs d'études, qu'aux producteurs d'études, aux chercheurs et aux étudiants.

Précisons que les parties balisées par une trame en marge ne peuvent pas être sautées en première lecture sans risque de compromettre la compréhension de la suite. Au contraire, les passages en petits caractères, relatifs à des connexions ou remarques mineures, des problèmes de pointe, des justifications ou démonstrations complexes, des illustrations ou explications supplémentaires, des procédures ou méthodes spécifiques peuvent être, sans risque pour la suite, sautés par tout lecteur qui n'éprouve pas le besoin d'approfondir le sujet concerné. Les passages en caractère normaux, sans balisage, se rapportent à des notions, des résultats, des exemples, des développements, des aspects méthodologiques non nécessairement essentiels sur le champ mais auxquels le lecteur devra peut-être (avec l'aide de renvois) se reporter ultérieurement pour comprendre certains passages plus fondamentaux.

Le lecteur trouvera en fin d'ouvrage, outre un index terminologique détaillé, près de 300 références complétées par une bibliographie commentée portant sur une centaine de cas réels d'application.

Repères	Niveaux de lecture
 en marge	Niveau 1 : Indispensable pour comprendre la suite
Caractères courants sans repère en marge	Niveau 2 : Peut être sauté en première lecture mais parfois retour nécessaire
Petits caractères sans repère en marge	Niveau 3 : Peut-être sauté sans gêne pour la compréhension (illustration - approfondissement)

REMERCIEMENTS

Arrivés au terme d'un travail qui s'est déroulé sur plusieurs années, nous avons plaisir à reconnaître nos dettes envers de nombreuses personnes. Il ne nous paraît pas possible de citer ici nommément toutes celles qui, de manière plus ou moins directe, nous ont influencé durant la rédaction de cet ouvrage. Nombreux sont les enseignants-chercheurs du LAMSADE ¹, les membres du Groupe de Travail Européen sur l'Aide Multicritère à la Décision ², les étudiants de l'ESSEC et de l'Université de Paris-Dauphine qui ont, par une remarque, une critique ou une suggestion, contribué à façonner tel page, section ou chapitre de ce livre. Qu'ils sachent ici que nous leur en savons gré.

Nous avons eu la chance de bénéficier des commentaires de Patrice Perny, Daniel Vanderpooten, Jean-Claude Vansnick et Philippe Vincke sur tout ou partie de ce texte. Nous tenons ici à les en remercier très sincèrement. Notre dette envers eux est d'autant plus grande que nous avons été amenés, ici et là, à développer certaines de leurs idées et à présenter certains de leurs travaux.

Dominique Vallée, en vérifiant de multiples formules et en refaisant de nombreux calculs, de même que Yves Nicodème, en procédant à une relecture attentive de l'ensemble de l'ouvrage, ont apporté une contribution efficace à sa mise en forme définitive. Qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés.

¹ Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision de l'Université de Paris-Dauphine, Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825.

² groupe de travail de l'Association EURO (the Association of European Operational Research Societies within IFORS).

Indépendamment de la rédaction de ce livre, les relations qu'il nous a été donné d'avoir avec des milieux professionnels divers nous ont permis, au cours des ans, de mettre à l'épreuve le bien-fondé de certaines idées, la portée de certains concepts, la validité de certaines techniques présentés dans ce livre. Bien qu'empruntant des voies souvent détournées, l'apport de ces contacts et expérimentations s'est avéré très riche. Nous tenons à remercier tout spécialement la Régie Autonome des Transports Parisiens et la Direction Générale des Postes pour nous avoir fourni l'occasion de traiter deux cas exemplaires.

Ce livre contient, en plus de quelques 300 références, une bibliographie commentée d'une centaine de cas d'applications de l'aide multicritère à la décision. Le rôle de Dominique Champ-Brunet dans l'établissement de cette bibliographie a été déterminant. Elle a collecté et dépouillé la majeure partie des articles qui y figurent. Sans sa précieuse collaboration, cette bibliographie n'aurait sans doute pas vu le jour.

Nous tenons enfin à exprimer notre profonde reconnaissance envers Dominique François. Elle a frappé, corrigé, refrappé, transformé, recorrecté, ..., avec une patience, une efficacité et une minutie rares, les versions successives de ce livre. En bout de course, c'est elle qui a assuré, avec intelligence et soin, une ultime relecture en même temps qu'elle mettait en forme, page après page, le présent ouvrage tel qu'il est maintenant entre les mains du lecteur.

Bernard Roy
Denis Bouyssou

Table des matières

Guide de lecture	1
Remerciements	3

CHAPITRE I : INTRODUCTION ET CONCEPTS

FONDAMENTAUX	17
Résumé	17
1.1 Décision, processus de décision, aide à la décision ...	19
1.2 Concept d'action et ensemble des actions potentielles .	26
1.3 Problématiques d'aide à la décision	29
1.4 Modélisation des préférences	30
1.4.1 Généralités	31
1.4.2 Principales structures de préférences	34
a) Préordre complet	37
b) Quasi-ordre et ordre d'intervalle	39
c) Préordre partiel	40
d) Pseudo-ordre	41
e) Relations de préférence floues	42
1.4.3 Modélisation des préférences sur des "écarts" ..	43
1.5 Modélisation des conséquences	44
1.6 Critères	46
1.6.1 Généralités	46
1.6.2 Définitions et techniques de construction	51
1.6.3 Pouvoir discriminant d'un critère	55

1.6.4 Graduations	58
1.7 Agrégation des performances et élaboration de la recommandation	59
Glossaire - Quelques définitions structurantes	64

CHAPITRE 2 : FAMILLE DE CRITÈRES : PROBLÈME DE COHÉRENCE ET DE DÉPENDANCE

Résumé	73
2.1 Comment juger une famille de critères en fonction de ce que l'on en attend ?	75
2.2 Axiomes fondamentaux de cohérence et tests opérationnels	79
2.2.1 Axiome d'exhaustivité	80
a) Principe	80
b) Enoncé formel	83
c) Test opérationnel	84
d) Remarques	87
2.2.2 Axiome de cohésion	89
a) Principe	89
b) Enoncé formel	92
c) Test opérationnel	95
d) Remarques	98
2.2.3 Axiome de non redondance	99
a) Principe	99
b) Enoncé formel	100
c) Test opérationnel	102
2.2.4 Famille cohérente de critères	103
2.3 Concepts et propriétés en marge de la cohérence	103
2.3.1 Famille inductive	104
2.3.2 Famille séparable	106
2.3.3 Famille fondamentale	110
2.4 Quelles formes d'indépendances convient-il de rechercher ?	111
2.4.1 Isolabilité de chaque critère (indépendance au sens des dispersions)	112
2.4.2 Séparabilité de chaque sous-famille de critères (indépendance au sens des préférences)	117

2.4.3 Absence de facteurs influençant conjointement plusieurs critères (indépendance d'ordre structurel)	123
--	-----

CHAPITRE 3 : CONFLITS ENTRE CRITÈRES ET PROCÉDURES ÉLÉMENTAIRES

D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE	127
Résumé	127
3.1 Avec quels concepts comparer deux actions d'après des critères pouvant être conflictuels	129
3.1.1 Critères en conflit dans la comparaison de deux actions	129
3.1.2 Analyse de la concordance et hiérarchie de niveau	133
3.1.3 Analyse de la discordance et effet de veto	138
3.1.4 Dépassement de la dominance en dehors d'informations servant à différencier l'importance des critères	142
a) Compléments sur la relation de dominance (Δ_F)	142
b) La relation de Δ -surclassement (S_Δ)	143
c) La relation de PQ-surclassement (S_{PQ})	145
d) Les relations de $\succ_Q$ -surclassement ($S_{\succ_Q}$) et de ΔP -surclassement ($S_{\Delta P}$)	147
e) Autres relations	148
3.1.5 Analyse des compensations : Valorisation sur un axe des écarts par taux de substitution	148
3.1.6 Informations inter-critères	156
3.2 Procédure d'agrégation multicritère : définition et premiers exemples	158
3.2.1 Définition et remarques	159
3.2.2 Présentation de quelques PAMC élémentaires	163
a) PAMC lexicographique	163
b) PAMC élémentaire de type concordance	166
c) PAMC élémentaire de type concordance- discordance	167
d) PAMC de type somme pondérée	169
3.2.3 Prise en compte de l'importance relative des critères dans une PAMC	172

3.2.4 Agrégation des performances et agrégation des préférences en théorie du choix social	177
--	-----

CHAPITRE 4 : PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE CONDUISANT À UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE

Résumé	181
4.1 Généralités	182
4.2 Cas où l'on cherche à bâtir un vrai-critère	186
4.2.1 Agrégation additive	187
4.2.1.1 Définitions et remarques	187
4.2.1.2 Analyse axiomatique	192
4.2.1.3 Mise en œuvre	197
a) Fonctions v_i	198
b) Coefficients k_i	200
4.2.1.4 Retour sur l'indépendance au sens des préférences	202
4.2.2 Autres formes d'agrégation conduisant à un vrai-critère de synthèse	204
4.3 Agrégation conduisant à un quasi, pré ou pseudo-critère	206
4.3.1 Quasi-critère de synthèse	207
4.3.2 Autres cas	208
4.4 Cas où l'on cherche à bâtir une graduation ou une mesure	208
4.4.1 Généralités	208
4.4.2 Procédures d'agrégation additive et multiplicative	210
4.4.3 Mise en œuvre	213
4.5 Cas particulier de la théorie de l'utilité espérée	215
4.5.1 Généralités	215
4.5.2 Procédures d'agrégation utilisées en théorie de l'utilité espérée	219
4.5.2.1 Compléments sur les notions d'indépendance	219
4.5.2.2 Agrégations additive et multiplicative	221
4.5.2.3 Autres procédures d'agrégation	225
4.5.3 Mise en œuvre	226
4.5.3.1 Compléments sur les hypothèses d'indépendance	226

4.5.3.2	Elaboration des fonctions d'utilité partielles	227
4.5.3.3	Attribution de valeurs aux coefficients k_i	232
4.6	Conclusion	233

CHAPITRE 5 : PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE NON FONDÉES SUR UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE (PAMC DE TYPE ELECTRE)

	Résumé	239
5.1	Généralités	240
5.1.1	Objectif des procédures étudiées	243
5.1.2	Examen critique	246
5.2	Procédures aboutissant à un unique système de préférences	249
5.2.1	Systèmes de type (S, R) ou (P, I, R)	249
5.2.1.1	Système de préférences dans ELECTRE I	250
	a) Formules	251
	b) Commentaires	252
5.2.1.2	Système de préférences dans ELECTRE IS	253
	a) Formules	254
	b) Commentaires	255
5.2.1.3	Autres systèmes de préférences	258
5.2.2	Systèmes de type (P, ~) et (P, ~, R)	258
5.2.2.1	Systèmes de préférences dans TACTIC	260
	a) Formules	260
	b) Commentaires	261
5.2.2.2	Systèmes de préférences dans les procédures d'écramage	264
5.3	Procédures aboutissant à plusieurs systèmes de préférences	266
5.3.1	Cas où le nombre des systèmes est imposé	267
5.3.1.1	Systèmes de préférences dans ELECTRE II	268
	a) Formules	268
	b) Commentaires	269

5.3.1.2	Systèmes de préférences dans ELECTRE IV	270
a)	Formules	270
b)	Commentaires	271
5.3.2	Cas où le nombre des systèmes est indéterminé ..	276
5.3.2.1	Systèmes de préférences dans PROMETHEE I, II et III	280
a)	Formules	280
b)	Commentaires	282
5.3.2.2	Systèmes de préférences dans ELECTRE III	284
a)	Formules	284
b)	Commentaires	286
5.3.2.3	Systèmes de préférences dans les procédures par compensation probante ..	289
5.4	Compléments pratiques	295
5.4.1	Généralités	295
5.4.2	Attribution de valeurs aux coefficients d'importance k_j	298
a)	Quelques rappels	298
b)	Quelques constatations empiriques	299
c)	Quelques principes généraux	301
d)	Une façon de procéder	302
5.4.3	Attribution de valeurs aux seuils de veto v_j	309
5.4.4	Analyse de robustesse	313
5.5	Compléments théoriques	318
a)	Peut-on obtenir une relation quelconque avec une PAMC de type II ?	319
b)	A quelles conditions une relation obtenue avec une PAMC de type II peut-elle posséder des propriétés remarquables de transitivité ?	323
c)	Peut-on axiomatiser des PAMC de type II ? ..	326

CHAPITRE 6 : AIDE À LA DÉCISION FONDÉE

SUR UNE PAMC DE TYPE ELECTRE		331
Résumé		331
6.1	Généralités	332
6.1.1	Précisions sur l'objet du chapitre	332
6.1.2	Cas de la problématique du choix ($P.\alpha$)	335

a) S est transitive et $R = \emptyset$	338
b) S est transitive et $R \neq \emptyset$	340
c) S est quelconque	343
6.1.3 Cas de la problématique du tri (P. β)	347
a) Affectation en présence d'un vrai-critère unique de synthèse g	349
b) Affectation en l'absence d'un vrai-critère unique de synthèse	351
6.1.4 Cas de la problématique du rangement (P. γ) ...	356
6.1.5 Comment choisir une méthode ?	362
6.2 Procédures d'exploitation en problématique du choix :	
ELECTRE I et ELECTRE IS	365
6.2.1 ELECTRE I	365
a) Présentation	366
b) Commentaires théoriques	368
c) Commentaires pratiques	369
6.2.2 ELECTRE IS	371
a) Présentation	373
b) Commentaires théoriques	380
c) Commentaires pratiques	382
6.3 Procédure d'exploitation en problématique du tri :	
ELECTRE TRI	389
a) Présentation	390
b) Commentaires théoriques	391
c) Commentaires pratiques	398
6.4 Procédures d'exploitation en problématique du rangement : PROMETHEE I et II, ELECTRE II, III et IV	401
6.4.1 PROMETHEE I et II	402
a) Présentation	402
b) Commentaires théoriques	403
c) Commentaires pratiques	408
6.4.2 ELECTRE II	409
a) Présentation	410
b) Commentaires théoriques	412
c) Commentaires pratiques	415
6.4.3 ELECTRE III	415
a) Présentation	416
b) Commentaires théoriques	420
c) Commentaires pratiques	426

6.4.4 ELECTRE IV	426
6.5 Compléments théoriques	429
a) Procédures de sélection ($P.\alpha$)	431
b) Procédures d'affectation ($P.\beta$)	432
c) Procédures de rangement ($P.\gamma$)	433
CHAPITRE 7 : APPROCHE DU JUGEMENT	
LOCAL INTERACTIF	435
Résumé	435
7.1 Généralités	436
7.1.1 Approche classique et approche interactive	436
7.1.2 Sens et validité d'une méthode interactive -	
Le problème de la "convergence"	441
a) Trois versions d'un même jeu	442
b) Trois hypothèses sur le déroulement de	
l'interaction	444
7.1.3 Portée et limites des méthodes interactives	448
7.2 Structure générale des méthodes interactives	450
7.2.1 Schéma général d'interaction dans les diverses	
problématiques	450
7.2.2 L'étape de dialogue	455
7.2.2.1 La phase d'explication	456
7.2.2.2 La phase d'interrogation	457
7.2.3 L'étape de calcul	460
7.2.4 Remarques et exemples	470
7.3 Méthodes interactives dans une problématique de	
choix	477
7.3.1 Présentation de quelques méthodes interactives	
en $P.\alpha$	477
7.3.1.1 La méthode STEM	477
7.3.1.2 La méthode de Geoffrion-Dyer-	
Feinberg	480
7.3.1.3 La méthode du point de mire évolutif	483
7.3.1.4 La méthode de Vanderpooten	485
7.3.2 Autres méthodes interactives en $P.\alpha$	490
a) La méthode de Zionts et Wallenius	490
b) La méthode de Vincke	491
c) La méthode du point de référence	491
d) La méthode de Steuer et Choo	492

e) La méthode de Korhonen et Laakso . .	493
f) La méthode PRIAM	493
7.4 Méthodes interactives dans une problématique de tri ou de rangement	494

CHAPITRE 8 : ANALYSE DES RÉPONSES À UN APPEL D'OFFRES : AIDE À LA SÉLECTION D'UNE MACHINE À TRIER LES PAQUETS

Résumé	501
8.1 Les problèmes d'évaluation et de sélection	503
8.1.1 Cadre général de l'étude	503
8.1.2 Cahier des charges et appel d'offres	506
8.1.3 Définition des actions potentielles et choix de la problématique	507
8.2 Evaluation des offres	509
8.2.1 Analyse fonctionnelle succincte d'un système automatique de tri-paquets	509
8.2.2 Conséquences élémentaires, dimensions et barèmes de notation	510
8.2.3 Passage des dimensions aux critères : sources d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination	518
8.3 Famille cohérente de critères et choix d'une PAMC . .	520
8.3.1 Une première esquisse : 11 critères	520
8.3.2 Tests de cohérence : adjonction d'un douzième critère	525
8.3.3 Les offres et le tableau des performances	526
8.3.4 Choix d'une PAMC	528
8.4 Mise en œuvre d'ELECTRE IS	530
8.4.1 Valeurs des poids k_j	530
8.4.2 Valeurs des seuils de veto v_j	531
8.4.3 Exploitation de la relation de référence S avec ELECTRE IS	533
8.4.4 Analyse de robustesse	537
8.5 Résultats finaux et commentaires	540

CHAPITRE 9 : COMPARAISON DE DEUX	
ÉTUDES D'AIDE À LA DÉCISION À PROPOS	
D'UN CAS DE LOCALISATION D'UNE	
CENTRALE NUCLÉAIRE 543	
Résumé	543
9.1 Généralités	544
9.2 Le cas WPPSS : L'étude U	545
9.2.1 Insertion dans le processus de décision, problématique, détermination des actions potentielles	545
9.2.2 Détermination des axes de signification	546
9.2.3 Détermination des dimensions	548
9.2.4 Evaluation des distributions de probabilités	552
9.2.5 Détermination de la forme de la fonction d'utilité	554
9.2.6 Fonctions d'utilité partielles	557
9.2.7 Remarque : obtention d'un tableau de performances	558
9.2.8 Evaluation des coefficients k_i^U	564
a) Classement des coefficients k_i^U	566
b) Evaluation de taux de substitution	567
c) Evaluation des coefficients k_i^U	568
9.2.9 Elaboration de la recommandation	570
9.3 Le travail en laboratoire : L'étude S	572
9.3.1 Actions potentielles, problématique et axes de signification	572
9.3.2 Elaboration des critères	573
9.3.3 Elaboration des informations inter-critères	581
a) Indices d'importance	583
b) Seuils de veto	585
9.3.4 Elaboration de la recommandation	587
9.4 Comparaison des deux méthodes à la lumière du cas	591
 CHAPITRE 10 : PROGRAMMATION D'INVESTISSEMENTS LOURDS : COMPARAISON A POSTERIORI ENTRE LES RÉSULTATS D'UNE "APPROCHE SCIENTIFIQUE" ET LE DÉROULEMENT EMPIRIQUE D'UN PROCESSUS DE DÉCISION 599	
Résumé	599

10.1 L'objet de l'étude	601
10.1.1 Cadre général	601
10.1.2 Raison d'être de l'étude a posteriori	604
10.1.3 Critères et tableau de performances	609
10.2 Le choix d'une méthode	611
10.2.1 Pourquoi ELECTRE IV ?	611
10.2.2 Prise en compte de la connaissance sur la part d'arbitraire qui affecte les performances .	612
10.3 Les résultats de l'approche scientifique	615
10.3.1 Application d'ELECTRE IV au système S de référence	615
10.3.2 Analyse de robustesse	620
10.4 Comparaison avec le déroulement empirique du processus de décision	623
 Bibliographie commentée de cas d'application	 627
Références	661
Index terminologique	691

Chapitre 1

INTRODUCTION ET CONCEPTS FONDAMENTAUX

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est de présenter les grandes lignes de la méthodologie sur laquelle reposent les développements de cet ouvrage. Celle-ci est présentée dans le livre de Bernard ROY : *Méthodologie multicritère d'aide à la décision* (Economica, 1985) dont ce chapitre reprend le plan. On y aborde successivement :

- les concepts de décision, de processus de décision et d'aide à la décision (1.1) ;
- le concept d'action, point d'appui de l'aide à la décision (1.2) ;
- l'esprit dans lequel formuler l'aide à la décision avec la présentation de quatre problématiques de référence (1.3) ;
- les concepts de base et les principales structures utiles pour modéliser des préférences (1.4) ;
- la modélisation des conséquences des actions (1.5) ;
- le concept central de critère (1.6).

La section 1.7 aborde enfin le problème de l'agrégation des performances et de l'élaboration de recommandations qui constituent l'objet du présent ouvrage dont on introduit le plan.

Un glossaire, situé en fin de chapitre, réunit les principales définitions qui structurent la méthodologie résumée dans ce chapitre.

Depuis très longtemps, l'homme cherche à prendre appui sur l'abstraction, le raisonnement hypothético-déductif pour guider et justifier ses actes. Peu après la seconde guerre mondiale, on a vu apparaître et se multiplier des organismes d'études dont la fonction était d'analyser et de préparer des décisions de toutes sortes. Les entreprises, les administrations se sont ensuite dotées

progressivement de cellules, de services ayant une mission d'aide à la décision, souvent appelés services de Recherche Opérationnelle, et rassemblant des spécialistes venus de diverses disciplines. C'est de cette activité d'aide à la décision dont il sera question dans ce livre.

Dans la vie d'une organisation, nombreuses sont les situations dont la complexité et/ou les enjeux invitent à rechercher une **aide à la décision** allant au-delà de l'utilisation du "bon sens", de l'expérience ou de la mise en œuvre de techniques de calcul élémentaire. A titre d'exemple, mentionnons :

- des problèmes de production : ordonnancement de tâches sur une machine ou dans un atelier, gestion des approvisionnements, adaptation du fonctionnement d'une usine à une demande variable, organisation de tournées de distribution, planification des opérations d'entretien, choix d'une technologie ;
- des problèmes de mercatique : organisation d'un réseau de distribution, répartition et motivation de la force de vente, choix de supports pour une campagne publicitaire ;
- des problèmes de gestion du personnel : recrutement d'un ou de plusieurs candidats, mise en place d'un système d'évaluation ;
- des problèmes de gestion financière : évaluation de projets d'investissement, octroi de crédits bancaires, constitution d'un portefeuille de titres ;
- des problèmes de recherche-développement : sélection et évaluation de projets de recherche ;
- d'autres problèmes complexes : dépouillement d'un appel d'offres, localisation d'une nouvelle installation.

Notons que des problèmes plus stratégiques tels :

- restructurer un groupe, abandonner une activité ou racheter une société,
- mettre ou non en chantier un engin spatial réutilisable,
- instaurer ou non un contrôle des changes,
- définir une stratégie diplomatique et militaire dans une situation de crise

peuvent également bénéficier, mais de façon plus limitée, des concepts, modes de raisonnement et procédures dont il va être question. Sfez (1992) a souligné ces limites dans le cas de problèmes ayant cette ampleur : la variété et la complexité des logiques d'acteurs appelés à jouer un rôle dans le processus par lequel s'élabore la décision rendent ce genre de processus souvent peu contrôlables.

Sur quels concepts, modèles, procédures, méthodes, résultats prendre appui pour parvenir à une aide à la décision ? Tel est l'objet de ce livre. Celui-ci fait suite au livre de Roy (1985) *Méthodologie multicritère d'aide à la décision* (MMCAD) ¹. Il présente un certain nombre de modèles et méthodes s'appuyant sur la méthodologie introduite dans MMCAD. Il peut cependant être abordé indépendamment de MMCAD. A cette fin, ce chapitre rappelle les grandes lignes de la méthodologie de MMCAD après avoir défini précisément ce que nous entendons par aide à la décision ².

1.1 DÉCISION, PROCESSUS DE DÉCISION, AIDE À LA DÉCISION ³

On présente souvent la décision comme le fait d'un individu isolé (le "décideur") exerçant librement un choix entre plusieurs possibilités d'actions à un moment donné dans le temps. Sans nier toute pertinence à cette conception de la décision, il faut admettre qu'elle ne rend que très imparfaitement compte de la façon dont sont prises les décisions dans la plupart des organisations. Même si, en dernier ressort, la responsabilité d'une décision incombe à un individu clairement identifié, celle-ci est souvent la résultante d'interactions entre de multiples acteurs (cf. glossaire) au cours

¹ Nous emploierons systématiquement cette abréviation par la suite.

² On trouvera en annexe de ce chapitre quelques définitions importantes extraites de MMCAD et rassemblées dans un glossaire. Sauf mention contraire, la terminologie et les notations utilisées dans cet ouvrage seront conformes à celles de MMCAD.

³ Cf. MMCAD, chapitres 1, 2 et 4, dont cette section est inspirée.

d'un **processus de décision**. Parmi les divers acteurs, on appellera **intervenants** ceux qui, de par leur intervention, conditionnent directement la décision en fonction du système de valeurs dont ils sont porteurs. A leur côté figurent tous ceux (administrés, contribuables, etc.) qui, de façon normalement passive, subissent les conséquences de la décision, laquelle est seulement censée tenir compte de leurs préférences. Avec Sfez (1992), nous appellerons cette catégorie d'acteurs les **agis**.

La dynamique du processus de décision est jalonnée de temps forts où sont arrêtées de multiples options conditionnant ce que sera la décision globale. Celle-ci apparaît alors comme la synthèse des diverses options prises au cours du processus et l'acte de choix final n'englobe qu'une faible part de ce qui fait réellement la décision. Dans cet ouvrage, on admettra donc que le concept de décision est difficilement séparable de celui de processus de décision dans la mesure où c'est l'ensemble des temps forts dans le déroulement de ce processus qui détermine la décision globale.

Dans ce contexte, décider ou, de façon plus large, intervenir dans un processus de décision n'est qu'exceptionnellement trouver une solution à un problème. C'est, le plus souvent, imaginer des compromis, faire accepter un arbitrage dans une situation de conflit. Transformer un conflit en problème, c'est laisser croire qu'il existe une solution, c'est-à-dire une réponse que tous les acteurs doivent reconnaître comme juste. En général, un arbitrage ne peut éliminer une part d'arbitraire, un compromis une part de rapport de force. L'analyse multicritère et les procédures qui en dérivent, qui font l'objet de cet ouvrage, peuvent contribuer à réduire cette part et à la faire accepter.

C'est cette conception de la décision qui sous-tend la définition de l'aide à la décision que nous adopterons :

DÉFINITION 1.1.1 ¹ : L'aide à la décision est l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles ² clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à recommander ³, ou simplement à favoriser, un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part.

Ainsi définie, l'aide à la décision ne relève que de façon très partielle de la recherche d'une vérité. Les théories ou, plus simplement, les méthodologies, les concepts, les modèles, les techniques sur lesquels elle s'appuie et dont il va être question dans cet ouvrage ont, le plus souvent, une ambition différente : raisonner le changement que prépare un processus de décision de façon à accroître sa cohérence avec les objectifs et le système de valeurs de celui pour qui ou au nom de qui l'aide à la décision s'exerce.

Dans cet ouvrage, on appellera **décideur** l'intervenant dans le processus de décision que les modèles mis en œuvre cherchent à

¹ Tirée de MMCAD, chapitre 2.

² Cf. glossaire.

³ Ce mot est ici employé pour souligner l'idée qu'il est clair, aux yeux de l'homme d'étude comme à ceux du décideur, que ce dernier conserve son entière liberté face au comportement recommandé. Il s'agit là d'une terminologie différente de celle de MMCAD où il était question de "prescription", au sens médical du mot. Nous utiliserons ici "recommandation" et "recommander" comme synonymes de "prescription" et "prescrire" au sens où ces mots étaient utilisés dans MMCAD. Ce changement de terminologie est destiné à éviter des contre-sens. En effet, le mot "prescription" est généralement utilisé en anglais dans un sens contraignant fortement la liberté du décideur vis-à-vis du comportement prescrit (voir par exemple Watson (1981)). C'est dans ce sens plus fort que nous utiliserons le mot prescription dans cet ouvrage (sur ces problèmes terminologiques, voir Roy (1992)).

éclairer ¹. L'**homme d'étude** est celui ² qui prend en charge l'aide à la décision. Mettant en œuvre des modèles dans le cadre d'un processus de décision, il contribue à l'orienter et à le transformer. A ce titre il est un acteur particulier de ce processus. Son travail est conditionné par un certain **état d'avancement du processus de décision** (cf. glossaire). Analysant et réfléchissant sur une réalité qu'il influence par sa présence et son action, la "neutralité", l'"objectivité", la "validité" de son travail soulèvent des questions difficiles ³. Sans chercher ici à leur donner une réponse définitive, précisons que, à notre sens, elles doivent s'analyser de façon sensiblement différente de celle traditionnellement adoptée dans les sciences de la nature.

L'activité de l'homme d'étude se situe, d'après la définition 1.1.1, à la charnière de la réflexion et de l'action. Il doit à la fois concevoir des modèles et les mettre en œuvre au sein de processus de décision. Son activité est donc assez proche de celle d'un ingénieur. Elle vise moins à comprendre le réel qu'à agir sur celui-ci. L'ingénieur dispose, en général, de critères de validation simples de ses travaux en termes de bon fonctionnement, de performances, de durabilité, etc. Comme on va le voir, tel n'est pas le cas pour l'"ingénieur de la décision".

On pourrait être tenté de répondre à la question "qu'est-ce qu'une bonne aide à la décision ?" en admettant qu'une "bonne" aide à la décision est une aide à la décision qui "fonctionne". Il est vrai qu'il n'est jamais agréable, à un homme d'étude, de voir ses rapports "enterrés" et ses recommandations non directement suivies d'effet. Mais, lorsque c'est le cas, cela signifie-t-il pour autant que l'aide à la décision a échoué ? Nous ne le croyons pas. L'apport de l'aide à la décision ne se limite pas au contenu de la recommandation finale. On sait bien, en effet, le rôle crucial que peuvent jouer des personnes extérieures du fait des interrogations

¹ Celui-ci ne doit pas être confondu avec le **demandeur** de l'étude. Sur cette notion, voir MMCAD, chapitre 2.

² Non nécessairement mais fréquemment distinct du décideur.

³ Voir à ce sujet Roy (1992).

qu'elles soulèvent ou même de leur seule présence dans certains processus de décision. Même si une aide à la décision est presque toujours présentée comme devant fournir une recommandation, elle peut être aussi un instrument stratégique utilisé par certains acteurs pour argumenter, retarder, modifier, voire occulter. Il est donc bien souvent difficile de dire si une aide à la décision particulière a ou non "fonctionné".

On peut également considérer qu'une "bonne" aide à la décision est une aide qui conduit à de "bonnes" décisions, voire à une décision "optimale". Cependant, la reconnaissance de la complexité des processus de décision, des rationalités multiples qui s'y côtoient, des conflits qui s'y déroulent et des transformations qui s'y opèrent ne peuvent que faire douter de la possibilité de toujours prouver qu'une décision est ou non la meilleure : meilleure pour qui ?, selon quels critères ?, à quel moment dans le temps ?, etc. Il y a, selon nous, un arbitraire certain à vouloir justifier l'aide à la décision en postulant l'existence d'une "vérité" vers laquelle l'homme d'étude devrait tendre. Aucune démarche objective fondée sur la seule raison ne peut démontrer l'optimalité ni même le bien-fondé d'un système de valeurs ou d'un mode d'anticipation de l'avenir. L'influence de la personnalité des acteurs impliqués dans un processus de décision échappe à l'analyse scientifique par beaucoup d'autres aspects, notamment par les projets à long terme dont ils sont porteurs, leur capacité à concevoir des possibles et à en évaluer les conséquences, à remettre en question certaines de leurs convictions ainsi qu'à ébranler celles d'autrui, leur aptitude à agir sur les perceptions et représentations du réel, la façon dont ils ressentent et lèvent certaines ambiguïtés, leur habileté à créer des situations plus ou moins difficilement réversibles, etc. Pour autant, il n'en demeure pas moins qu'une aide à la décision méthodique, fondée sur des concepts et procédures appropriés, peut jouer et joue un rôle important et bénéfique dans la conduite des processus de décision.

Nous pensons donc qu'il y a place pour une science de l'aide à la décision. Grâce à des concepts rigoureux, des modèles bien formalisés, des procédures de calcul précises, des résultats d'ordre axiomatique, on est en mesure d'éclairer les décisions en faisant ressortir ce qui est objectif de ce qui l'est moins, en séparant les

conclusions robustes des conclusions fragiles, en dissipant certaines formes de malentendu dans la communication, en évitant le piège de raisonnements illusoires, en mettant en évidence certains résultats contre-intuitifs, etc. Cette science, encore naissante, de l'aide à la décision ne peut véritablement porter ses fruits que si une attention toute particulière est accordée aux conditions d'insertion dans le processus de décision des démarches, outils, des résultats qu'elle produit.

Dans ce cadre, il est proposé, dans MMCAD, une méthodologie d'aide à la décision à quatre niveaux. A chacun de ces niveaux, l'homme d'étude est confronté aux interrogations suivantes :

Niveau I : Objet de la décision et esprit de la recommandation

- Sous quelle forme convient-il de modéliser la décision ?
- Comment différencier les diverses possibilités d'action ?
- Où placer la frontière entre ce qui est possible et ce qui ne l'est pas ?
- Dans quel esprit élaborer les modèles ?
- Quelle forme doit prendre une, éventuelle, recommandation ?

Niveau II : Analyse des conséquences et élaboration de critères

- En quoi, sous la forme où elle a été modélisée, la décision conditionne-t-elle l'évolution du processus ?
- Quelles sont les conséquences des décisions possibles susceptibles d'interférer avec les objectifs et systèmes de valeurs d'un intervenant quel qu'il soit ?
- Parmi les conséquences ainsi explicitées, lesquelles doivent être formalisées et comment ?
- Jusqu'à quel point chacune est-elle discriminante pour éclairer la décision compte-tenu, notamment, des facteurs d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination ?
- Comment construire des critères capables de prendre en compte ces conséquences et ces facteurs ?

Niveau III : Modélisation des préférences globales et approches opérationnelles pour l'agrégation des performances

– Parmi la variété (généralement grande) qui s'offre pour définir des critères, comment sélectionner celui (analyse monocritère) ou ceux (analyse multicritère) qui permettent d'appréhender "au mieux", en vue de l'aide à la décision, la totalité des conséquences ?

– Que convient-il d'exiger d'une telle famille de critères (éventuellement réduite à un seul) pour qu'elle joue son rôle dans le travail d'étude proprement dit tout en constituant une base de dialogue acceptable par les divers intervenants dont le décideur se préoccupe ?

– Comment convient-il, dans le cas d'une analyse multicritère, d'agréger les performances d'une action sur les divers critères pour la déclarer bonne ou mauvaise, meilleure ou pire qu'une autre ?

– Quelles informations ayant trait, par exemple, à l'importance relative des critères est-il opportun de faire intervenir et comment ?

Niveau IV : Procédures d'investigation et élaboration de la recommandation

– Comment tirer parti du travail qui a été fait aux niveaux précédents pour fournir des réponses, voire élaborer une recommandation ?

– Quelles procédures de traitement mettre en œuvre ?

– Comment analyser les résultats pour en tirer des conclusions ?

– Ces conclusions sont-elles robustes ?

– Peut-on élaborer une recommandation finale ou faut-il remettre en question certaines des options prises aux niveaux antérieurs ?

– Selon quelles modalités convient-il de communiquer la recommandation finale aux personnes concernées en vue de garantir une bonne insertion dans le processus de décision (question qui revêt une importance toute particulière lorsqu'une procédure recommandée doit faire l'objet d'une utilisation répétitive) ?

Ces quatre niveaux ne se succèdent pas nécessairement selon une séquence I, II, III, IV. Certaines des options du niveau I (ou II) peuvent fort bien n'être prises qu'à la lumière des réflexions se situant au niveau III. Les premiers résultats obtenus au niveau IV peuvent conduire à remettre en cause des options se situant au niveau I. Soulignons à nouveau que l'aide à la décision ne se réduit pas à la seule recommandation finale. Elle est aussi apportée tout au long d'un cheminement plus ou moins complexe entre les différents niveaux par les questions soulevées par l'homme d'étude ou même, parfois, par sa seule présence.

Dans MMCAD sont principalement abordés les deux premiers niveaux de cette méthodologie. A ce stade, les concepts d'actions, de problématique, de préférence, de conséquences, de critères sont cruciaux. On les présentera brièvement dans les sections suivantes de ce chapitre.

Prenant appui sur ces concepts, cet ouvrage aborde les niveaux III et IV en présentant et analysant un certain nombre de modèles et méthodes pour comparer des actions et élaborer une recommandation.

1.2 CONCEPT D'ACTION ET ENSEMBLE DES ACTIONS POTENTIELLES ¹

Les éléments de réponse qu'un décideur attend de l'aide à la décision ont généralement trait aux diverses **actions** (cf. glossaire) qu'il peut envisager dans la perspective du ou des temps forts à venir. Selon la nature des problèmes, ces actions peuvent se présenter de diverses manières :

- projets d'investissement (cf. chapitre 10),
- sites pour une localisation (cf. chapitre 9),
- réponses à un appel d'offres (cf. chapitre 8),
- plans d'aménagement (cf. MMCAD, exemple 4),
- plans de production (cf. MMCAD, exemple 11),

¹ Cf. MMCAD, chapitre 5 dont cette section est inspirée. Voir aussi Bana e Costa (à paraître).

- plans de développement (cf. MMCAD, exemple 7),
- etc.

Au lieu d'action, on parle aussi, selon les contextes, d'**alternative** ou de **solution**. Les caractéristiques des actions sont contingentes à un état d'avancement du processus de décision au sein duquel elles apparaissent comme autant de contributions éventuelles à une décision globale.

Remarquons que, de par sa définition, le concept d'action n'incorpore aucune idée de faisabilité ou de réalisme.

Pour la clarté du travail d'aide à la décision, il est utile d'introduire les distinctions suivantes ¹ :

- à côté d'**actions réelles** issues d'un projet complètement élaboré susceptible d'être mis à exécution, on est souvent amené à considérer, dans l'aide à la décision, des **actions fictives**, ce qualificatif de fictif servant à souligner le fait que l'action correspond à un projet idéalisé, incomplètement élaboré ou encore construit dans l'imagination ;

- aux **actions réalistes** correspondant à un projet dont la mise à exécution peut être raisonnablement envisagée s'opposent des actions plus ou moins **irréalistes** : celles-ci peuvent, par exemple, correspondre à la satisfaction d'objectifs incompatibles tout en constituant un bon support de discussion et de raisonnement.

Il est clair qu'une action fictive peut être réaliste ou non réaliste.

La notion de "possible" est introduite avec l'idée d'action potentielle. Une **action potentielle** (cf. glossaire) est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par un acteur au moins ou présumée telle par l'homme d'étude en vue de l'aide à

¹ Nous ferons parfois référence à une catégorie particulière d'actions fictives (réalistes ou non) : les actions **idéales**. Par là, on désigne toute action dont on considère qu'elle correspond rigoureusement à la description qu'on en donne et tout spécialement pour ce qui concerne les conséquences de sa mise à exécution.

la décision ; l'ensemble des actions potentielles sur lequel l'aide à la décision prend appui au cours d'une phase d'étude est noté A .

La définition de cet ensemble A des actions potentielles soulève parfois des difficultés importantes pour poser une frontière, même provisoire, entre ce qui est envisageable ou possible et ce qui ne l'est pas ¹. Précisons que cet ensemble A prend généralement l'une des deux formes suivantes :

- une liste $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ d'actions potentielles (définition en extension) ;
- un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ lorsque chaque action potentielle est définie par la donnée de m variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_m$ sur lesquelles pèsent un certain nombre de contraintes (définition en compréhension).

Le premier cas se rencontre, par exemple, dans un problème de financement de projets de recherche où l'on doit faire le choix de sélectionner un ou plusieurs projets parmi les propositions faites. Le second est fréquent dans les problèmes de production, un plan de production étant défini par la donnée d'un certain nombre de variables (sortie de stocks, nombre d'unités produites, composition des produits, etc.).

On a souvent tendance à considérer cet ensemble A comme stable, c'est-à-dire non susceptible d'évoluer du fait de modification de l'environnement et/ou du fait de l'étude elle-même. Cette conception de A est souvent fort réductrice, même si elle simplifie la tâche de l'homme d'étude. Souvent, contribuer à faire évoluer A est une aide importante à la décision (cf. glossaire : propriétés de l'ensemble des actions potentielles).

Remarquons enfin que rien dans la définition d'une action n'indique qu'elle doive nécessairement être exclusive de toutes les autres. Lorsque c'est le cas, elle sera dite globale. Dans le cas

¹ Pour cette raison notamment, le qualificatif de potentiel n'est pas toujours synonyme de possible ou réalisable.

contraire, elle sera dite fragmentaire (cf. glossaire : action globale et action fragmentaire). On peut concevoir un exemple simple d'action fragmentaire dans un problème d'octroi de crédits par un banquier. S'il est raisonnable de considérer chaque dossier de demande de crédit comme un point d'application possible d'une aide à la décision – et donc comme une action – accepter un dossier de crédit n'implique pas de rejeter tous les autres.

Par des regroupements convenables d'actions fragmentaires, on peut cerner des configurations mutuellement exclusives qui, si elles sont prises comme actions, conduisent à substituer des actions globales aux actions fragmentaires initiales. De par leur globalité, ces nouvelles actions ne constituent pas nécessairement des points d'applications opérationnels dans l'aide à la décision. La qualité de l'insertion dans le processus de décision peut s'en trouver compromise. Ces configurations sont, en outre, plus complexes qu'une simple juxtaposition des fragments qui la composent. Enfin, le passage d'une conception naturellement fragmentée à une conception globalisée quelque peu artificielle accroît considérablement le nombre des actions et, surtout, complique le diagnostic de faisabilité. Il peut donc y avoir un réel intérêt à raisonner sur des actions fragmentaires.

1.3 PROBLÉMATIQUES D'AIDE À LA DÉCISION ¹

Dans de très nombreux contextes impliquant décision, on entend fréquemment les principaux responsables parler de "solution optimale". Soulignons que, pour parler d'optimum, il faut pouvoir modéliser la situation de telle sorte que :

- chaque solution envisagée soit exclusive de toutes les autres ;
- l'ensemble des solutions considérées soit fixé une fois pour toutes ;
- les solutions puissent être ordonnées de façon incontestable de la plus mauvaise à la meilleure.

¹ Cf. MMCAD, chapitre 6, dont cette section est inspirée. Nous reviendrons en détail sur ce sujet au 6.1. Voir aussi Bana e Costa (à paraître).

L'ensemble A des actions potentielles ne doit pas toujours être regardé comme un ensemble de solutions jouissant de ces caractéristiques. C'est pourquoi, en matière d'aide à la décision, il est préférable, dans bien des cas, de chercher, au moins au départ, à formuler le problème en termes moins restrictifs. Dans cette optique, quatre **problématiques de référence** (dont les principales caractéristiques sont indiquées au tableau 1.3.1 et les définitions rappelées dans le glossaire) doivent être considérées.

La première (P. α) consiste à formuler le problème en termes de meilleur choix mais sans s'imposer d'aboutir à la mise en évidence d'une solution réputée optimale (l'optimisation en est donc un cas particulier). La seconde (P. β) correspond à une pratique courante : celle de l'examen (examens médicaux, examens scolaires, ...). La problématique P. γ procède d'une autre optique : celle du concours aboutissant à un classement (non nécessairement complet). Il convient enfin d'isoler la problématique P. δ car, même si elle peut apparaître sous une forme plus ou moins développée comme lieu de passage obligé pour chacune des trois précédentes, elle peut aussi constituer une fin en soi.

Précisons enfin que la manière de formuler le problème n'a pas seulement pour objet de préciser la nature de ce qui est recherché relativement à l'ensemble A des actions potentielles mais aussi l'esprit dans lequel la recommandation dont il a été question plus haut mérite d'être conçue. En particulier, s'agit-il d'une optique seulement tactique qui ne concerne que les éléments de l'ensemble des actions potentielles ou s'agit-il au contraire d'une optique plus stratégique qui vise à élaborer une méthodologie ou à mettre en place une procédure destinée à une utilisation répétitive et/ou automatisée ?

1.4 MODÉLISATION DES PRÉFÉRENCES

Aider à la décision suppose de prendre en compte les valeurs et les préférences d'un ou de plusieurs acteurs dans un processus de décision. Cette section rappelle brièvement quelques outils

utiles pour ce faire ¹.

Tableau 1.3.1 : Les quatre problématiques de référence
(extrait de MMCAD, chapitre 6)

Problématique	Objectif	Résultat
P.α	Eclairer la décision par le choix d'un sous-ensemble aussi restreint que possible en vue d'un choix final d'une seule action, ce sous-ensemble contenant des "meilleures" actions (optimums) ou, à défaut, des actions "satisfaisantes" (satisfecums).	Un choix ou une procédure de sélection
P.β	Eclairer la décision par un tri résultant d'une affectation de chaque action à une catégorie, les catégories étant définies a priori en fonction de normes ayant trait à la suite à donner aux actions qu'elles sont destinées à recevoir.	Un tri ou une procédure d'affectation
P.γ	Eclairer la décision par un rangement obtenu en re-groupant tout ou partie (les "plus satisfaisantes") des actions en classes d'équivalence, ces classes étant ordonnées, de façon complète ou partielle, conformément aux préférences.	Un rangement ou une procédure de classement
P.δ	Eclairer la décision par une description, dans un langage approprié, des actions et de leurs conséquences.	Une description ou une procédure cognitive

1.4.1 Généralités

De même que dans MMCAD, on admettra que les quatre situations fondamentales incompatibles d'indifférence, de

¹ Voir MMCAD, chapitre 7 dont cette section est inspirée. Voir aussi Roubens et Vincke (1985) et Fishburn (1970a).

préférence stricte, de préférence faible¹ et d'incomparabilité² (définies au tableau 1.4.1) conviennent pour asseoir une représentation réaliste des préférences d'un acteur Z ; quelles que soient les actions potentielles en cause, le point de vue adopté pour les comparer et l'information disponible, Z ou l'homme d'étude jugeant au nom de Z peut concevoir un modèle satisfaisant qui, pour élaborer ou rendre compte des préférences de Z, fasse correspondre à chaque paire d'actions potentielles soit une seule, soit un regroupement de deux ou trois des quatre situations fondamentales.

Parmi les regroupements possibles de ces quatre situations fondamentales, certains présentent un intérêt tout particulier. Ils sont présentés au tableau 1.4.2.

D'après les propriétés des relations fondamentales indiquées au tableau 1.4.1, $\sim$ est symétrique, $>$ est asymétrique, J, K et S ne sont nécessairement ni symétriques, ni asymétriques (cf. 1.4.2).

A l'aide des relations fondamentales ou regroupées, on espère parvenir à un modèle satisfaisant des préférences d'un acteur. C'est l'objet de la définition suivante (cf MMCAD, chapitre 7) :

DÉFINITION 1.4.1 : Etant donné neuf relations binaires I, R, $\sim$, P, Q, $>$, J, K, S définies sur un ensemble A d'actions potentielles, nous dirons qu'elles constituent un **système relationnel de préférences** (s.r.p.) d'un acteur Z sur A si :

¹ L'affirmation "a faiblement préférée à b" traduit le fait que Z ou l'homme d'étude qui juge en son nom s'estime en mesure d'affirmer que "b n'est pas préférée à a" tout en hésitant entre "a est strictement préférée à b" et "a est indifférente à b", les éléments dont il dispose pour trancher entre ces deux dernières possibilités ne lui paraissant pas suffisamment probants.

² Certains ont tendance à contester l'intérêt de l'incomparabilité en faisant valoir qu'elle est nécessairement évacuée par toute décision. Cette contestation repose sur un malentendu : il importe de ne pas perdre de vue que l'affirmation "a et b sont incomparables" traduit un refus de prendre position **au niveau de la modélisation des préférences** sur la comparaison des valeurs respectives de a et de b.

Tableau 1.4.1 : Modélisation des quatre situations fondamentales de préférences dans la comparaison de deux actions potentielles (extrait de MMCAD, chapitre 7)

Situation	Définition	Relation binaire (propriétés)
Indifférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une équivalence entre les deux actions.	I : relation symétrique réflexive
Préférence stricte	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence significative en faveur de l'une (identifiée) des deux actions.	P : relation asymétrique (irréflexive)
Préférence faible	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui infirment une préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais ces raisons sont insuffisantes pour en déduire soit une préférence stricte en faveur de l'autre, soit une indifférence entre ces deux actions (ces raisons ne permettent donc pas d'isoler l'une des deux situations précédentes comme étant la seule appropriée).	Q : relation asymétrique (irréflexive)
Incomparabilité	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives justifiant l'une des trois situations précédentes.	R : relation symétrique irréflexive

1°) En accord avec les définitions et propriétés des tableaux 1.4.1 et 1.4.2, elles peuvent être prises comme représentation des préférences de Z vis-à-vis des actions de A.

2°) Elles sont exhaustives : pour une paire quelconque d'actions, une au moins est vérifiée.

3°) Elles sont mutuellement exclusives ¹ : pour une paire d'actions quelconques, deux relations distinctes ne sont jamais vérifiées.

1.4.2 Principales structures de préférences

On a vu que le concept de relation binaire était crucial pour modéliser des préférences. Nous rappelons ici quelques structures remarquables de ces relations ayant un intérêt particulier en modélisation des préférences.

Soit H une relation binaire ² sur un ensemble B . Parmi les propriétés les plus classiques que H peut posséder, mentionnons :

- (1) réflexivité : $\forall a \in B, a H a$;
- (2) irreflexivité : $\forall a \in B, \text{Non } [a H a]$;
- (3) symétrie : $\forall a, b \in B, a H b \Rightarrow b H a$;
- (4) asymétrie : $\forall a, b \in B, a H b \Rightarrow \text{Non } [b H a]$;
- (5) transitivité : $\forall a, b, c \in B, [a H b \text{ et } b H c] \Rightarrow a H c$;

¹ La condition 3 stipule que si H_1 et H_2 sont deux relations distinctes parmi les neuf, alors :

– $[a H_1 b \text{ et } b H_2 a]$ est exclu : cette condition découle en fait des définitions des tableaux 1.4.1 et 1.4.2 sauf dans des cas exceptionnels qu'il n'est pas restrictif d'exclure ;

– $[a H_1 b \text{ et } a H_2 b]$ est exclu : cette condition peut, par contre, sembler restrictive puisque $[a P b \text{ et } a \succ b]$ ou $[a \succ b \text{ et } a J b]$ ou encore $[a I b \text{ et } a S b]$ caractérisent des situations cohérentes.

Le lecteur vérifiera sans peine que, dans toutes les situations cohérentes du type ci-dessus, il est toujours possible d'adopter une modélisation équivalente ne mettant en jeu qu'une relation au lieu de deux. Ainsi, dans les exemples ci-dessus :

- $[a P b \text{ et } a \succ b]$ peut être remplacé par $a P b$;
- $[a \succ b \text{ et } a J b]$ peut être remplacé par $a Q b$;
- $[a I b \text{ et } a S b]$ peut être remplacé par $a I b$.

Cette condition 3 est donc introduite en vue de restreindre l'acception du signe s.r.p. à des systèmes relationnels qui ne soient ni contradictoires avec les définitions des neuf relations, ni surchargés par des redondances ou des complications inutiles.

² c'est-à-dire que H est un sous-ensemble de $B \times B$. En accord avec un usage bien établi, on écrira $a H b$ au lieu de $(a, b) \in H$.

Tableau 1.4.2 : Situations et relations regroupées intervenant dans la modélisation des préférences relativement à deux actions potentielles a, a'

Situation	Définition	Relation binaire (propriétés)
Non préférence	Elle correspond à l'absence de raisons claires et positives qui justifieraient une préférence stricte ou une préférence faible en faveur de l'une quelconque des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations d'indifférence et d'incomparabilité.	$a \sim a' \Leftrightarrow (a \tilde{I} a' \text{ ou } a \tilde{R} a')$
Préférence (au sens large)	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient une préférence stricte ou faible en faveur de l'une (identifiée) des deux actions et regroupe par conséquent, sans possibilité de les différencier, les situations de préférence stricte et de préférence faible.	$a \succ a' \Leftrightarrow (a \overset{\succ}{P} a' \text{ ou } a \overset{\succ}{Q} a')$

Présomption de préférence	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient la préférence faible, si faible soit-elle, en faveur de l'une (identifiée) des deux actions ou, à la limite, l'indifférence entre elles deux mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence faible et d'indifférence.	J $a J a' \Rightarrow (a Q a' \text{ ou } a I a')$
K-préférence	Elle correspond soit à l'existence de raisons claires et positives qui justifient soit la préférence stricte en faveur de l'une (identifiée) des deux actions, soit l'incomparabilité de ces deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre ces deux situations.	K $a K a' \Rightarrow (a P a' \text{ ou } a R a')$
Surclassement	Elle correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient soit une préférence, soit une présomption de préférence en faveur de l'une (identifiée) des deux actions mais sans qu'aucune séparation significative ne soit établie entre les situations de préférence stricte, de préférence faible et d'indifférence.	S $a S a' \Rightarrow (a P a' \text{ ou } a Q a' \text{ ou } a I a')$

- (6) Ferrers : $\forall a, b, c, d \in B, [a H b \text{ et } c H d] \Rightarrow [a H d \text{ ou } c H b]$;
 (7) quasi-transitivité : $\forall a, b, c, d \in B, [a H b \text{ et } b H c] \Rightarrow [a H d \text{ ou } d H c]$;
 (8) complétude : $\forall a, b \in B, a H b \text{ ou } b H a$.

Ces propriétés ne sont pas sans liens. A titre d'exemple, on notera qu'une relation irreflexive et quasi-transitive est obligatoirement transitive.

Soit $H_1, H_2, \dots, H_k$, k relations binaires sur un ensemble B . On dit que ces k relations sont :

- (9) mutuellement exclusives : $\forall a, b \in B, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, a H_i b \Rightarrow [\text{Non}(a H_j b) \text{ et } \text{Non}(b H_j a), \forall j \neq i]$;
 (10) exhaustives : $\forall a, b \in B, \exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que $a H_i b$ ou $b H_i a$.

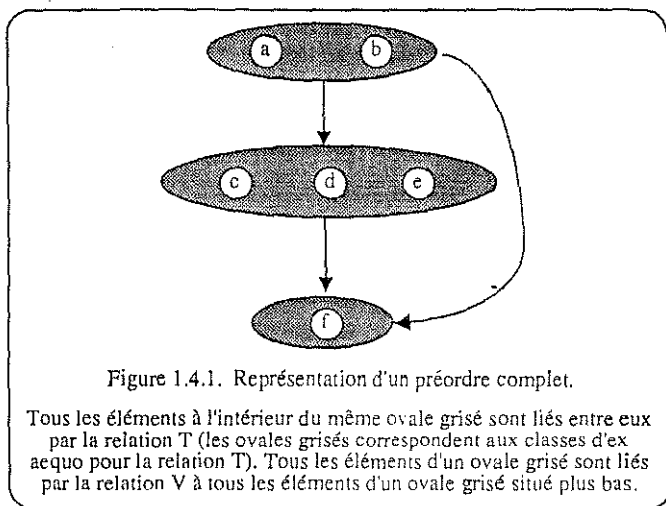
a) Préordre complet

Un couple de relations binaires (T, V) sur un ensemble B est un préordre complet si :

- T et V sont exhaustives et mutuellement exclusives ;
- V est asymétrique et transitive ;
- T est symétrique et transitive.

La structure de préordre complet correspond à la notion intuitive de classement avec possibilité d'ex æquo (cf. figure 1.4.1). Une relation T sur un ensemble B est une **relation d'équivalence** si T est réflexive, symétrique et transitive. Un préordre complet (T, V) tel que $V = \emptyset$ est donc une relation d'équivalence particulière (à une seule classe). Un préordre complet (T, V) où T est réduite aux boucles (c'est-à-dire que T n'est vérifiée qu'entre deux actions identiques) est appelé un **ordre complet**, ce qui correspond à la notion intuitive de classement sans possibilités d'ex æquo.

On vérifiera sans peine que (T, V) est un préordre complet si et seulement si la relation $H = T \cup V$ est complète et transitive ¹.



L'intérêt de la structure de préordre complet est liée au résultat classique suivant :

RÉSULTAT 1.4.1 : Un préordre complet (T, V) sur un ensemble B peut toujours, dans les problèmes réels ², être représenté par une fonction g à valeur réelle définie sur B de telle sorte que, $\forall a, a' \in B$:

¹ Rappelons que $T \cup V$ est une relation binaire sur B définie par $a T \cup V b \Leftrightarrow a T b$ ou $a V b$. Rappelons également que $T \cdot V$ est une relation binaire sur B définie par $a T \cdot V b \Leftrightarrow \exists c \in b$ tel que $a T c$ et $c V b$.

² En toute rigueur, il existe des cas d'impossibilité mais ceux-ci correspondent à des situations pathologiques, concernant uniquement le cas où B est infini, qui ne se rencontrent jamais dans les problèmes réels. Cette remarque vaut pour tous les résultats présentés dans cette section. Pour plus de précisions, voir Fishburn (1970a).

$$\left. \begin{array}{l} a' T a \Leftrightarrow g(a') = g(a) \\ a' V a \Leftrightarrow g(a') > g(a). \end{array} \right\} \quad (r.1.4.1^1)$$

Conformément aux propriétés indiquées aux tableaux 1.4.1 et 1.4.2, on peut ainsi vouloir bâtir des s.r.p. (I, P) , $(\sim, P)$, $(\sim, \succ)$ ou $(I, \succ)$ ayant une structure de préordre complet. Ceci suppose :

- l'absence d'incomparabilité ;
- la transitivité de P (ou $\succ$) et de I (ou $\sim$).

Il est facile de montrer ² qu'imposer la transitivité de I ou de $\sim$ conduit souvent à une modélisation des préférences peu réaliste. Ceci justifie l'introduction des structures présentées au b).

b) Quasi-ordre et ordre d'intervalle

Un couple de relations binaires (T, V) sur un ensemble B est un ordre d'intervalle si :

- T et V sont exhaustives et mutuellement exclusives ;
- T est symétrique ;
- V est asymétrique ;
- $\forall a, b, c, d \in B, [a V b, b T c \text{ et } c V d] \Rightarrow a V d$.

Si, de plus, on a :

$$\forall a, b, c, d \in B, [a V b \text{ et } b V c] \Rightarrow \text{Non}[a T d \text{ et } d T c],$$

(T, V) est un quasi-ordre.

On vérifiera sans peine que (T, V) est un ordre d'intervalle si et seulement si $H = T \cup V$ est complète et de Ferrers. De même, (T, V) est un quasi-ordre si et seulement si $H = T \cup V$ est complète, de Ferrers et quasi-transitive.

Ces deux structures consistent à admettre que la relation symétrique n'est pas parfaitement transitive en raison de phénomènes de seuils. Ceci est illustré par les deux résultats suivants :

¹ A chacune des relations susceptibles de donner lieu à renvoi est associée une référence faisant suivre la lettre "r" du numéro du chapitre, de la section et enfin d'un numéro d'ordre au sein de celle-ci.

² Cf. MMCAD, 7.2.

RÉSULTAT 1.4.2 : Un quasi-ordre (T, V) sur un ensemble B peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par une fonction g à valeurs réelles définie sur B de telle sorte que :

$$\left. \begin{array}{l} a' T a \Leftrightarrow -q \leq g(a') - g(a) \leq q \\ a' V a \Leftrightarrow g(a') > g(a) + q, \end{array} \right\} \quad (r.1.4.2)$$

q désignant une constante non négative appelée seuil d'indifférence.

RÉSULTAT 1.4.3 : Un ordre d'intervalle (T, V) sur un ensemble B peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par deux fonctions g et q , g étant à valeurs réelles, définie sur B et q une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de telle sorte que :

$$\left. \begin{array}{l} a' T a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(a') - g(a) \leq q(g(a)) \text{ et} \\ g(a) - g(a') \leq q(g(a')) \end{array} \right. \\ a' V a \Leftrightarrow g(a') - g(a) > q(g(a)) \end{array} \right\} \quad (r.1.4.3)$$

où la fonction-seuil q est telle que :

$$q(g(a)) \geq 0, \forall a \in B.$$

Il est facile de montrer qu'un préordre complet est un quasi-ordre à seuil d'indifférence nul. De même, un quasi-ordre est un ordre d'intervalle à seuil constant. Notons que, dans les problèmes réels, si un ordre d'intervalle admet une représentation (r.1.4.3) telle que, $\forall a, a' \in B$,

$$g(a) > g(a') \Rightarrow g(a) + q(g(a)) \geq g(a') + q(g(a')) \quad (r.1.4.4^1)$$

on peut montrer qu'il admet également une représentation à seuil constant de type (r.1.4.2) et est donc un quasi-ordre.

Conformément aux propriétés indiquées aux tableaux 1.4.1 et 1.4.2, on peut ainsi vouloir bâtir des s.r.p. (I, P) , $(I, \succ)$, $(\sim, P)$, $(\sim, \succ)$ ayant une structure d'ordre d'intervalle ou de quasi-ordre.

c) Préordre partiel

Un triplet de relations (T, V, W) sur un ensemble B est un préordre partiel si :

- T, V, W sont exhaustives et mutuellement exclusives ;
- W est symétrique et irréflexive ;

¹ On vérifiera facilement que cette condition est équivalente à : $\forall a, a' \in A : [q(g(a)) - q(g(a'))]/[g(a) - g(a')] \geq -1$.

- T est symétrique et réflexive ;
- V est asymétrique ;
- $(T \cup V)$ est transitive.

La structure de préordre partiel généralise la structure de préordre complet pour admettre l'idée d'incomparabilité dans le classement tout en gardant celle de transitivité. Un préordre partiel tel que, $\forall a, b \in B, a T b \Leftrightarrow a = b$ est appelé un **ordre partiel**. Il est facile de vérifier qu'une structure de préordre partiel telle que $W = \emptyset$ est un préordre complet. De même, on vérifiera que T est une relation d'équivalence dans une structure de préordre partiel telle que $V = \emptyset$.

On vérifiera sans peine que (T, V, W) est un préordre partiel si et seulement si la relation $H = T \cup V$ est réflexive et transitive. On a :

RÉSULTAT 1.4.4 : Un préordre partiel (T, V, W) sur B peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par une fonction g à valeurs réelles définie sur B de telle sorte que :

$$\left. \begin{array}{l} a' T a \Rightarrow g(a') = g(a) \\ a' V a \Rightarrow g(a') > g(a) \end{array} \right\} \quad (r.1.4.5)$$

En matière de modélisation des préférences, les s.r.p. pouvant avoir une structure de préordre partiel sont du type :

$$(I, P, R), (I, \succ, R), (\sim, P, R) \text{ ou } (\sim, \succ, R).$$

On peut (voir Roubens et Vincke (1985) et MMCAD, 7.2.3) généraliser de même les structures de quasi-ordre et d'ordre d'intervalle pour faire apparaître d'éventuelles incomparabilités. On parle alors de quasi-ordres partiels et d'ordres d'intervalle partiels.

d) Pseudo-ordre

Un triplet de relations (T, V, W) sur un ensemble B est un pseudo-ordre si :

- T, V, W sont exhaustives et mutuellement exclusives ;

- T est symétrique et réflexive ;
- V est asymétrique ;
- W est asymétrique ;
- $(T, V \cup W)$ a une structure de quasi-ordre ;
- (∇, V) a une structure de quasi-ordre (avec $a' \nabla a \Leftrightarrow [\text{Non}(a' V a) \text{ et } \text{Non}(a V a')]$;
- $V \cdot T \cdot W \subset V$;
- $W \cdot T \cdot V \subset V$;
- $T \cdot W \cdot V \subset V$;
- $V \cdot W \cdot T \subset V$.

Cette structure plus complexe correspond intuitivement à un quasi-ordre (T, V) où l'on a "inséré", de manière adéquate, la relation W. Cette insertion correspond, pour la modélisation des préférences, à celle de la préférence faible ($W = Q$) entre l'indifférence ($T = I$) et la préférence stricte ($V = P$).

RÉSULTAT 1.4.5 : Un pseudo-ordre (T, V, W) sur B peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par trois fonctions g, p, q , g étant à valeurs réelles définie sur B, p et q des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
 a' T a &\Leftrightarrow \begin{cases} g(a') - g(a) \leq q(g(a)) \text{ et} \\ g(a) - g(a') \leq q(g(a')) \end{cases} \\
 a' W a &\Leftrightarrow g(a) + q(g(a)) < g(a') \leq g(a) + p(g(a)) \\
 a' V a &\Leftrightarrow g(a') > g(a) + p(g(a))
 \end{aligned} \tag{r.1.4.6}$$

où les fonctions-seuils q et p sont telles que, $\forall a, a' \in B$:

$$\begin{aligned}
 p(g(a)) &\geq q(g(a)) \geq 0 \\
 g(a') > g(a) &\Rightarrow \begin{cases} g(a') + q(g(a')) \geq g(a) + q(g(a)) \text{ et} \\ g(a') + p(g(a')) \geq g(a) + q(g(a)). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Notons qu'il est toujours possible de choisir une représentation d'un pseudo-ordre de telle sorte qu'une des deux fonctions-seuils soit constante. On voit donc qu'un quasi-ordre est un pseudo-ordre particulier où $W = \emptyset$.

En matière de modélisation des préférences, on peut vouloir bâtir des s.r.p. du type (I, P, Q) ayant une structure de pseudo-ordre.

e) Relations de préférence floues

On verra, au chapitre 5, que l'on peut modéliser des préférences autrement que par des relations binaires "nettes" comme on vient de le faire. On peut en effet être amené, pour chaque relation H du s.r.p. considéré, à apprécier, sur une échelle de 0 à 1, la plus ou moins grande crédibilité de l'acceptation (comme reflet d'une conviction ou encore comme hypothèse de travail) d'une assertion telle que $a H b$. C'est la force des arguments que l'on peut avancer en faveur de cette assertion qui doit permettre d'en apprécier la crédibilité. Nous renvoyons au 5.3.2 sur ce point.

1.4.3 Modélisation des préférences sur des "écarts"

On a supposé jusqu'à présent que la modélisation des préférences d'un acteur ne faisait intervenir que des jugements portés sur des couples d'actions (a, b). On peut parfois vouloir aller plus loin et porter un jugement sur l'écart $a \ominus b$ (ou, de façon identique, la *mutation* $b \rightarrow a$) existant entre deux actions. Ainsi, on peut vouloir se prononcer sur des questions du type :

– "l'écart existant entre a et b est-il plus grand que celui existant entre c et d" ou encore

– "la transformation de l'action a en action b procure-t-elle un accroissement de satisfaction supérieur à celui que procure la transformation de c en d".

Ces préférences entre écarts peuvent être modélisées en bâtissant un s.r.p. sur $A \times A$. Afin de distinguer les relations binaires sur A et sur $A \times A$, on note I^* , P^* , Q^* , R^* , $\sim^*$, $\succ^*$, J^* , K^* , S^* ces dernières.

On peut être ainsi amené à s'intéresser à des s.r.p. (S^* , R^*) admettant une représentation du type :

$$g(a) - g(b) \geq g(c) - g(d) \Rightarrow a \ominus b S^* c \ominus d$$

ou encore à des s.r.p. (I^* , P^*) pour lesquels :

$$a \ominus b P^* c \ominus d \Leftrightarrow g(a) - g(b) > g(c) - g(d)$$

$$a \ominus b I^* c \ominus d \Leftrightarrow g(a) - g(b) = g(c) - g(d).$$

Nous reviendrons longuement sur ces questions au 4.4. Mentionnons dès à présent qu'il est indispensable de raisonner l'éventuel s.r.p. sur $A \times A$ en liaison avec le s.r.p. sur A. Ainsi, il peut sembler raisonnable de postuler :

$$(a \ominus b) H^* (c \ominus d) \Leftrightarrow a H b, \forall H \in \{I, R, \succ, P, Q, \sim, J, K, S\}.$$

1.5 MODÉLISATION DES CONSÉQUENCES ¹

Quelle que soit la manière dont on envisage d'éclairer une décision, il est nécessaire de s'intéresser aux **conséquences** (cf. glossaire) qu'entraîne la mise à exécution de chacune des actions de A. Ces conséquences sont, en général, multiples. Elles s'apprécient en des termes fort variés (monétaires, temporels, spatiaux, de confort, d'image, ...). C'est en prenant appui sur l'évaluation de ces conséquences que les actions peuvent être comparées en termes de préférence, d'indifférence, etc.

La méthodologie proposée dans MMCAD conduit à ² analyser les conséquences des actions de A par rapport à un ensemble de $\bar{n}$ **dimensions** (cf. glossaire), appelé "spectre des conséquences" (cf. glossaire) tel que :

- chacune de ces dimensions soit suffisamment bien identifiée dans son contenu pour que les différents acteurs en comprennent la signification ;
- il soit possible d'associer, à chaque dimension $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$, une **échelle de préférence** E_i , les différents échelons de cette échelle étant définis de manière à refléter un ordre complet partagé par tous les acteurs (cf. glossaire) ;
- il soit possible d'associer, à chaque dimension $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$, un **indicateur d'état** γ_i associant, à chaque action $a \in A$, un sous-ensemble ³ $\gamma_i(a)$ de l'échelle de préférence E_i associée, ce sous-ensemble contenant celui (ou ceux) des échelons de E_i qui se réaliseront si l'action a est mise à exécution ;

¹ Cf. MMCAD, chapitre 8 dont cette section est inspirée.

² Les concepts présentés dans cette section sont illustrés aux chapitres 8, 9 et 10 présentant des cas concrets. Le lecteur qui éprouverait le besoin de mieux comprendre leur signification concrète peut, dès à présent, commencer la lecture de ces trois chapitres.

³ ce sous-ensemble étant éventuellement réduit à un seul échelon pour toutes les actions. On parle alors d'indicateur d'état ponctuel.

– il soit possible d'associer, à chaque dimension $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ et à chaque action $a \in A$, un **indicateur de dispersion** (cf. glossaire) δ_i^a permettant d'apprécier la plus ou moins grande vraisemblance des échelons de $\gamma_i(a)$ si a est mise à exécution ; l'indication de cette vraisemblance peut prendre la forme d'une distribution de probabilités ; elle est parfois purement ordinale.

Cette méthodologie conduit donc à modéliser les conséquences de la mise à exécution d'une action potentielle sous la forme d'un modèle $\Gamma(a) = \{(\gamma_i(a), \delta_i^a), i = 1, 2, \dots, \bar{n}\}$. On notera $\Gamma(A)$ l'ensemble des modèles correspondant aux actions de A . Dans les problèmes réels, l'élaboration d'un tel modèle n'est, en général, pas une tâche aisée. Elle doit être guidée par les trois principes suivants :

i) Principe d'intelligibilité

Les composantes de $\Gamma(A)$ doivent cerner, de façon aussi directe que possible, les diverses conséquences telles que les acteurs les conçoivent ou sont aptes à les comprendre en étroite relation avec les échelles de préférence.

ii) Principe d'universalité

Ces composantes doivent être rattachées à des dimensions reflétant ce qu'il y a de fondamental et d'unanime dans les jugements de préférence ayant trait aux actions de A .

iii) Principe de fiabilité

Le modèle $\Gamma(A)$ doit explicitement faire apparaître le degré de fiabilité (niveau de précision, de signification, de validité) de ses composantes les plus importantes et ce en fonction de l'action a considérée.

1.6 CRITÈRES

1.6.1 Généralités

Face à un modèle d'évaluation $\Gamma(A)$, les préférences d'un acteur impliqué dans un processus de décision ne sont pas nécessairement toujours rigoureusement définies a priori et stables. L'appréciation de certaines des conséquences peut être plus ou moins bien étayée ; d'autres peuvent être hypothétiques et décrites en termes probabilistes. Le jugement de préférence peut varier selon l'importance plus ou moins grande que l'acteur accorde à tel ou tel aspect des conséquences. Ce jugement apparaît donc fréquemment comme la résultante d'aspects conflictuels qui s'affrontent, tant dans l'esprit d'un acteur donné qu'entre acteurs différents au sein du processus de décision. Aider à décider, c'est, en tout premier lieu, aider à clarifier la formation, la transformation et l'argumentation des préférences. A ce niveau, le concept-clé est celui du **critère**.

Pour l'essentiel, un critère vise à résumer, à l'aide d'une fonction, les évaluations d'une action sur diverses dimensions pouvant se rattacher à un même "axe de signification", ce dernier étant la traduction opérationnelle d'un "point de vue" au sens usuel du terme. C'est ainsi que l'on peut chercher à définir un critère "dommages causés à l'environnement" en regroupant les dimensions impact sur la faune, sur la flore, sur la qualité de l'air, etc.

Lorsque le spectre des conséquences n'est pas trop complexe, on peut vouloir expliciter d'emblée un critère unique appréhendant toutes les conséquences pertinentes. Une telle **analyse monocritère** suppose que l'on puisse valoriser chaque action potentielle sur un axe de signification unique choisi a priori. Ce dernier peut avoir un sens plus ou moins concret : bénéfice, taux de rentabilité, gain pour la collectivité, utilité pour un décideur. Ce premier mode d'analyse impose en particulier de chiffrer chacune des conséquences dans une unité commune, propre à l'axe de signification choisi. Trois écueils sont alors à éviter :

- exclure du chiffrage (plus ou moins consciemment) ceux des aspects des conséquences qui se laissent mal appréhender dans un tel système de représentation,

- recourir à des prix de référence, des taux d'équivalence, des barèmes de conversion, ... à la fois nécessaires pour ramener des conséquences hétérogènes à une unité commune mais difficiles à évaluer de façon objective ou

- aboutir à une formule complexe, fondée sur une logique obscure et peu propice à la communication.

Lorsque l'hétérogénéité des conséquences est telle que les écueils précédents ne peuvent être évités, il est préférable de procéder à une **analyse multicritère**. Celle-ci consiste à expliciter une famille de plusieurs critères, chacun d'eux n'appréhendant qu'une catégorie relativement homogène de conséquences.

Chacun de ces critères doit évidemment éviter les écueils ci-dessus. La famille qu'ils constituent doit d'autre part satisfaire à un certain nombre d'exigences techniques (cf. chapitre 2). Elle doit enfin être intelligible pour les différents acteurs que l'aide à la décision concerne et acceptée par eux comme base de travail. Lorsqu'il en est ainsi, elle peut constituer un instrument de communication à partir duquel se raisonnent, se transforment, s'argumentent les préférences.

Rien n'interdit cependant que, dans une étape ultérieure de la modélisation (cf. chapitre 4), les n critères d'une famille F soient agrégés en un seul plus complexe. Il importe de ne pas confondre cette dernière façon de faire (qui ne fait pas l'économie d'une famille de critères) avec l'analyse monocritère qui mélange et amalgame, très tôt dans l'analyse, ce qui est de l'ordre des conséquences reconnues par tous avec ce qui relève de leur traitement en vue de les réduire à une unité commune par une procédure comptable, inévitablement emprunte d'arbitraire et généralement influencée par un système de valeurs particulier.

La littérature "multicritère" a connu un extraordinaire accroissement depuis le début des années 1970 ¹. On a souvent cherché à expliquer ce développement (cf. Zeleny (1982) ou Schärli (1985)) en faisant remarquer que la réalité elle-même était multicritère et que toute décision impliquait de "peser le pour et le contre". Dans ce cadre, le "monocritère" n'apparaît que comme un cas limite et dégénéré du "multicritère". Sans nier toute valeur à cet argument, nous croyons cependant que la raison d'être de ce type d'aide à la décision est ailleurs ². Admettre ce point de vue reviendrait à nier toute utilité, pour aider à la décision, aux modèles "monocritères" : calcul économique, techniques classiques de la recherche opérationnelle ou de la gestion financière, etc. Ceux-ci ont pourtant fait, souvent, la preuve de leur efficacité ³. Adopter un modèle monocritère, ce n'est pas postuler que, "dans la réalité", un seul critère est à l'œuvre mais c'est, plus simplement, vouloir aider à la décision en n'exhibant explicitement qu'un seul critère. Au sein de ces modèles, la prise en compte de points de vue multiples s'effectue de diverses façons (même si c'est imparfaitement à notre sens) : conversion de toutes les conséquences dans une unité unique, analyses de sensibilité, utilisation de la dialectique subtile existant entre objectifs et contraintes, etc. Nous ne croyons pas, de plus, qu'en l'absence de tout critère permettant de définir un "bon" modèle d'aide à la décision, l'"imitation de la réalité" puisse fonder solidement une démarche d'aide à la décision ⁴. De fait, il y a

¹ On pourra consulter, pour s'en convaincre, les bibliographies de Zeleny (1982), Achilles et al. (1979), Siskos et al. (1983), Vincke (1989). On trouvera, à la fin de cet ouvrage, une bibliographie spécifique consacrée à des cas d'application des méthodes multicritères.

² C'est pourquoi nous employons l'expression "aide multicritère à la décision" de préférence à "aide à la décision multicritère".

³ On entend par là que leur mise en œuvre a permis, souvent, d'apporter une aide à la décision qui a convaincu.

⁴ En d'autres termes, ce n'est pas parce que les processus de décision sont perçus comme complexes et comme faisant intervenir de multiples dimensions qu'il est toujours nécessaire de reproduire cette "complexité" dans les modèles d'aide à la décision.

selon nous à la base de toute démarche d'aide multicritère à la décision, un "acte de foi" consistant à croire que bâtir explicitement plusieurs critères peut avoir un "rôle positif" dans le processus de modélisation. C'est cet axe de foi qui, à notre sens, permet d'entrer dans ce qu'on a pu appeler un "nouveau paradigme" pour l'aide à la décision ¹. Bien entendu, nombreux sont les arguments tendant à montrer que cet "acte de foi" n'est pas déraisonnable. Mais ces arguments ne sont pas des "preuves" et il est important de garder à l'esprit qu'ils sont uniquement des éléments permettant de se forger une conviction. L'aide multicritère à la décision n'est pas destinée à supplanter définitivement les approches monocritères. Elle constitue une autre façon de faire de l'aide à la décision qui, si elle semble échapper à certaines difficultés rencontrées avec une approche monocritère, soulève également des problèmes et des questions.

Parmi les arguments qui ont emporté notre conviction, mentionnons dès à présent :

a) Dans la plupart des processus de décision, aussi complexes et conflictuels soient-ils, il est souvent possible de mettre à jour un certain nombre d'"axes de signification" concrets, communs aux différents acteurs, autour desquels ils justifient, transforment et argumentent leurs préférences. Bâtir différents critères autour de ces axes de signification, c'est alors tenter de modéliser ce qui peut apparaître comme la partie stable de la perception du problème qu'ont ces acteurs ; c'est là le rôle de ce niveau intermédiaire (et parfois terminal) de modélisation que constitue l'élaboration du "tableau de performances" ² incluant, au contraire d'un critère unique, le moins possible de jugements dépendant d'un système de valeurs particulier et constituant donc souvent une base de dialogue irremplaçable entre acteurs.

b) Construire plusieurs critères permet à l'homme d'étude de gérer, au niveau de chaque axe de signification, les éléments

¹ Cf. Roy (1988a).

² Cf. 1.7 et glossaire.

d'incertitude, d'imprécision, de mauvaise définition affectant les "données" du problème ¹. On peut alors mettre en œuvre des techniques plus simples et efficaces que dans une approche monocritère pour gérer ces phénomènes et ainsi parvenir à une "carte" moins arbitraire, plus riche et néanmoins plus lisible d'un "territoire" complexe.

c) Construire plusieurs critères, c'est admettre qu'une décision sera inévitablement le résultat d'un compromis entre plusieurs objectifs conflictuels. Mais tous les acteurs n'ont pas la même vision de ce compromis. Un acteur particulier peut même avoir des difficultés à élaborer sa propre conviction parce que ses préférences sont mouvantes et/ou insuffisamment structurées. Ceci doit amener l'homme d'étude à changer d'attitude vis-à-vis de sa recommandation et ainsi lui permettre d'éviter certains écueils fréquemment rencontrés avec une approche monocritère. Etant condamné à travailler dans le cadre d'un problème "mal posé", il ne peut espérer emporter une conviction du fait de la sophistication des techniques de calcul qu'il utilise. Sa recommandation qui peut dès lors, comme on l'a vu, prendre d'autres formes que la simple recherche d'un optimum, n'acquerra de probance que s'il y a une réelle insertion dans le processus de décision. Le modèle est, dans ce cadre, un support à la réflexion, à la négociation, à la créativité ² tolérant les ambiguïtés, les hésitations et les retours en arrière.

Tels sont, selon nous, les principaux "avantages" à entrer dans un "paradigme multicritère" en matière d'aide à la décision. Nous ne concevons pas cette "nouvelle" aide à la décision comme permettant d'apporter une "réponse scientifique" à des "problèmes de société". Y recourir ne comporte d'ailleurs pas que des avantages. On peut notamment lui reprocher de procéder d'un schéma trop analytique pour pouvoir éclairer des grandes

¹ Voir Roy (1988b), Bouyssou (1989).

² Notons par exemple que recourir à une modélisation multicritère permet d'éviter d'éliminer arbitrairement des solutions possibles comme c'est par exemple le cas dans un modèle monocritère où certaines contraintes jouent le rôle d'objectifs déguisés.

décisions stratégiques ¹. Quitter le domaine des "problèmes mathématiquement bien posés", c'est aussi, souvent, prêter le flanc à des critiques ayant pour thème la "manipulation", le "manque d'objectivité", la "pseudo-scientificité", etc. De fait, il y a certainement, à la base d'une "bonne" aide multicritère à la décision, une part importante d'"art de la mise en œuvre" et d'"honnêteté intellectuelle" qui ne se laisse que difficilement enfermer dans le cadre d'un travail académique.

1.6.2 Définitions et techniques de construction ²

Formellement, un **critère** g est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble A des actions potentielles de telle sorte qu'il soit possible de raisonner ou de décrire le résultat de la comparaison de deux actions a et b à partir des deux nombres $g(a)$ et $g(b)$. De façon plus précise (cf. glossaire), un critère g est un modèle à partir duquel on reconnaît pouvoir fonder la proposition ³ :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow b S_g a \quad (\text{r.1.6.1})$$

où S_g est une relation binaire au contenu sémantique "au moins aussi bon que, relativement aux évaluations sur les seules dimensions prises en compte ⁴ dans la définition de g " (cf. glossaire). Au critère g est associée une **échelle** E_g , ensemble ordonné des valeurs a priori possibles que peut prendre g .

¹ Cf. Roy et Bouyssou (1988).

² Cf. MMCAD, 9.1 et 9.2.

³ le sens de l'inégalité étant purement conventionnel et non restrictif. Dans cet ouvrage, on supposera toujours, sauf mention contraire, que la préférence croît avec les valeurs des critères.

⁴ Ceci sous-entend la possibilité de pouvoir raisonner toutes choses égales par ailleurs sur l'axe de signification du critère. Nous reviendrons sur ce point au 2.4. Lorsqu'on s'intéressera à un critère g_i , on s'autorisera à noter la relation binaire associée S_i au lieu de S_g .

Lors de la construction d'un critère, l'homme d'étude doit chercher avant tout à faire en sorte que les acteurs du processus de décision reconnaissent le bien-fondé des comparaisons qui découlent de ce modèle. Ceci implique un certain nombre de conséquences importantes.

a) Les axes de signification autour desquels sont construits les critères doivent être compris et admis par tous les intervenants du processus de décision, même si ceux-ci divergent sur l'importance relative du rôle qu'ils souhaitent voir jouer à chacun d'entre eux. Ces axes de signification devront être suffisamment familiers à ces différents acteurs pour que ceux-ci acceptent de raisonner et de discuter sur cette base. Pouvoir associer à un axe de signification un critère s'exprimant dans une unité physique claire présente de nombreux avantages à cet égard.

b) Le procédé permettant de définir l'évaluation de chaque action sur le critère doit être compris et admis par tous les acteurs du processus de décision. La recherche d'un procédé simple et transparent doit donc être une préoccupation importante de l'homme d'étude. De plus, il convient d'éviter, autant que possible, d'inclure, dans la définition des critères, des éléments fortement liés à un système de valeurs particulier, éléments qui pourraient inciter certains acteurs à mettre en doute la probance des comparaisons effectuées sur la base du critère ainsi construit.

c) Le choix d'un critère doit se faire en prenant en compte la qualité des "données" de $\Gamma(A)$ utilisées pour parvenir à évaluer les diverses actions sur le critère. Lorsque celles-ci sont entachées d'imprécision, d'incertitude et/ou d'indétermination, la façon de construire le critère ne doit pas conduire à faire "dire" à ces données plus que ce qu'elles contiennent.

Il est bien difficile de présenter une méthodologie précise conduisant, sur la base de $\Gamma(A)$, à :

- choisir les axes de signification pertinents et
- construire un (ou plusieurs) critère(s) sur chacun de ces axes.

Le choix des axes de signification pertinents pour comparer les actions dépend fortement de la nature du problème considéré. On verra de plus, au chapitre 2, que ce choix est conditionné par certaines exigences techniques sur la famille de critères. Notons cependant que ce choix peut être utilement raisonné en :

- analysant les diverses dimensions de $\Gamma(A)$ et en les regroupant de façon judicieuse et/ou
- raisonnant de manière "hiérarchique" en décomposant, de manière progressive, un point de vue unique ("rentabilité sociale", "bien-être", etc.) en "sous-points de vue", eux-mêmes décomposés à leur tour et ainsi de suite ¹.

Le procédé permettant d'évaluer l'ensemble des actions sur un critère donné dépend de l'axe de signification de ce dernier ². Lorsque celui-ci recouvre une dimension i unique ³ sur laquelle toutes les actions sont évaluées de façon ponctuelle, on pourra poser $g(a) = \gamma_i(a)$, $\forall a \in A$. Lorsque l'on est confronté à des évaluations non ponctuelles sur une dimension unique, une technique classique pour bâtir un critère consiste à tenter de résumer cette distribution par un nombre unique ; on parle alors de "**ponctualisation**". Lorsque l'indicateur de modulation δ_i^a sur cette dimension possède de "bonnes propriétés de cardinalité", une façon simple d'obtenir ce nombre consiste à réaliser une moyenne pondérée du type :

$$g(a) = \sum_{e \in E_i} f(e) \cdot \delta_i^a(e). \quad (r.1.6.2)$$

¹ Cette dernière façon de faire est traditionnelle chez les tenants de la théorie de l'utilité, cf. Keeney et Raiffa (1976) et Keeney (1988).

² Sur ces questions, nous renvoyons à MMCAD, chapitre 9 et à Bouyssou (1990).

³ On peut toujours supposer que l'échelle E_i associée à cette dimension est incluse dans $\mathbb{R}$ moyennant un éventuel codage (voir glossaire) des divers échelons respectant l'ordre de préférence sous-jacent.

On constatera facilement que les techniques classiques de l'actualisation de flux financiers (cas d'une conséquence dispersée dans le temps) ou de l'utilité espérée (cf. 4.5, cas d'une dispersion probabiliste ; dans ce dernier cas, la fonction f vise à prendre en compte des phénomènes liés au goût ou à l'aversion pour le risque) sont des cas particuliers de (r.1.6.2).

Soit parce qu'il apparaît difficile de définir la fonction f , soit parce que l'on ne souhaite pas résumer un ensemble d'informations complexes par un nombre unique, on peut renoncer à utiliser un critère de ponctualisation et résumer une évaluation distributionnelle en utilisant plusieurs critères. On parle alors d'"**éclatement**" de la dimension. Lorsque la distribution est de nature probabiliste, on peut, par exemple, envisager de recourir à deux critères : un indicateur de tendance centrale (espérance mathématique mais aussi médiane ou mode) et un indicateur complémentaire concernant la dispersion de la distribution (variance ou écart-type, semi-variance, intervalle inter-quartile, probabilité de ruine, probabilité de ne pas atteindre un certain niveau ¹).

Un autre procédé consiste à considérer que la source de l'évaluation distributionnelle tient à l'existence de plusieurs scénarii et à bâtir un critère par scénario, repoussant à une phase ultérieure de l'étude le problème de leur éventuelle agrégation ².

Lorsque l'on cherche à bâtir un critère prenant en compte plusieurs dimensions du modèle $\Gamma(A)$, on parle alors de sous-agrégation.

Ce faisant, il importe de garder à l'esprit que le résultat de cette sous-agrégation devra être accepté par tous, être suffisamment transparent pour pouvoir être interprété et discuté facilement. C'est dire qu'une telle sous-agrégation devra concerner un sous-ensemble de dimensions de taille relativement restreinte afin de garder une certaine simplicité au modèle. De plus, ces dimensions

¹ Voir par exemple Colson et Zeleny (1980) et Fishburn (1977b).

² Voir par exemple Teghem et Kunsch (1985).

devront être "suffisamment proches" les unes des autres pour que leur agrégation ne nécessite pas l'introduction de paramètres prêtant à contestation.

A priori, on peut utiliser, pour bâtir un tel critère, toute méthode d'agrégation conduisant à l'établissement d'un critère unique de synthèse (cf. chapitre 4). Cependant, compte tenu de la proximité des diverses conséquences et de l'exigence de transparence du modèle, on retient généralement, pour ce faire, des méthodes relativement simples : technique lexicographique, somme pondérée, somme des rangs, etc. ou une combinaison ad-hoc de ces méthodes (cf. 3.2).

1.6.3 Pouvoir discriminant d'un critère ¹

En raison du contenu sémantique de la relation S_g , la proposition $b S_g a$ recouvre des situations allant de l'indifférence ($b I_g a$) à la préférence stricte ($b P_g a$). Pour les séparer, le modèle le plus classique revient à supposer que, pour tout $a, b \in A$:

$$\left. \begin{array}{l} a P_g b \Leftrightarrow g(a) > g(b) \text{ et } \\ a I_g b \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{array} \right\} \quad (\text{r.1.6.3})$$

où P_g (resp. I_g) est une relation binaire au contenu sémantique "est strictement préférée (resp. indifférente) à, relativement aux seules conséquences prises en compte dans la définition de g ". On parle alors de "**vrai-critère**". Le s.r.p. (I_g, P_g) est alors un préordre complet. Dans ce type de modèle, toute différence, aussi faible soit-elle, est révélatrice d'une situation de préférence stricte. Or, les évaluations $g(a)$ et $g(b)$ sont obtenues d'une façon qui n'est pas toujours exempte d'arbitraire à partir des données de $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ souvent entachées d'imprécision, d'incertitude et/ou de mauvaise détermination. Le modèle du vrai-critère peut donc parfois conduire à des situations préférentielles peu probantes. De fait, il est souvent raisonnable d'admettre que de "petits" écarts $g(a) - g(b)$ traduisent également une indifférence entre a et b . Un

¹ Cf. MMCAD, 9.3.

tel mode de comparaison revient à considérer que, lorsque $g(a) \geq g(b)$:

$$\left. \begin{aligned} a P_g b &\Leftrightarrow g(a) - g(b) > q(g(b)) \\ a I_g b &\Leftrightarrow g(a) - g(b) \leq q(g(b)) \end{aligned} \right\} \quad (r.1.6.4)$$

où $q(g(\cdot))$ est un **seuil** dit **d'indifférence** représentant le plus grand écart $g(a) - g(b)$ compatible avec une situation d'indifférence entre a et b . Pour des raisons de cohérence, cette fonction-seuil doit être telle que la fonction $g(a) + q(g(a))$ soit monotone non décroissante en $g(a)$. On parle alors de "**quasi-critère**" et le s.r.p. (I_g, P_g) est alors un quasi-ordre.

Dans le modèle du quasi-critère, tout écart légèrement supérieur au seuil d'indifférence est révélateur d'une situation de préférence stricte, ce qui peut paraître discutable dans certaines situations. Pour éviter un tel passage brusque de l'indifférence à la préférence stricte, il est commode d'introduire un modèle à deux seuils laissant place à une zone de préférence faible (Q_g) traduisant une hésitation entre l'indifférence (I_g) et la préférence stricte (P_g). C'est le modèle du **pseudo-critère** dans lequel, lorsque $g(a) \geq g(b)$, on a :

$$\left. \begin{aligned} a P_g b &\Leftrightarrow g(a) - g(b) > p(g(b)), \\ a Q_g b &\Leftrightarrow q(g(b)) < g(a) - g(b) \leq p(g(b)), \\ a I_g b &\Leftrightarrow g(a) - g(b) \leq q(g(b)), \end{aligned} \right\} \quad (r.1.6.5)$$

le **seuil d'indifférence** $q(g(\cdot))$ et le **seuil de préférence** $p(g(\cdot))$ vérifiant tous deux la condition de cohérence introduite pour le seuil d'indifférence du quasi-critère (cf. glossaire). Avec le modèle du pseudo-critère, le s.r.p. (I_g, Q_g, P_g) est un pseudo-ordre.

On vérifiera sans peine qu'un quasi-critère est un pseudo-critère tel que $q(g(a)) = p(g(a))$, $\forall a \in A$ et qu'un vrai-critère est un pseudo-critère tel que $q(g(a)) = p(g(a)) = 0$, $\forall a \in A$.

Avec le modèle du pseudo-critère, donner une valeur aux deux seuils n'est pas toujours une tâche aisée ¹. Notons néanmoins que, dans bien des situations, toute valeur raisonnable non nulle pour p et q conduit à un modèle de préférence qui semble plus probant que celui qui aurait été obtenu en les considérant comme nuls, ce qui est, de fait, le cas dans le modèle du vrai-critère. Le fait qu'un tel manque de probance puisse être "tempéré" par des analyses de sensibilité ou de robustesse ne doit cependant pas faire oublier qu'un critère ne peut jouer pleinement son rôle que si les comparaisons entre actions potentielles qui en découlent ne soulèvent pas de contestations importantes. On voit alors tout l'intérêt que peut présenter, dans certaines situations, le modèle du pseudo-critère, la faible probance des comparaisons effectuées à l'aide du modèle du vrai-critère pouvant amener certains acteurs à rejeter en bloc la famille de critères. Remarquons de plus que l'utilisation de critères munis de seuils a une importance cruciale si l'on souhaite utiliser par la suite une méthode d'agrégation de ces critères de type ELECTRE (cf. chapitre 5).

Illustrons, sur un cas simple que nous rencontrerons aux chapitres 8 et 9, comment on peut donner une valeur aux seuils de préférence et d'indifférence dans le modèle du pseudo-critère. Considérons un critère prenant en compte une unique dimension sur laquelle chaque action $a \in A$ est repérée par ² une évaluation la plus probable $c(a)$, une évaluation par excès $c^+(a)$ et une évaluation par défaut $c^-(a)$, cas où chaque évaluation est entourée d'une marge de dispersion qui n'est pas forcément symétrique (que l'on songe à l'imprécision entourant un devis par exemple). Dans cette situation, il semble raisonnable de définir le critère en posant $g(a) = c(a)$.

¹ Sur ce point, nous renvoyons à MMCAD, 9.3 et à Bouyssou et Roy (1987).

² Dans le formalisme introduit plus haut, ceci peut s'interpréter :

$$\gamma_i(a) = [c^-(a) ; c^+(a)] \text{ et}$$

$$\delta_i^+(e) = 1 \quad \text{si } e \in \gamma_i(a) \text{ et } e \neq c(a),$$

$$k > 1 \text{ si } e = c(a),$$

$$0 \quad \text{si } e \notin \gamma_i(a).$$

Ceci peut s'interpréter également comme un indicateur d'état ponctuel ($\gamma_i = c$) avec deux seuils de dispersion : $c - c^-$ et $c^+ - c$.

Faute d'informations supplémentaires, on ne peut cependant pas considérer qu'une différence faible entre $g(a)$ et $g(b)$ traduit une préférence stricte. Une façon naturelle de procéder revient à considérer qu'il y a une préférence stricte de a sur b seulement si $c^-(a) > c^+(b)$, cas où les deux **intervalles de dispersion** sont disjoints. Si l'on fait croître $c(b)$, les deux intervalles vont se chevaucher progressivement. Il est raisonnable¹ d'admettre que ce chevauchement traduit une indifférence dès lors que l'évaluation la plus probable de chaque action est comprise dans l'intervalle de dispersion de l'autre action. La situation intermédiaire correspond alors à une zone d'hésitation que l'on peut interpréter comme une préférence faible.

On peut montrer (cf. MMCAD, 9.3) que, dès lors que les écarts $c^-(a) - c(a)$ et $c^+(a) - c(a)$ ne dépendent de l'action a qu'au travers de $c(a)$ (on parle alors de "seuils de dispersion intrinsèques"), le mode de comparaison que nous venons de présenter peut être modélisé à l'aide d'un pseudo-critère. Il pourra être intéressant pour le lecteur de vérifier que si, pour toute action $a \in A$, on a :

$$c^-(a) = c(a) - (\alpha' + \beta' \cdot c(a)) \text{ et } c^+(a) = c(a) + (\alpha + \beta \cdot c(a)),$$

alors ce mode de comparaison aboutit à définir un pseudo-critère tel que, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} g(a) &= c(a), \\ p(g(a)) &= [\alpha + \alpha' + (\beta + \beta') \cdot g(a)] / (1 - \beta'), \\ q(g(a)) &= \min[\alpha + \beta \cdot g(a) ; (\alpha' + \beta' \cdot g(a)) / (1 - \beta')]. \end{aligned} \quad (r.1.6.6)$$

1.6.4 Graduations

Notons que rien dans la définition d'un critère (ou même d'un pseudo-critère ou d'un vrai-critère) n'implique que les écarts entre performances soient pertinents pour comparer des écarts de préférence (ou mutations, cf. 1.4.3). Dans certaines situations, on peut avoir intérêt (cf. 4.4) à manipuler des critères où tel est le cas. On dira qu'un critère est une graduation lorsque :

¹ Mais on peut envisager d'autres conventions (cf. Siskos et Hubert (1983)).

$$g(a) - g(b) \geq g(c) - g(d) \Rightarrow (g(a) \ominus g(b)) S_g^* (g(c) \ominus g(d)), \quad (r.1.6.7)$$

S_g^* étant une relation binaire entre écarts de préférence au contenu sémantique "correspond à un écart de préférence au moins aussi grand que sur les dimensions prises en compte dans la définition du critère g ".

On peut vouloir comparer, de façon plus fine encore, les écarts de préférence que ce qui est fait avec (r.1.6.7), par exemple en imposant que :

$$\left. \begin{aligned} g(a) - g(b) > g(c) - g(d) &\Leftrightarrow (g(a) \ominus g(b)) P_g^* (g(c) \ominus g(d)) \\ g(a) - g(b) = g(c) - g(d) &\Leftrightarrow (g(a) \ominus g(b)) I_g^* (g(c) \ominus g(d)) \end{aligned} \right\} \quad (r.1.6.8)$$

ou encore que les rapports $[g(a) - g(b)]/[g(c) - g(d)]$ sont eux-mêmes significatifs en termes de rapports entre écarts de préférences ¹.

1.7 AGRÉGATION DES PERFORMANCES ET ÉLABORATION DE LA RECOMMANDATION

Lorsque :

- les actions potentielles ont été conçues dans une conception globalisée,
- l'ensemble A des actions potentielles peut être considéré comme stable et
- l'analyse des conséquences des actions a conduit à la construction d'un seul critère,

on peut, dans le cadre d'une problématique α , vouloir résoudre le problème :

chercher $a^* \in A$ telle que $g(a^*) = \underset{a \in A}{\text{Max}} g(a)$.

On parle alors d'**optimisation**. Lorsque A est fini et comporte peu d'actions, la résolution de ce problème est triviale. Il en va tout différemment lorsque A est infini (par exemple lorsque A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$) ou lorsque le cardinal de A interdit toute recherche d'un optimum par simple énumération (cas des problèmes dits combinatoires). Il faut alors recourir à des

¹ Sur ces questions, on pourra se reporter à MMCAD, 9.4.

techniques spécifiques (programmation linéaire, non linéaire, dynamique, théorie des graphes) qui font partie de ce que l'on a coutume d'appeler la Recherche Opérationnelle.

Dans le cas, fréquent, où l'analyse des conséquences des actions potentielles a conduit à construire plusieurs critères, l'aide à la décision ne peut plus se formuler aussi simplement. C'est l'objet du présent ouvrage.

Il est commode, avec plusieurs critères, de résumer le résultat de l'analyse des conséquences dans un **tableau de performances** (cf. glossaire) comme indiqué au tableau 1.7.1.

Au chapitre 2, on s'interrogera sur les propriétés qu'il faut donner à la famille de critères pour qu'elle puisse pleinement jouer son rôle en matière d'aide à la décision. Ceci nous conduira à définir le concept de "famille cohérente de critères". On s'interrogera de plus sur un certain nombre de propriétés permettant à la famille d'être facilement manipulable.

Tableau 1.7.1 : Tableau des performances

Critères	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
Seuils	p_1 q_1	p_2 q_2	...	p_j q_j	...	p_n q_n
Actions						
a_1				.		
a_2				.		
.				.		
.				.		
a_i				$g_j(a_i)$		
.						
.						
a_m						

Sur la base d'un tableau des performances correspondant à une famille cohérente de critères, le problème consiste à savoir sur la base de quels raisonnements, calculs, déductions on peut

affirmer : "l'action a est au moins aussi bonne que l'action b" en prenant en compte tous les critères figurant dans ce tableau. C'est ce que l'on appelle le **problème de l'agrégation des performances** (voir glossaire).

Ce problème fait l'objet du chapitre 3. On y présente divers raisonnements visant à bâtir une préférence globale, c'est-à-dire une préférence prenant en compte l'ensemble des critères de la famille. On y introduit le concept fondamental de Procédure d'Agrégation Multicritère. Ces procédures d'agrégation visent à enrichir la relation de dominance Δ_F définie, pour une famille¹ de critères $F = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, par :

$$a \Delta_F b \Leftrightarrow g_i(a) \geq g_i(b), \forall i \in F. \quad (r.1.7.1)$$

Elles s'insèrent dans l'une ou l'autre des trois approches opérationnelles (cf. glossaire) pour l'agrégation des performances présentées au tableau 1.7.2.

Que l'on ait recours à l'une ou l'autre de ces approches opérationnelles, on peut élaborer le (ou les) modèle(s) d'aide à la décision de diverses façons. Rappelons ici une distinction, sur laquelle nous reviendrons, qui est souvent éclairante. Celle-ci conduit à distinguer deux démarches dans l'élaboration d'un modèle d'aide à la décision :

– Une démarche descriptive dans laquelle le modèle d'aide à la décision est élaboré en faisant l'hypothèse qu'il existe, dans l'esprit des intervenants pour qui s'exerce l'aide, un système de préférences qu'il s'agit d'appréhender de la manière la plus fidèle possible, sans le perturber. C'est cette description d'un système de préférences, souvent réalisée au moyen d'une représentation numérique, qui conduit alors à l'établissement d'une recommandation. Ce système de préférences peut n'exister qu'à l'état latent. On suppose néanmoins dans cette démarche que, par application d'un certain nombre de principes de rationalité véhiculés par le modèle, la description du système de valeurs des intervenants

¹ Dans la suite, on écrira indifféremment $g_j \in F$ ou $j \in F$.

permet d'inférer sans ambiguïté¹ la façon dont deux actions quelconques se comparent en termes de préférence.

— Une démarche constructive dans laquelle on considère que les préférences des intervenants sont souvent conflictuelles, peu structurées, appelées à évoluer au sein du processus de décision et influencées du fait même de la mise en oeuvre du modèle. Le modèle d'aide à la décision est alors élaboré en cherchant à tirer parti de ce qui semble être la partie stable de la perception du problème qu'ont ces acteurs. Sur cette base, le modèle vise à leur fournir des concepts, des modes de représentation et de raisonnement leur permettant d'enrichir leur perception. Il peut apparaître comme une hypothèse de travail, un moyen de raisonner, d'argumenter ou de communiquer et non plus comme un simple emprunt passif à une réalité vue comme une donnée extérieure. La recommandation est conçue dans cet esprit. Cette démarche ne vise pas à toujours élaborer un système de préférences au sein duquel on puisse comparer deux actions sans ambiguïté. Les modèles qui en découlent tolèrent les hésitations et les incomparabilités.

Les modèles et procédures relevant de AO1 seront présentés au chapitre 4. Ceux relevant de AO2 seront introduits au chapitre 5. Comme on l'a dit, ils conduisent à des s.r.p. acceptant l'incomparabilité et n'ayant pas nécessairement des propriétés remarquables de transitivité. Tirer parti, dans une problématique donnée, de cette information demande donc la mise en oeuvre de techniques spécifiques qui font l'objet du chapitre 6. Les méthodes relevant de AO3 sont ensuite présentées au chapitre 7. Les chapitres 8, 9 et 10 sont consacrés à la présentation de cas réels d'aide multicritère à la décision.

¹ C'est dire que l'on suppose généralement que le système de préférences qu'il s'agit de décrire exclut l'incomparabilité et a des propriétés remarquables de transitivité. Dans cette démarche, la recommandation laisse souvent place à une prescription.

Tableau 1.7.2 : Trois approches opérationnelles pour l'agrégation des performances

AO1 - Critère unique de synthèse (chapitre 4)

Cette approche consiste à prendre appui sur une règle apportant une réponse synthétique exhaustive et définitive au problème de l'agrégation des performances. Elle prend la forme d'un critère unique de synthèse agrégeant les n critères de la famille par le biais d'une fonction d'agrégation V en posant :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)).$$

Elle conduit donc à des s.r.p. ayant des propriétés remarquables de transitivité et excluant l'incomparabilité (préordre complet, quasi-ordre, pseudo-ordre).

A02 - Surclassement de synthèse (chapitres 5 et 6)

Cette approche consiste à prendre appui sur une règle apportant une réponse synthétique, exhaustive et définitive au problème de l'agrégation des performances. Elle prend la forme d'un ensemble de conditions conduisant à accepter ou à rejeter un surclassement au niveau global. Cette approche vise à caractériser les surclassements qu'il est possible d'établir de façon suffisamment solide. Elle conduit à des s.r.p. acceptant l'incomparabilité et n'ayant pas nécessairement des propriétés remarquables de transitivité.

AO3 - Jugement local interactif avec itérations essais-erreurs (chapitre 7)

Dans cette approche, il n'est pas question de chercher à expliciter une règle apportant une réponse synthétique exhaustive et définitive au problème de l'agrégation des performances. L'agrégation ne procède plus de l'explicitation d'une règle, même partielle ou provisoire, mais d'une séquence de jugements ad hoc que formule le décideur ou d'autres acteurs. Les jugements émis n'ont qu'une portée locale en ce sens qu'ils ne mettent en jeu soit qu'une seule action et son voisinage dans l'espace des performances, soit un très petit nombre d'actions qu'il paraît judicieux et pertinent de chercher à comparer parce qu'elles sont voisines.

GLOSSAIRE ¹ :**QUELQUES DÉFINITIONS STRUCTURANTES**

ACTEUR : Un individu ou un groupe d'individus est **acteur** d'un processus de décision si, par son système de valeurs, que ce soit au premier degré du fait des intentions de cet individu ou groupe d'individus ou au second degré par la manière dont il fait intervenir ceux d'autres individus, il influence directement ou indirectement la décision. De plus, pour qu'un groupe d'individus soit identifié comme un seul et même acteur, il faut que, relativement au processus, les systèmes de valeurs, systèmes informationnels et réseaux relationnels des divers membres du groupe n'aient pas à être différenciés.

ACTION : Une **action** "a" est la représentation d'une éventuelle contribution à la décision globale susceptible, eu égard à l'état d'avancement du processus de décision, d'être envisagée de façon autonome et de servir de point d'application à l'aide à la décision (ce point d'application pouvant suffire à caractériser "a").

ACTION GLOBALE ET ACTION FRAGMENTAIRE : Une **action** est dite **globale** si, dans sa mise à exécution, elle est exclusive de toute autre action introduite dans le modèle ; dans le cas contraire, elle est dite **fragmentaire**.

ACTION POTENTIELLE : Une **action potentielle** est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par un acteur au moins ; l'ensemble des actions potentielles sur lequel l'aide à la décision prend appui au cours d'une phase d'étude est noté A.

APPROCHE OPÉRATIONNELLE : L'approche opérationnelle consiste en l'ensemble des options prises concernant les deux plans suivants :

¹ Les définitions qui suivent sont, pour l'essentiel, extraites de MMCAD.

- plan formel : type de relations de préférences acceptées par le modèle, logique d'agrégation, liens avec les représentations fonctionnelles des différents critères, ...
- plan informationnel : nature des informations inter-critères requises, mode d'obtention, procédure de validation ou de remise à jour, ...

CODAGE D'UNE ÉCHELLE : Soit E_i un ensemble doté d'un ordre complet noté $>^i$. Nous appellerons **codage** de l'échelle E_i toute fonction χ à valeurs réelles définie sur E_i telle que, $\forall e', e \in E_i$:

$$e >^i e' \Leftrightarrow \chi(e) > \chi(e').$$

CONSÉQUENCE : Tout effet ou tout attribut de l'action a susceptible d'interférer avec les objectifs ou avec le système de valeurs d'un acteur du processus de décision en tant qu'élément primaire à partir duquel il élabore, justifie ou transforme ses préférences est appelé une **conséquence** de a.

CONSÉQUENCE ÉLÉMENTAIRE : Une **conséquence élémentaire** c est un effet ou un attribut reconnu comme étant une conséquence jouissant des deux propriétés suivantes :

- 1°) Elle est suffisamment bien identifiée dans son contenu pour que les différents acteurs en comprennent la signification.
- 2°) Elle est suffisamment bien perçue pour permettre une description précise de ce par quoi elle se manifeste concrètement après la mise à exécution de l'action potentielle a. On admet que cette description peut se faire en termes d'état(s) associé(s) à la conséquence c.

CRITÈRE : Une fonction g à valeurs réelles définie sur A est, pour un acteur Z, une **fonction-critère** ou un **critère** appréhendant le sous-nuage des conséquences $v_g(A)$ si :

- 1°) Le nombre $g(a)$ est déterminé si et seulement si une évaluation $\Gamma_g(a)$ de $v_g(a)$ est disponible ; le modèle $\Gamma_g(A)$ qui fournit cette évaluation est appelé support de la fonction-critère g .
- 2°) L'acteur Z (ou l'homme d'étude jugeant au nom de Z) reconnaît l'existence d'un axe de signification sur lequel deux

actions potentielles quelconques a et a' peuvent être comparées relativement aux seuls aspects des conséquences que recouvre $v_g(A)$ et il accepte de modéliser cette comparaison conformément à :

$$g(a') \geq g(a) \Rightarrow a' S_g a,$$

S_g désignant une relation de surclassement restreint à l'axe de signification du critère g (faisant en particulier abstraction de tous les aspects des conséquences non modélisées dans le support de g).

CRITÈRE GRADUABLE : L'axe de signification d'un critère g (ou, par abus de langage, le critère g) est dit **gradable** relativement à A lorsqu'il existe un codage χ défini sur $g(A)$ avec lequel $v(g)$ est une graduation.

CRITÈRE MESURABLE ET MESURE : Nous dirons qu'une exigence rend l'axe de signification d'un critère g **mesurable** s'il est graduable et si les graduations conformes à cette exigence sont déterminées à une transformation affine près. Toute graduation conforme à une exigence rendant l'axe de signification d'un critère g mesurable sera appelée **mesure**.

DIMENSION : Une **dimension de préférence** est une conséquence élémentaire c telle que l'ensemble E_c des états qui lui est associé soit (dans la phase d'étude considérée) doté d'un préordre complet qui en fait une échelle.

ÉCHELLE DE PRÉFÉRENCE : Une **échelle de préférence** E est un ensemble d'états qui sont rangés selon un préordre complet noté $\geq$ jouissant de la propriété suivante : raisonnant sur deux actions idéales a, a' dont la comparaison correspond très exactement à celle de deux états e et e' de E , tout acteur Z admet :

- la situation d'indifférence $a I a'$ lorsque e et e' sont ex æquo dans le préordre ($e = e'$) ;
- la situation de préférence $a \succ a'$ lorsque e précède e' dans le préordre ($e > e'$).

On appelle **échelon** de E toute classe d'équivalence du préordre ; l'échelle peut être assimilée à l'ensemble de ces échelons. Elle est dotée de l'ordre complet $>$.

ÉTAT D'AVANCEMENT D'UN PROCESSUS DE DÉCISION : L'état d'avancement d'un processus est l'ensemble des éléments factuels et des conditions de travail caractéristiques de la situation créée par le déroulement du processus. Ces éléments et ces conditions résument l'histoire antérieure dans tout ce qu'elle impose comme données ou comme contraintes (du fait des décisions partielles et des hypothèses préalables) qui affectent fortement l'exécution du travail d'étude sans qu'elles aient normalement à être remises en cause par ce dernier.

GRADUATION : Relativement à un ensemble A , une fonction-critère g est une **graduation** si et seulement si la fonction $g^*(a' \ominus a) = g(a') - g(a)$ peut être regardée comme un critère sur $^1 g(A) \times g(A)$ pertinent pour comparer des écarts de préférences selon l'axe de signification de g , ce qui équivaut à dire que :

$$g(a') - g(a) \geq g(b') - g(b) \Leftrightarrow [g(a) \ominus g(a')] S_g^* [g(b) \ominus g(b')].$$

INDICATEUR DE DISPERSION MODULÉE ² : Par **indicateur de dispersion modulée** ou de **modulation**, on désigne une fonction à valeurs non négatives $\delta_i^a(e)$ définie sur une partie de l'échelle E_i caractéristique de l'action a , conformément aux conditions suivantes :

$$1^\circ) e \in \gamma_i(a) \Rightarrow \delta_i^a(e) > 0.$$

2°) $\delta_i^a(e) = \delta_i^{a'}(e') \Leftrightarrow$ l'homme d'étude accorde une importance ou une vraisemblance comparable aux échelons e et e' pour évaluer les conséquences respectives de a et de a' sur la dimension i .

¹ Rappelons que $g(A) = \{g(a) : a \in A\}$.

² D'autres types d'indicateurs de dispersion sont concevables ; voir MMCAD, 8.2.4.

3°) $\delta_i^a(e) < \delta_i^{a'}(e') \Leftrightarrow$ l'homme d'étude accorde une importance ou une vraisemblance moindre à l'échelon e qu'à l'échelon e' pour évaluer les conséquences respectives de a et de a' sur la dimension i .

INDICATEUR D'ÉTAT : Etant donné une dimension c , l'**indicateur d'état** γ_c est la procédure, la règle, la technique ou le procédé qui sert à apprécier le ou les échelons $\gamma_c(a)$ contenant celui (éventuellement ceux) des états de E_c qui, selon toute vraisemblance, se réalisera (ou se réaliseront) si l'action a est mise à exécution. Cet indicateur d'état est dit ponctuel si $\gamma_c(a)$ se réduit à un unique échelon de E_c , quelle que soit l'action potentielle a ; dans le cas contraire, γ_c est dit non ponctuel.

MODÈLE : Un **modèle** est un schéma ¹ qui, pour un champ de questions, est pris comme représentation d'une classe de phénomènes plus ou moins habilement dégagés de leur contexte par un observateur ² pour servir de support à l'investigation et/ou à la communication.

MODÈLE D'ÉVALUATION D'UNE ACTION : Donnée des indicateurs d'état et de dispersion sur les $\bar{n}$ dimensions du spectre des conséquences visant à modéliser le nuage des conséquences $v(a)$. On a :

$$\Gamma(a) = \{(\gamma_i(a) ; \delta_i^a) ; i = 1, 2, \dots, \bar{n}\}^3.$$

¹ Description mentale (intériorisée) ou figurée (diagrammes, formules mathématiques, ...) généralement réduite aux traits essentiels et ayant un caractère symbolique.

² Certains aspects (souvent implicites) des relations entre l'observateur et le système observé (classe de phénomènes $\times$ champ de questions) sont indissociables du modèle, ce dernier les représente donc, tout autant qu'il représente le système ; celui qui prend le modèle comme représentation de la classe de phénomènes pour le champ de questions doit en être conscient.

³ On note $\Gamma(A)$ le modèle d'évaluation de l'ensemble des actions de A . Une partie de ce modèle, destinée à modéliser un sous-nuage de conséquences $v_g(A)$, sera notée $\Gamma_g(A)$.

NUAGE DES CONSÉQUENCES : $v(a)$ ensemble des conséquences perçues de a ¹.

PROBLÉMATIQUE DU CHOIX : La problématique du choix

P. α consiste à poser le problème en termes de choix d'une seule "meilleure" action, c'est-à-dire à orienter l'investigation vers la mise en évidence d'un sous-ensemble A' de A aussi restreint que possible, conçu pour éclairer directement le décideur sur ce que doit être l'issue du prochain temps fort et ce compte-tenu du caractère éventuellement révisable et/ou transitoire de A ; cette problématique prépare une forme de recommandation ou de simple participation visant :

- soit à indiquer avec un maximum de précision et de rigueur une décision à préconiser ;
- soit à proposer l'adoption d'une méthodologie fondée sur une procédure de sélection (d'une meilleure action) convenant à une éventuelle utilisation répétitive et/ou automatisée.

PROBLÉMATIQUE DE LA DESCRIPTION : La problématique

de la description P. δ consiste à poser le problème en termes limités à une description des actions de A et/ou de leurs conséquences, c'est-à-dire à orienter l'investigation vers la mise en évidence d'informations relatives aux actions potentielles conçues en vue d'aider directement le décideur à les découvrir, à les comprendre, à les jauger et ce compte-tenu du caractère révisable et/ou transitoire de A ; cette problématique prépare une forme de recommandation ou de simple participation visant :

- soit à présenter une description systématique et formalisée des actions et de leurs conséquences qualitatives ou quantitatives ;
- soit à proposer l'adoption d'une méthodologie fondée sur une procédure cognitive convenant à une éventuelle utilisation répétitive et/ou automatisée.

PROBLÉMATIQUE DU RANGEMENT : La problématique

du rangement P. γ consiste à poser le problème en termes de rangement des actions de A ou de certaines d'entre elles, c'est-

¹ On note $v(A)$ l'ensemble des conséquences des actions potentielles de A .

à-dire à orienter l'investigation vers la mise en évidence d'un classement défini sur un sous-ensemble de A conçu en vue de discriminer les actions se présentant comme "suffisamment satisfaisantes" en fonction d'un modèle de préférences et ce compte-tenu du caractère révisable et/ou transitoire de A ; cette problématique prépare une forme de recommandation ou de simple participation visant :

- soit à indiquer un ordre partiel ou complet portant sur des classes regroupant des actions jugées équivalentes ;
- soit à proposer l'adoption d'une méthodologie fondée sur une procédure de classement (de tout ou partie de A) convenant à une éventuelle utilisation répétitive et/ou automatisée.

PROBLÉMATIQUE DU TRI : La problématique du tri $P.\beta$ consiste à poser le problème en termes de tri des actions par catégories, celles-ci étant conçues relativement à la suite à donner aux actions qu'elles sont destinées à recevoir, c'est-à-dire à orienter l'investigation vers la mise en évidence d'une affectation des actions de A à ces catégories en fonction de normes portant sur la valeur intrinsèque de ces actions et ce compte-tenu du caractère révisable et/ou transitoire de A ; cette problématique prépare une forme de recommandation ou de simple participation visant :

- soit à préconiser l'acceptation ou le rejet pour certaines actions, d'autres pouvant donner lieu à des recommandations plus complexes compte-tenu de la conception des catégories ;
- soit à proposer l'adoption d'une méthodologie fondée sur une procédure d'affectation à des catégories de toutes les actions convenant à une éventuelle utilisation répétitive et/ou automatisée.

PROBLÈME DE L'AGRÉGATION DES PERFORMANCES :

Sur la base de quelles informations inter-critères et par quelles règles convient-il d'associer, à un couple de vecteurs-performances ¹ ($g(a)$, $g(b)$), une et une seule des situations fondamentales ou regroupées de préférences ? En particulier, dans quels cas

¹ On notera $g(a)$ le vecteur ($g_1(a)$, $g_2(a)$, ..., $g_n(a)$) des performances de a sur la famille de critères considérée.

est-il justifié (compte-tenu notamment des seuils, des informations inter-critères disponibles, ...) :

- d'introduire un surclassement, une indifférence alors qu'il n'y a pas dominance ;
- de transformer une dominance en préférence stricte, préférence faible, indifférence, ... ;
- d'élaborer des informations inter-critères plus complètes, plus précises visant à réduire les situations d'incomparabilité, à mieux interpréter les situations de dominance ?

PROPRIÉTÉS DE L'ENSEMBLE DES ACTIONS POTENTIELLES : L'ensemble A est dit :

- **stable** si les deux conditions de stabilité interne ¹ et externe ² sont supposées remplies ;
- **évolutif** s'il n'est pas stable ;
- **imposé** si la condition de stabilité interne est supposée remplie ;
- **révisable** s'il n'est pas imposé ;
- **permanent** si la condition de stabilité externe est remplie ;
- **transitoire** s'il n'est pas permanent.

PSEUDO-CRITÈRE : On appelle pseudo-critère une fonction-critère g à laquelle se trouvent associées deux fonctions-seuils $q_g(g(a))$ et $p_g(g(a))$ vérifiant :

¹ Stabilité interne : La phase d'étude, compte-tenu de sa conception interne, n'est pas de nature, dans son déroulement prévisible, à remettre en cause (sauf peut-être de façon mineure ou marginale) la définition initiale de A ; de ce fait, la méthodologie d'aide à la décision prend appui sur un ensemble A considéré comme imposé a priori ; elle n'a donc pas à prendre en compte d'éventuelles révisions de A qu'elle susciterait.

² Stabilité externe : La recommandation qui doit résulter de la phase d'étude met en jeu un ensemble A qui, compte-tenu du contexte extérieur, jouit normalement d'une certaine permanence (soumis tout au plus à des changements mineurs ou marginaux) ; de ce fait, la méthodologie d'aide à la décision peut prendre appui sur un ensemble A susceptible d'une définition exhaustive durable ; elle n'a donc pas à prendre en compte un éventuel caractère transitoire de A.

$\forall a, b \in A, [q_g(g(a)) - q_g(g(b))]/[g(a) - g(b)] \geq -1$ et $[p_g(g(a)) - p_g(g(b))]/[g(a) - g(b)] \geq -1$ et telles que, $\forall a, a' \in A$:

$$g(a') \geq g(a) \Rightarrow \begin{cases} a' I_g a \text{ si } g(a') - g(a) \leq q_g(g(a)) \\ a' Q_g a \text{ si } q_g(g(a)) < g(a') - g(a) \leq p_g(g(a)) \\ a' P_g a \text{ si } p_g(g(a)) < g(a') - g(a). \end{cases}$$

SPECTRE DES CONSÉQUENCES : L'ensemble $\mathfrak{v}$ des n dimensions sur lesquelles la totalité des conséquences constituant $\mathfrak{v}(A)$ est supposée pouvoir être décrite de façon exhaustive et opérationnelle est appelé le **spectre des conséquences**. Il est évidemment relatif à la phase d'étude considérée.

TABLEAU DES PERFORMANCES : Soit un ensemble B d'actions potentielles (B pouvant être égal à A) et $g_1, \dots, g_n$, n critères formant une famille F . On appelle **tableau des performances de B sur F** le tableau contenant les valeurs de $g_j(a)$ pour tout j appartenant à F et pour tout a appartenant à B ainsi que les caractéristiques des éventuelles fonctions-seuils $q_j(g_j(a))$ et $p_j(g_j(a))$.

Chapitre 2

FAMILLE DE CRITÈRES : PROBLÈME DE COHÉRENCE ET DE DÉPENDANCE

RÉSUMÉ

Pour débiter ce chapitre, on passe en revue les principaux points de vue à partir desquels on peut chercher à juger si une famille F de critères répond à ce que l'on en attend dans une perspective d'aide à la décision. Chacun des critères de F renvoie à un modèle de préférences restreint. Leur ensemble doit permettre de modéliser les préférences à un niveau global. La famille F doit être apte à assurer une cohérence entre ces deux niveaux.

En section 2, on explicite les axiomes minimaux de cohérence (exhaustivité, cohésion, non redondance) que l'on peut raisonnablement imposer à F . Pour chacun d'eux, on présente successivement sa raison d'être, son énoncé formel, le (ou les) test(s) opérationnel(s) susceptible(s) de guider l'analyse critique, voire le remaniement, de F . Ces axiomes sont illustrés dans le cadre de plusieurs exemples : choix d'un premier emploi, entretien d'un parc de matériel, tracé d'une liaison à grande vitesse. Enfin, la définition 2.2.1 précise ce que l'on appellera dans ce livre famille cohérente de critères (f.c.c.).

Une f.c.c. peut posséder certaines propriétés remarquables : être inductive, faiblement séparable, séparable, fondamentale. Celles-ci sont définies et illustrées en section 3. Ces propriétés, lesquelles sont vérifiées par une f.c.c. F , renforcent la cohérence. Il serait cependant trop restrictif de vouloir les opposer à F pour que cette famille puisse être qualifiée de cohérente.

Dans la dernière section, on tente de répondre à la question : quelles formes d'indépendance entre les critères convient-il de rechercher lorsqu'on bâtit F ? Cela nous amène à approfondir trois formes de dépendances faisant intervenir successivement :

- le caractère plus ou moins isolable de chacun des axes de signification ;
- le caractère plus ou moins séparable de chacune des sous-familles de critères ;

- l'absence ou la présence de facteurs influençant conjointement plusieurs critères.

Afin d'illustrer ces formes de dépendance et/ou d'indépendance, de nouveaux exemples seront introduits : tracé de lignes à haute tension, choix d'un nouvel emploi.

Dans ce chapitre, nous nous situons à un stade donné d'avancement d'un processus de décision mettant en jeu un ensemble A d'actions potentielles. Soit $F = \{g_1, \dots, g_n\}$ une famille de n critères ($n \geq 1$) définis sur A . Celui qui propose ou à qui l'on propose de prendre appui sur une telle famille en vue d'une aide à la décision doit tout naturellement s'interroger sur l'adéquation de F à la situation. Une telle interrogation porte sur deux niveaux :

- les aspects des conséquences qui ont trait à l'axe de signification j sont-ils convenablement modélisés par le critère g_j compte tenu de la présence des autres critères de la famille ? ;
- les n axes ¹ de signification auxquels renvoient les critères de F sont-ils séparément pertinents et globalement nécessaires et suffisants pour atteindre le but recherché ?

Le rappel fait au 1.6.2 des techniques de construction de critères a fait ressortir le foisonnement des options que l'homme d'étude a dû prendre pour fixer le "calcul" de la performance $g_j(a)$ (et des éventuels seuils $p_j[g_j(a)]$ et $q_j[g_j(a)]$). Il est de ce fait vraisemblable qu'un autre homme d'étude, même en conservant des axes de signification identiques, aboutisse à une famille de critères différente. Il importe donc de savoir sur quel genre de considérations prendre appui pour juger si F peut ou non jouer le rôle qu'on veut lui faire jouer. Ce sujet est brièvement discuté en section 1 où plusieurs points de vue sont évoqués. L'un d'eux (ayant trait à une certaine forme de cohérence) est approfondi au 2.2.

¹ Le fait d'employer la forme pluriel n'est pas, dans notre esprit, exclusif du cas $n = 1$.

Dans ce genre de considérations, quelle place convient-il d'accorder aux dépendances possibles entre critères de F ? La réponse à cette question est renvoyée au 2.4 où nous analysons et illustrons les diverses formes de dépendances qui méritent d'être prises en considération. Divers concepts et propriétés de nature plus conceptuelle, que l'on peut situer en marge des notions de cohérence et de dépendance, sont présentés au 2.3.

2.1 COMMENT JUGER UNE FAMILLE DE CRITÈRES EN FONCTION DE CE QUE L'ON EN ATTEND ?

La famille de critères F associe, à chaque action potentielle a , les n performances ¹ que sont les nombres $g_j(a)$. Elle fait en outre correspondre, à chacune de ces performances, deux valeurs $q_j(g_j(a))$ et $p_j(g_j(a))$ (éventuellement nulles) destinées à apprécier le caractère plus ou moins significatif de l'écart qui peut exister entre $g_j(a)$ et la performance $g_j(b)$ d'une autre action b . Sauf cas exceptionnels, le modèle de préférences global sur lequel prend appui l'aide à la décision ne fait intervenir deux actions quelconques qu'au travers de leurs seules performances et seuils correspondants. C'est dire que les critères constituent les pièces maîtresses à partir desquelles il s'agit soit de pouvoir décrire ou construire cet édifice des préférences globales, soit de pouvoir communiquer à son sujet, soit de pouvoir le faire évoluer (cf. 1.6).

En matière d'aide à la décision, ces diverses facettes du rôle dévolu à F , à savoir décrire, construire, communiquer, faire évoluer, sont si étroitement mêlées que F joue toujours, peu ou prou, chacun de ces rôles. Il serait donc de peu d'intérêt de répondre à la question posée séparément en fonction de chacun. Pour juger, dans une situation donnée, de la capacité de F à jouer cet ensemble de rôles, il faut adopter au moins quatre points de vue complémentaires. Les trois premiers ont déjà été évoqués au chapitre 1. Le dernier sera développé au 2.2.

¹ Rappelons que l'on note $\underline{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$ le vecteur de performances de a .

a) Les informations nécessaires au calcul des performances et seuils d'une action reflètent-elles bien les éléments primaires à partir desquels les acteurs élaborent, justifient, transforment leurs préférences ?

Ces éléments primaires concernent tous les attributs de a , tous les effets de sa mise à exécution qu'un acteur peut juger pertinents compte tenu de ses objectifs et de son système de valeurs. Ce sont ce que nous avons appelé, au 1.5, les conséquences de l'action a . La question a) porte d'une part sur la pertinence des conséquences que les informations nécessaires au calcul des performances et seuils permettent d'appréhender et, d'autre part, sur le fait qu'en fondant F sur ces seules informations, on ne laisse pas échapper d'autres conséquences tout aussi pertinentes.

Dès l'instant où les conséquences des actions sont un tant soit peu complexes, il est commode, pour répondre à cette question, de disposer d'un modèle des conséquences des actions de A . Nous avons rappelé, au 1.5, selon quel schéma un tel modèle Γ pouvait être élaboré et, au 1.6, quel parti on pouvait en tirer pour la conception des divers critères constituant F . Le fait que F soit obtenu de cette manière ne dispense pas de s'interroger a posteriori sur les rapports de F avec Γ d'une part, de Γ avec la réalité des éléments primaires en question d'autre part.

b) L'axe de signification auquel renvoie chaque critère est-il aisément intelligible et acceptable par ceux des intervenants ¹ à qui s'adresse l'aide à la décision ?

La manière dont les préférences d'un tel intervenant se forment, se raisonnent, se transforment s'analyse tout naturellement ² à partir d'un petit nombre d'axes de signification. Ces axes de signification sont bien évidemment propres à chaque situation. A propos de l'acquisition d'un bien d'équipement, ils se rapporteront par exemple au prix d'achat, au coût de fonctionnement, à la sécurité de fonctionnement, à la vitesse de fonctionnement, à la commodité d'emploi pour l'utilisateur, ... Dans

¹ Cf. 1.1.

² C'est du moins une hypothèse que notre expérience ne nous a pas permis de falsifier.

certaines cas, un intervenant donné sera en mesure de clairement les expliciter. Dans d'autres, ils seront seulement présents de façon latente.

Lorsque l'aide à la décision s'adresse à un unique intervenant, F ne pourra jouer les divers rôles qui lui sont dévolus que si les n axes de signification qu'elle comporte sont suffisamment en congruence avec sa culture pour qu'il en ait une compréhension suffisamment spontanée et qu'il les accepte comme référence fondamentale. On peut être un peu moins exigeant lorsque l'aide à la décision s'adresse à plus d'un intervenant. Si un minimum de compréhension de chacun des n axes de signification demeure nécessaire de la part de chaque intervenant concerné, on peut admettre qu'aux yeux de tel ou tel d'entre eux quelques-uns de ces axes apparaissent comme dépourvus d'intérêt.

Si l'on se réfère à un nouveau modèle Γ , c'est la manière dont ses différentes composantes (indicateurs d'état et indicateurs de dispersion) se distribuent pour former le support ¹ de chacun de ces critères qui est ici en question. Ni l'intelligibilité, ni l'acceptation d'un axe de signification par un acteur n'impliquent une compréhension fine du mode de calcul de la performance $g_j(a)$ et encore moins de celle des seuils. Il faut toutefois veiller à ce qu'il n'y ait pas de distorsion entre ce à quoi conduit effectivement le mode opératoire et ce que les intervenants concernés imaginent à son sujet. Il suffit en général de préciser la nature de l'échelle E_j associée au critère g_j pour dissiper tout risque de malentendu. Discuter de cette échelle avec les acteurs offre en outre un moyen commode de vérifier qu'il y a bien consensus sur le fait que la préférence ne peut décroître (ou croître) lorsque la performance décrit l'échelle d'une extrémité à l'autre.

c) La définition de certains critères ne fait-elle pas appel à des hypothèses (ayant trait à leurs structures ou à la valeur numérique de certains paramètres) qui figent prématurément les préférences là où elles apparaissent obscures ou contradictoires ?

Dans la plupart des méthodes multicritères, de même que dans la méthodologie que nous proposons, la famille F est censée appréhender ce qui, dans les préférences des intervenants concernés, apparaît comme particulièrement "solide" et non contingent

¹ Cf. glossaire du chapitre 1 : Critère.

à un système de valeurs particulier. Pour que l'ensemble des n critères de F constitue ce "jeu de pièces maîtresses", ce "système de référence fondamental" à partir duquel on souhaite pouvoir représenter, bâtir, discuter, modifier des préférences globales, il importe qu'un assez large consensus puisse avoir lieu autour de cette part des préférences qui est prise en compte par chaque critère lorsque l'on se restreint à son axe de signification et que l'on raisonne toutes choses égales par ailleurs.

Il faut de ce fait éviter de faire intervenir, dans la définition des critères, des valeurs numériques de paramètres destinées par exemple à rendre commensurables des catégories de conséquences fort hétérogènes dont l'estimation ou l'interprétation donne lieu à des divergences si fortes qu'elle affecte significativement cette part des préférences restreintes à l'axe de signification concerné. Certaines hypothèses structurelles peuvent avoir le même effet néfaste et doivent également être évitées. Il peut par exemple en être ainsi lorsque le calcul de $g_j(a)$ fait intervenir des additions, soustractions ou multiplications portant sur des nombres dont seule la signification en tant que repère ordinal est bien définie et acceptée.

d) Y a-t-il cohérence entre ce que l'on sait ou ce que l'on veut au niveau des préférences globales et ce que la famille F amène logiquement à inférer à ce niveau?

Le fait que F contienne les n critères considérés et pas d'autres, que chacun de ces critères confère un sens à la comparaison de deux actions quelconques selon son axe de signification n'est pas sans conséquences au niveau des préférences globales lorsque celles-ci sont fondées sur F . Les conséquences qu'il est naturel d'inférer au niveau des préférences globales sur la base des préférences restreintes appréhendées par F sont-elles en accord avec ce que l'on peut savoir ou vouloir par ailleurs relativement à ces préférences globales ? On ne peut juger de cette cohérence que dans un contexte précis d'aide à la décision (actions envisagées, acteurs concernés, etc.).

Les deux sections qui suivent traitent de ce sujet¹. Compte-tenu de ce qui a été dit plus haut quant à la signification de F, à celle des concepts de critères et des seuils qui leur sont associés, il nous paraît raisonnable d'imposer certaines conditions à F pour que la cohérence dont il vient d'être question soit garantie. Elles sont exposées au 2.2. Au 2.3, on discute d'autres conditions qui, bien que remplies par de nombreux modèles, paraissent néanmoins trop fortes pour être systématiquement imposées pour qualifier la famille F de cohérente.

2.2 AXIOMES FONDAMENTAUX DE COHÉRENCE ET TESTS OPÉRATIONNELS

Les trois axiomes qui suivent, de même que les tests opérationnels qui leur sont associés, sont destinés à mettre en relation ce que la réalité nous invite à postuler, au niveau des préférences globales, avec ce qu'il est logique d'inférer relativement à ces dernières à partir des critères retenus pour modéliser les préférences à un niveau plus restreint. Ces axiomes assurent une cohérence "minimale" entre les deux niveaux considérés sans laquelle il nous semble difficile de concevoir un formalisme avec lequel travailler en pratique. Une famille F de n critères ayant été construite, il est toujours prudent de se demander, à la lumière des tests opérationnels, si aucun de ces axiomes de cohérence ne peut être contredit par le système de préférences globales que F a précisément pour objet d'aider à concevoir, à argumenter ou à transformer. Aucun de ces axiomes n'est une simple conséquence logique des notions, principes et techniques rappelés au 1.6 pour bâtir, dans un contexte donné, les différents critères de F. Pourtant, lorsqu'en pratique un test opérationnel révèle une incohérence, celle-ci permet fréquemment de découvrir une inadéquation entre le critère retenu et les préférences, à un niveau restreint, qu'il était censé refléter. Les tests proposés ci-après permettent donc aussi des vérifications de cohérence sur d'autres plans que celui ayant trait à une bonne articulation entre chaque critère considéré isolément et la famille F considérée dans son ensemble.

¹ à peine effleuré dans MMCAD, 10.1.

2.2.1 Axiome d'exhaustivité

a) Principe

Dans une situation d'aide à la décision donnée, il existe bien des manières de regrouper et de combiner entre eux les éléments primaires (effets, attributs) qui caractérisent les conséquences des actions pour aboutir, en fin de compte, à la famille F de critères g_j qui sera retenue. Quelles que soient les options prises, si deux actions a et b sont telles que $g_j(a) = g_j(b)$, $\forall j \in F$, alors il est impossible de différencier a et b dans un modèle de préférences globales fondées sur F . C'est dire non seulement que entre a et b ne peut exister que l'indifférence mais encore que, comparer b avec une tierce action c , équivaut à comparer a avec c . Ainsi, pour que F puisse jouer le rôle qui lui est dévolu, il faut en particulier s'assurer qu'il est insensé de concevoir deux actions réalistes a et b qui auraient des vecteurs-performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$ identiques à propos desquels on voudrait pourtant faire intervenir une autre relation que l'indifférence dans le modèle des préférences globales. Pour une telle paire d'actions, le refus de l'indifférence doit nécessairement être fondé sur le fait que les éléments primaires à partir desquels se conçoivent, se justifient, se transforment les préférences ne sont pas identiques. S'il y a néanmoins égalité des performances sur tous les critères de F , c'est la preuve que, dans la manière d'agencer les informations de base pour calculer ces performances, il s'opère une perte de signification.

Avant d'énoncer formellement cette première exigence de cohérence, nous allons introduire un exemple simple dit "du choix d'un premier emploi". Il nous permettra en particulier de montrer que l'axiome d'exhaustivité et le test opérationnel qui lui est associé ne font pas que prendre en compte (bien qu'ils le fassent également) l'exigence triviale suivante : "chacune des conséquences servant à fonder les jugements de comparaison entre actions doit être prise en charge par l'un au moins des critères de F ". Il vise plus largement à justifier la possibilité, au vu de certains raisonnements, de substituer à l'action a la représentation abstraite qu'en donnent ses performances et seuils, substitution qui rend

indiscernables deux actions ayant même représentation ¹.

Exemple du "choix d'un premier emploi"

Après avoir prospecté en vue d'un premier emploi, un individu Z est amené à comparer quatre postes a_1, a_2, a_3, a_4 . Pour les comparer, il estime pertinent de ne faire intervenir que les trois conséquences élémentaires suivantes et elles seules :

– dimension ² n° 1 : salaire mensuel escompté au bout d'un an de travail ³ ; les postes proposés se classent, relativement à cette dimension, en deux catégories :

. ceux (a_2 et a_4) qui offrent une totale sécurité de l'emploi accompagnée d'une progression de salaire parfaitement prévisible,

. ceux (a_1, a_3) qui présentent un risque réel en ce sens que la non réussite entraîne le licenciement au bout de la première année alors que la réussite conduit automatiquement, à cette échéance, à des responsabilités accompagnées d'une bonne rémunération ;

– dimension n° 2 : valorisation sur le marché du travail découlant de cette première année de vie professionnelle ; les quatre postes peuvent aisément être situés sur une échelle qualitative à partir d'éléments de jugement faisant intervenir le gain de qualification, les références, les contacts, etc. ;

– dimension n° 3 : attrait du poste proposé apprécié d'après la nature du travail, le lieu de travail, ... ; ici encore, les quatre postes peuvent être aisément évalués sur une échelle qualitative.

¹ En renvoyant explicitement, dans chaque représentation, à l'action a concernée, la notation retenue devrait avoir le mérite d'éviter les erreurs graves qui ne manquent pas de se produire (cf. Bateson (1977)) lorsqu'on confond systématiquement "cartes" (ici performances et seuils) et "territoire" (ici action concrète a).

² Sur cette notion, nous renvoyons au 1.5.

³ Z considère qu'il ne doit pas se laisser influencer par le salaire de début qui, du reste, varie peu d'un poste à l'autre.

Le tableau 2.2.1 résume les évaluations faites par Z des quatre postes proposés selon ces trois dimensions. Imaginons que, pour raisonner ses préférences, Z fasse intervenir une famille F constitués de trois critères suivants :

- critère g_1 : salaire espéré au bout d'un an ; la performance $g_1(a)$ est définie comme l'espérance mathématique du salaire brut ou (si Z a connaissance de cette notion) d'une utilité ¹ attachée à ce salaire ;
- critère g_2 : valorisation sur le marché ; la performance $g_2(a)$ est ici tout simplement définie en codant, sur une échelle numérique allant de 0 à 10, l'évaluation faite du poste a sur l'échelle qualitative associée à la dimension n° 2 ;
- critère g_3 : attrait du poste ; la performance $g_3(a)$ est ici encore une note de l'échelle 0 à 10 reflétant l'évaluation de a sur l'échelle qualitative de la dimension n° 3.

Quelle que soit la fonction d'utilité introduite pour définir le critère g_1 et quels que soient les codages ² pris en compte pour définir les critères g_2 et g_3 , il est clair que l'on aboutit à des performances qui, comme dans le tableau 2.2.2, vérifient :

$$\begin{aligned} g_1(a_1) &= g_1(a_3), & g_1(a_2) &= g_1(a_4), \\ g_2(a_1) &= g_2(a_2), & g_2(a_3) &= g_2(a_4), \\ g_3(a_1) &= g_3(a_2), & g_3(a_3) &= g_3(a_4). \end{aligned}$$

La famille des trois critères ainsi définie satisfait-elle à l'exigence d'exhaustivité dont le principe a été présenté en début de paragraphe ? Nous répondrons à cette question après avoir donné un nouvel énoncé plus formel de cette exigence d'exhaustivité.

¹ Il s'agit notamment de prendre en compte le fait qu'un salaire mensuel qui peut valoir 16 000F ou 0 F avec des probabilités égales ne conduit pas nécessairement (toutes choses égales par ailleurs) à une situation d'indifférence avec un salaire certain de 8 000 F, cf. 1.6.2 et 4.5.

² Cf. glossaire du chapitre 1 : Codage d'une échelle.

Tableau 2.2.1 : Evaluation des quatre postes offerts pour un premier emploi

A \ Dimensions	Salaire au bout d'un an	Valorisation sur le marché	Attrait du poste
a_1	16 000 F : une chance sur deux 0 F : une chance sur deux	forte	moyen
a_2	9 500 F avec certitude	forte	moyen
a_3	16 000 F : une chance sur deux 0 F : une chance sur deux	négligeable	fort
a_4	9 500 F avec certitude	négligeable	fort

Tableau 2.2.2 : Performances des quatre postes offerts selon la famille F des trois critères retenus

A \ Critères	g_1	g_2	g_3
a_1	x	8	5
a_2	y	8	5
a_3	x	1	8
a_4	y	1	8

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.1 (d'exhaustivité) : Si, $\forall j \in F$, $g_j(b) = g_j(a)$, alors, quelle que soit l'action c :

$c H b \Rightarrow c H a, \forall H \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}$,

$b H' c \Rightarrow a H' c, \forall H' \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}$.

Cet axiome, tout en étant fort peu restrictif, traduit bien l'exigence d'exhaustivité présentée ci-dessus. Il appelle trois remarques :

1°) Soit parce que l'ensemble A des actions potentielles peut évoluer, soit parce que les actions fictives n'appartenant pas à A peuvent intervenir dans certains raisonnements, il serait trop restrictif de limiter l'énoncé de l'axiome aux seules actions $c \in A$.

2°) Il ne serait pas restrictif de limiter le champ d'application de l'axiome aux seules relations fondamentales I, P, Q, R : la validité des implications aux trois relations regroupées $\sim, >, S$ s'en déduirait aisément. On peut de même établir que l'axiome vaut pour les relations J et K définies au tableau 1.4.2 mais nous n'aurons pas à faire intervenir ces relations par la suite.

3°) Appliquons l'axiome à une action c identique à b. La relation I étant réflexive par définition (cf. 1.4), on a $b I b$. L'axiome impose alors $b I a$, ce qui démontre le résultat suivant :

RÉSULTAT 2.2.1 (sur l'égalité des performances) : Dans F vérifiant l'axiome 2.2.1, si, $\forall j \in F, g_j(b) = g_j(a)$, alors $b I a$.

Bien que ce résultat ne soit qu'un cas particulier de l'axiome précédent, tout porte à croire qu'en pratique, vis-à-vis d'une famille donnée F, s'il est possible de mettre en évidence un triplet a, b, c tel que c ne se compare pas de la même façon avec a et avec b en dépit de l'identité des performances de a et de b, alors il doit être en général possible de mettre en évidence deux actions qui mettent le théorème en défaut. C'est pourquoi le test opérationnel préconisé ci-après ne porte que sur les cas envisagés par le théorème.

c) Test opérationnel

Avant de retenir une famille donnée F (éventuellement réduite à un seul critère) comme base d'un modèle de préférences globales, il est prudent de lui faire subir le test ci-après :

TEST 2.2.1 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b vérifiant, $\forall j \in F, g_j(b) = g_j(a)$ et vis-à-vis desquelles il soit néanmoins possible de faire valoir des arguments justifiant le refus de l'indifférence $b I a$?

L'argument le plus simple est évidemment l'oubli d'un facteur, d'un attribut non fonctionnellement liés à ceux retenus, pertinents pour l'aide à la décision et, par conséquent, susceptibles de rompre la symétrie entre les performances caractérisant a et b . Le recours à ce test peut conduire à faire surgir d'autres arguments révélant une insuffisance plus ou moins cachée de F vis-à-vis de l'exigence d'exhaustivité. Il peut s'agir d'anomalies dans la définition de certains critères ou de l'oubli d'un axe de signification important qui, sans le test, pourrait pourtant passer inaperçu comme nous allons le montrer en revenant à l'exemple du "choix d'un premier emploi".

Exemple du "choix du premier emploi" - Suite

Dans cet exemple décrit au 2.2.1 a)), les critères g_1 , g_2 , g_3 définis par Z forment apparemment une famille F apte à satisfaire l'exigence d'exhaustivité. Pourtant, l'application du test peut conduire à l'argumentation suivante.

Imaginons que, dans le tableau 2.2.2, $x = y$ (peu importe si tel n'est pas rigoureusement le cas des postes qui s'offrent dans l'instant à Z). Si l'on s'en tient à la famille F , on a alors nécessairement :

$$a_1 \text{ I } a_2 \text{ et } a_3 \text{ I } a_4.$$

L'égalité $x = y$ dépend évidemment de la fonction d'utilité choisie par Z pour définir le critère g_1 . Ce choix peut précisément rendre compte du fait que Z est effectivement indifférent entre a_3 et a_4 . Ces postes ayant mêmes performances sur les autres critères, cela signifie que Z est indifférent entre la garantie d'un revenu de 9 500 F par mois et l'espoir de réussir à obtenir 16 000 F par mois contrebalancé, avec la même possibilité, par le risque d'échouer et de se retrouver avec un revenu nul. Cette indifférence est évidemment influencée par le fait que Z sait qu'en cas d'échec il se retrouvera sur le marché du travail dans une situation semblable à celle d'aujourd'hui puisque ses qualifications professionnelles, ses relations avec le monde du travail, ... n'auront pas été significativement modifiées par cette première année d'activité dans le cadre de a_3 . Cette façon qu'a Z de

comparer a_3 à a_4 ne lui interdit donc nullement de préférer a_1 à a_2 . En effet, s'il échoue dans le poste a_1 , il est licencié mais sa situation sur le marché du travail, après cette première année de vie professionnelle, sera bien différente de ce qu'elle est aujourd'hui. L'éventualité d'un licenciement l'inquiète donc beaucoup moins dans le cas du poste a_1 que dans le cas du poste a_3 . C'est pourquoi :

$$a_1 P a_2 \text{ et } a_3 I a_4$$

lui paraît être le bon système de préférences.

Cette réponse positive au test 2.2.1 met non seulement en lumière ce qui est à l'origine du fait que F ne satisfait pas l'exigence d'exhaustivité mais oriente également Z vers une nouvelle famille F' n'ayant plus le même défaut. Faisons tout d'abord observer que le défaut d'exhaustivité de F ne doit rien au choix de la fonction d'utilité. Avec une fonction différente, quelle qu'elle soit, on pourra toujours retrouver la contradiction ci-dessus en modifiant les salaires figurant dans la première colonne du tableau 2.2.1. Le défaut d'exhaustivité découvert provient en fait de ce que la famille F ne prend en compte qu'imparfaitement (par le biais d'un salaire nul) l'éventualité d'un licenciement au bout d'un an. Il s'ensuit que des actions telles que a_1 et a_2 , susceptibles de donner une même valeur au critère g_1 , peuvent être fort différentes eu égard à cet aspect précis de la conséquence n° 1 sans que cela apparaisse dans l'un quelconque des autres critères. Il est possible de réparer cet oubli, par exemple en éclatant¹ cette dimension n° 1. Z peut lui associer :

— un premier critère g_1' ayant un axe de signification purement financier, c'est-à-dire n'incorporant rien d'autre que la nullité du salaire dans le cas d'un éventuel licenciement ;

— un critère additionnel g_4 dont l'axe de signification est lié à cet aspect licenciement de la conséquence n° 1 : il peut par exemple poser $g_4(a) =$ probabilité de conserver le poste a au bout d'un an, ce qui traduit la pérennité du poste.

¹ Cf. 1.6.2.

Il suffit au lecteur de se reporter au tableau 2.2.3 pour vérifier que la famille F' formée des critères g_1' , g_2 , g_3 , g_4 ne permet plus, en posant $x' = y'$, d'imaginer, sur les bases précédentes, une réponse positive au test 2.2.1. Faisons en effet observer que (par référence à l'argumentation ci-dessus) l'indifférence $a_3 \text{ I } a_4$ implique $x' > y'$, ce qui n'entraîne pas obligatoirement $a_1 \text{ I } a_2$.

Tableau 2.2.3 : Performances des quatre postes offerts selon la nouvelle famille F' de quasi-critères

A \ Critères	Critères			
	g_1'	g_2	g_3	g_4
a_1	x'	8	5	1/2
a_2	y'	8	5	1
a_3	x'	1	8	1/2
a_4	y'	1	8	1

d) Remarques

L'analyse qui vient d'être présentée de l'exemple du choix d'un premier emploi relève de ce que nous avons appelé, au 1.7, une démarche constructive. Dans ce type de démarche, les critères forment le matériau de départ devant permettre de construire un modèle de préférences globales. Chaque critère doit donc être conçu de telle sorte que son axe de signification renvoie à un aspect des préférences qui soit clairement et durablement établi. Cela signifie en particulier qu'il permette de raisonner simplement les comparaisons d'actions en faisant abstraction de tous les facteurs ou attributs n'entrant pas dans ce que nous avons défini comme étant le support du critère (validité d'un certain type de raisonnement "toutes choses égales par ailleurs" effectué fréquemment de façon inconsciente). Le test a précisément révélé que le critère g_1 , tel qu'il était primitivement conçu, ne permettait pas ce mode de raisonnement. En effet, deux postes (tels a_1 et a_2 ou a_3 et a_4), dont on peut supposer qu'ils ne diffèrent que par des aspects des conséquences pris en compte par le seul critère g_1 (dans la famille F), doivent pouvoir être comparés en ne considérant que les deux seules performances correspondant à ce critère. On a vu qu'il n'en était rien : selon que la valeur commune aux deux postes pour le critère g_2 vaut 8 ou 1, les conclusions changent. L'éclatement proposé substitue, à l'axe de signification initial, deux axes de signification très concrets et aisément intelligibles.

Reconsidérons maintenant cette analyse en nous plaçant dans le cadre d'une démarche descriptive. Celle-ci vise à proposer un modèle qui soit une

description des préférences globales de l'acteur Z prenant directement appui sur les attributs liés aux dimensions retenues. Les critères n'ont plus nécessairement cette vocation de matériau de base. Ce sont des intermédiaires plus ou moins bien adaptés à la description recherchée. Dans ces conditions, le test 2.2.1 révèle moins un manque d'exhaustivité qu'une impossibilité de comparer deux distributions de probabilités sur la dimension n° 1 en faisant abstraction des valeurs communes des attributs liés aux autres dimensions (n° 2 principalement). La description des préférences implique alors d'indexer, par la valeur de l'attribut correspondant à la dimension n° 2, la fonction d'utilité introduite sur la dimension n° 1 pour ponctualiser sur cette dimension. Pour cette raison, on parle dans ce cas de dépendance au sens des utilités (plus généralement au sens des dispersions) de la dimension n° 1 vis-à-vis des autres dimensions et notamment de la dimension n° 2 (cf. 2.4.1).

Signalons qu'une réponse positive au test 2.2.1 peut être trouvée dans des conditions sensiblement différentes de celles qui viennent d'être discutées. Bornons-nous à évoquer le cas où un critère g_k fait intervenir un sous-ensemble I de dimensions et opère une sous-agrégation selon des modalités qui respectent insuffisamment bien les conditions requises ¹ pour bâtir un tel critère. Pour un tel critère g_k , le raisonnement toutes choses égales par ailleurs peut s'avérer inacceptable, du moins en l'absence de critères supplémentaires ne figurant pas dans la famille considérée. Ici encore, l'analyse des arguments mis en jeu par le test est de nature à clarifier le (ou les) axe(s) de signification qu'il convient d'ajouter.

Ce qui précède nous invite à attirer l'attention du lecteur sur le fait que le raisonnement "toutes conséquences égales par ailleurs" est plus restrictif que le raisonnement "toutes performances égales par ailleurs". Ainsi, dans l'exemple du choix d'un premier emploi, la comparaison de a_1 et a_2 relativement à ce que l'on a appelé leur attrait respectif (cf. 2.2.1 a), dimension n° 3) a bien lieu, toutes performances égales par ailleurs (dans le cadre de F), dès lors que $x = y$. Pourtant, a_1 et a_2 ont des conséquences différentes selon la dimension n° 1 (cf. tableau 2.2.1). Qui plus est, la comparaison de deux actions selon un critère g_j , toutes les autres performances étant égales par ailleurs, fait explicitement intervenir les autres critères introduits au côté de g_j pour constituer la famille F. Ce phénomène n'intervient pas lorsqu'on raisonne toutes autres conséquences égales par ailleurs. En conclusion, il importe de ne pas perdre de vue que, pour comparer deux actions selon l'axe de signification d'un critère, il convient de raisonner ², abstraction faite des aspects des conséquences non modélisées dans le support du critère g_j . Ceci explique que le critère g_1' (contrairement au critère g_1) peut être défini sans ambiguïté sur la base d'une fonction d'utilité du salaire

¹ Cf. 1.6.2 et MMCAD, 9.2.3 : conditions I et II.

² Cf. MMCAD, définition 9.1.1.

qui fait abstraction du fait qu'un salaire nul s'accompagne d'un licenciement (aspect de la conséquence non modélisé dans le support de g_1').

2.2.2 Axiome de cohésion

a) Principe

La formulation que nous donnons ci-après de cet axiome fait intervenir la convention selon laquelle une action quelconque a est d'autant meilleure selon un quelconque critère g_k que le nombre $g_k(a)$ (performance selon g_k) est plus grand. Nous attirons à nouveau l'attention sur le fait que cette convention est non restrictive.

Cet axiome vise à cerner le minimum de cohésion qui doit exister entre le rôle dévolu localement à n'importe quel critère g_k au niveau des préférences restreintes à son axe de signification et le rôle dévolu au même critère g_k une fois immergé dans F au niveau des préférences globales. Ce minimum de cohésion trouve tout d'abord sa source dans les considérations suivantes :

– Partant d'une quelconque action b , si, par un procédé quelconque, on accroît la performance d'une action b sur un critère k tout en maintenant inchangées les autres performances de b , alors l'action b^k ainsi obtenue est au moins aussi bonne que l'action initiale b .

– Si b est comparable à une autre action a selon une relation qui fait apparaître b comme au moins aussi bonne que a (préférence stricte, préférence faible ou indifférence), alors l'action b^k (obtenue selon le procédé ci-dessus) demeure comparable à a selon une relation qui traduit une préférence de b^k sur a au moins aussi solidement affirmée que celle existant primitivement entre b et a .

– Si, par un procédé quelconque, on réduit la performance $g_k(a)$ tout en maintenant les autres performances de a inchangées, alors l'action a_k ainsi obtenue demeure comparable à b^k , la préférence étant en faveur de b^k et devant être au moins aussi clairement affirmée que celle existant primitivement entre b et a .

Ce minimum de cohésion doit en outre prendre en considération le caractère non significatif d'un écart de performance inférieur au seuil d'indifférence. Soit a et b deux actions (comparables ou non au niveau des préférences globales) vérifiant $g_k(b) = g_k(a)$. Imaginons que, pour des raisons quelconques, on soit amené à réviser légèrement en hausse la performance $g_k(b)$ et légèrement en baisse la performance $g_k(a)$, l'écart entre les nouvelles valeurs $g_k(b) - g_k(a)$ restant inférieur à la valeur du seuil d'indifférence. Une différenciation de si faible ampleur, à partir d'une performance initialement commune aux actions a et b , n'est pas de nature (compte-tenu de la définition du seuil d'indifférence ¹) à pouvoir altérer la manière dont se comparent les actions a et b .

Afin d'illustrer de quelle façon un tel principe, qui peut paraître évident, est susceptible d'être mis en défaut, nous introduisons ci-après un second exemple dit "de l'entretien d'un parc immobilier".

Exemple de l'"entretien d'un parc immobilier"

Z est ici le responsable de l'entretien d'un important parc immobilier. A ce titre, il lui incombe de procéder aux réparations de toutes sortes qui s'imposent pour maintenir en l'état un très grand nombre de logements, de garages ainsi que divers espaces verts, zones d'accès, etc. Pour l'essentiel, les demandes de travaux (qui constituent les actions potentielles) proviennent des occupants des locaux ainsi que d'agents chargés de l'entretien. Pour des raisons de sécurité ou de menace de détérioration rapide d'une situation, certaines de ces demandes peuvent présenter un haut degré d'urgence. D'autres peuvent au contraire attendre au prix de préjudices relativement mineurs infligés aux usagers des lieux.

Z tient à jour la liste A_t des actions potentielles correspondant aux travaux non encore engagés à l'époque t . Il souhaite que A_t soit ordonnée conformément à un principe de priorités décroissantes. Une analyse statistique a permis d'élaborer un indice

¹ Cf. 1.6.3.

appelé score d'urgence permettant d'associer à l'instant t , à chaque élément de la liste A_i , un nombre $g_1(a)$ compris entre 0 (peut être différé sans aucun dommage) et 100 (doit être mis à exécution immédiatement). Le score $g_1(a)$ prend notamment en considération la nature et l'âge des lieux, leur usage, certaines caractéristiques propres aux usagers, la nature des travaux demandés, etc.

Après avoir raisonné durant quelque temps sur la base de l'ordre des priorités décroissantes définies sur le seul critère g_1 , Z a éprouvé le besoin de faire intervenir d'autres critères en complément du score d'urgence et cela pour des raisons de deux ordres :

- d'une part le calcul de $g_1(a)$ est plus ou moins approximatif selon l'action considérée : certaines des informations peuvent manquer à propos d'une action a donnée (une valeur moyenne plus ou moins pertinente est alors adoptée pour la remplacer), parfois certaines des informations fournies sortent des normes qui ont servi de base à la mise au point de l'indice sur des bases statistiques, dans d'autres cas il sait que la source d'informations est très largement sujette à caution ;

- d'autre part il veut faire intervenir de nouveaux attributs non pris en compte dans le calcul de $g_1(a)$ comme, par exemple, la confiance qu'il est prêt à accorder au demandeur de travaux compte-tenu de ses antécédents connus ou bien encore l'intérêt qu'il peut y avoir à engager immédiatement ou, au contraire, à différer les travaux compte-tenu de travaux de même nature actuellement engagés ou planifiés pour un avenir proche.

Z est ainsi conduit à compléter l'unique critère primitif g_1 par :

- un critère $g_2(a)$ traduisant la fiabilité de la performance $g_1(a)$: plus $g_2(a)$ est élevé (proche de 1) et plus la performance $g_1(a)$ découle de données complètes et crédibles ;

- d'autres critères $g_3, \dots, g_n$ ayant trait aux autres aspects des conséquences pertinentes pour juger de la priorité d'une action mais non correctement pris en compte dans les supports de g_1 ou de g_2 .

La famille de critères F ainsi définie satisfait-elle obligatoirement à l'exigence de cohésion ? Nous répondrons à cette question après avoir donné un énoncé plus formel de cette exigence.

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.2 (de cohésion) :

Si, $\forall j \in F \setminus \{k\}$, $g_j(b^k) = g_j(b)$, $g_k(b^k) \geq g_k(b)$ et
 si, $\forall j \in F \setminus \{k\}$, $g_j(a) = g_j(a_k)$, $g_k(a) \geq g_k(a_k)$,
 l'une au moins des deux inégalités ci-dessus étant stricte,
 alors :

$$b P a \Rightarrow b^k P a_k,$$

$$b Q a \Rightarrow b^k > a_k,$$

$$b I a \Rightarrow b^k S a_k.$$

Si, en outre, $g_k(b) = g_k(a)$ et $b^k I_k a_k$, alors, $\forall H \in \{I, P, Q, R, \sim, >, S\}$:

$$b H a \Rightarrow b^k H a_k,$$

$$a H b \Rightarrow a_k H b^k.$$

Cet axiome appelle les remarques suivantes :

1°) Dans la formulation de la première partie de l'axiome, les relations regroupées (S et $>$) peuvent laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elles peuvent impliquer.

2°) Lorsqu'on admet l'axiome d'exhaustivité, la première partie de l'axiome de cohésion vaut également dans le cas $g_k(a) = g_k(a_k)$ et $g_k(b^k) = g_k(b)$ comme on le montrera au d) ci-après.

3°) Si le seuil d'indifférence du critère g_k est nul, faisons observer que la deuxième partie de l'axiome devient une conséquence de l'axiome d'exhaustivité. Lorsque les seuils d'indifférence de tous les critères sont nuls, il résulte de l'axiome d'exhaustivité que deux actions indifférentes sur tous les critères doivent se comparer de manière identique à toutes les autres actions. Notons qu'il n'en va pas ainsi dans les autres cas. Modifier les axiomes de cohésion et d'exhaustivité de manière à l'imposer reviendrait, sur un ensemble d'actions suffisamment

riche, à rendre de proche en proche toutes les actions indifférentes.

De cet axiome joint au précédent découlent deux résultats importants. Le premier apparaît comme une généralisation de la première partie de l'axiome 2.2.2. Rappelons que la relation Δ_F désigne la relation de dominance associée à F, cf. (r.1.7.1).

RÉSULTAT 2.2.2 (de monotonie) : Dans F vérifiant les axiomes 2.2.1 et 2.2.2 :

si $b^* \Delta_F b$ et $a \Delta_F a_*$,

alors

$b H a \Rightarrow b^* H a_*, \forall H \in \{P, >, S\}^1$ et

$b \Delta_F a \Rightarrow b S a^1$.

Démonstration : Lorsque, $\forall j \in F, g_j(b^*) = g_j(b)$, on a, d'après l'axiome 2.2.1, $b H a \Rightarrow b^* H a$.

Lorsque, $\forall j \neq k, g_j(b^*) = g_j(b)$, l'axiome 2.2.2 implique :

$b P a \Rightarrow b^* P a$,

$b > a \Rightarrow [b P a \text{ ou } b Q a] \Rightarrow [b^* P a \text{ ou } b^* > a] \Rightarrow^2 b^* > a$,

$b S a \Rightarrow [b > a \text{ ou } b I a] \Rightarrow [b^* > a \text{ ou } b^* S a] \Rightarrow^1 b^* S a$.

Ceci peut être formulé :

$\Delta_1 H \subset H$

avec $b \Delta_1 a$ si et seulement si les performances de a et de b ne diffèrent que sur un critère au plus pour lequel la performance de b est au moins égale à celle de a .

¹ Dans le membre de droite de l'implication, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer, cf. remarque 1°) ci-dessus.

² Conformément à la remarque 1°) suivant l'axiome 2.2.2, nous raisonnons en admettant que $d > c$ est regardée comme vraie dès lors que $d P c$ ou $d Q c$ et que $d S c$ est regardée comme vraie dès lors que $d > c$ et cela même si, dans l'écriture du s.r.p., la relation regroupe cède la place à une relation fondamentale plus précise, l'une et l'autre ne pouvant co-exister dans cette écriture afin de satisfaire à la troisième condition de la définition 1.4.1.

Dans ces conditions :

$$(\Delta_1)^n \cdot H \subset (\Delta_1)^{n-1} \cdot H \subset \dots \subset H.$$

Or, $(\Delta_1)^n = \Delta_P$. Donc $\Delta_P \cdot H \subset H$. On démontre symétriquement $H \cdot \Delta_P \subset H$, d'où : $\Delta_P \cdot (H \cdot \Delta_P) \subset H$ (ce qui démontre la première partie du résultat). D'autre part, S étant réflexive, on a : $\Delta_P \subset \Delta_P \cdot S \subset S$ (ce qui achève la démonstration).

RÉSULTAT 2.2.3 (sur la contagion de surclassement) : Dans F vérifiant les axiomes 2.2.1 et 2.2.2 :

$$[a' S_j a, \forall j \in F] \Rightarrow a' S a^1,$$

$$[a' I_j a, \forall j \in F] \Rightarrow a' I a.$$

Démonstration : Soit $J = \{j \in F : g_j(a) > g_j(a')\}$. Lorsque $J = \emptyset$, alors $a' S_j a, \forall j \in F$ implique $a' \Delta_P a$, d'où $a' S a$ d'après le résultat 2.2.2.

Lorsque $J \neq \emptyset$, soit c une action caractérisée par :

$$g_j(c) = \min(g_j(a'), g_j(a)), \forall j \in F.$$

Montrons que $c S a$.

Si $J = \{k\}$, on est dans les conditions de la seconde partie de l'axiome 2.1.2 avec $b^k = a, a_k = c, a = b$, donc $a S a \Rightarrow a_k S b^k$, soit $c S a$.

Si $J = \{h, k\}$, soit c_h l'action caractérisée par :

$$g_h(c_h) = g_h(a),$$

$$g_j(c_h) = \min(g_j(a), g_j(a')), \forall j \in F \setminus \{h\}.$$

Il découle de ce qui précède que $c_h S a$. On est alors à nouveau dans les conditions de la seconde partie de l'axiome 2.1.2 (avec $b^k = a, a_k = c, b = a$ et $a = c_h$) et on a donc $c S a$. Il est facile d'itérer ce raisonnement pour achever la démonstration de la première partie du résultat.

Suivant les conventions adoptées, $a' I_j a$ peut être remplacé par $a' S_j a$ et $a S_j a'$. Ceci étant vrai pour tout j , on en déduit (d'après la première partie du résultat) $a' S a$ et $a S a'$, ce qui implique $a' I a$ et achève la démonstration.

¹ Au second membre S , on peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer.

c) *Test opérationnel*

L'exigence de cohésion, telle qu'elle vient d'être formulée, demande-t-elle à être testée en pratique ? Dès l'instant où chacune des fonctions g_j constituant F a été conçue de façon à être un critère au sens donné à ce terme dans le présent ouvrage, ne peut-on pas admettre que F satisfait naturellement à l'axiome 2.2.2 ? Bien qu'il en soit généralement ainsi, des précautions s'imposent néanmoins. Les considérations et exemples qui suivent le prouvent. Il est donc opportun de s'assurer de l'acceptabilité de cet axiome comme base de raisonnement et fondement des rapports entre préférences globales réelles ou postulées et modèles de ces préférences bâties sur F . Pour cela, on peut avoir recours aux tests suivants :

TEST 2.2.2 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b devant vérifier $b \text{ I } a$ vis-à-vis desquelles on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait qu'en améliorant certaines des performances de b (les autres restant inchangées) et/ou en dégradant certaines des performances de a (les autres restant également inchangées) on parvienne à caractériser deux actions b^* et a_* telles que b^* n'apparaisse pas comme devant être au moins aussi bonne que a_* ?

Avant de commenter ce test, mentionnons une variante proposée et expérimentée par Vanderpooten (1990) et prenant appui sur le résultat 2.2.2 :

TEST 2.2.2 bis : Est-il possible de mettre en évidence deux actions a et b dont les performances vérifient, $\forall j \in F$, $g_j(b) \geq g_j(a)$ et qui soient néanmoins telles que l'on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait que b n'apparaisse pas comme devant être aussi bonne que a ?

Il est clair que si ce test 2.2.2 est positif en ce sens que l'on arrive à argumenter en faveur de $b \text{ I } a$ et $\text{Non}(b^* \text{ S } a_*)$, alors la famille F considérée contrevient à la première partie de l'axiome 2.2.2. Il est dans ce cas indispensable :

– soit de modifier F afin que le test ne paraisse plus pouvoir être positif ;

– soit si, pour des raisons exceptionnelles, il faut conserver F en l'état, de veiller à ce que, dans le modèle de préférences globales bâti sur F , on n'ait pas $b \succsim a$ et $b \succ a$, comme c'est automatiquement le cas avec les modèles usuels.

Avant de montrer sur un exemple que ce test peut effectivement être positif, énonçons un autre test relatif cette fois à la seconde partie de l'axiome 2.2.2.

TEST 2.2.3 : Est-il possible d'imaginer deux actions a et b vérifiant, pour un critère donné k : $g_k(b) = g_k(a)$ vis-à-vis desquelles on puisse faire valoir des arguments justifiant le fait qu'en améliorant légèrement $g_k(b)$ et/ou en dégradant légèrement $g_k(a)$ tout en maintenant la différence $g_k(b) - g_k(a)$ inférieure au seuil d'indifférence on parvienne à justifier une modification dans la manière dont doivent être comparées les actions b et a ?

Une réponse positive à ce test montre que F contrevient à la seconde partie de l'axiome 2.2.2. Ceci peut se produire lorsque l'écart $g_k(b) - g_k(a)$, non significatif au niveau du critère k , vient s'ajouter à des écarts analogues, eux-mêmes non significatifs relativement aux critères qui les font apparaître. Un cumul de tels écarts, lorsqu'ils vont tous dans le même sens (tous favorables à b par exemple) peut, dans certaines conditions, être jugé significatif au niveau des préférences globales qu'il s'agit de décrire ou de construire (cf. d) ci-après). Il faut dans ce cas :

– soit réduire certains des seuils d'indifférence de telle sorte qu'il n'en soit plus ainsi ;

– soit veiller à prendre explicitement en compte ce phénomène de cumul dans le modèle de préférences globales, ce qui peut poser de délicats problèmes.

Exemple de l'"entretien d'un parc immobilier" - Suite

Revenons à l'exemple de l'entretien d'un parc immobilier présenté au 2.2.2 a). Imaginons deux demandes de travaux a et b respectivement caractérisées par :

– un score d'urgence $g_1(a) = 50$, c'est-à-dire moyen, établi avec une fiabilité également moyenne : $g_2(a) = 0,5$; des performances $g_3(a)$, ..., $g_n(a)$ elles aussi moyennes ;

– un score d'urgence $g_1(b) = 20$ relativement bas, établi avec une fiabilité moyenne $g_2(b) = 0,5$; des performances $g_3(b), \dots, g_n(b)$ significativement au-dessus de la moyenne bien que non excellentes.

Du point de vue des priorités, Z peut se déclarer indifférent entre b et a. Considérons maintenant b^* caractérisé par :

$$\begin{aligned} g_j(b^*) &= g_j(b), \forall j \neq 2, \\ g_2(b^*) &= 0,9. \end{aligned}$$

L'axiome voudrait que Z considère b^* comme au moins aussi prioritaire que a. Or, Z peut avoir une opinion différente et argumenter comme suit en faveur de $a > b^*$. L'indifférence entre b et a s'explique par le fait que, face à des scores d'urgence 50 et 20 moyennement fiables, les meilleures performances obtenues par b selon les critères secondaires que sont $g_3, \dots, g_n$ apparaissent de nature à compenser le désavantage de b selon le critère g_1 . Mais si le faible score selon g_1 est solidement établi comme c'est le cas avec b^* , alors cette compensation n'a plus lieu.

Si Z raisonne ainsi, il a trouvé une réponse positive au test 2.2.2. A l'origine de cette falsification, n'y a-t-il pas, comme dans l'exemple traité au 2.2.1 c), le fait que g_2 ne répond qu'imparfaitement à la définition d'un critère¹ ? C'est fort possible comme le montrent les explications qui suivent mais ce n'est pas obligatoirement le cas.

Imaginons que l'on puisse concevoir (ce qui n'est pas absolument certain) une action b' qui, par tous les aspects des conséquences non pris en compte dans le support de g_2 , soit identique à b mais qui conduise pourtant à $g_2(b') = 0,9$ (c'est dire que b' a les mêmes performances que b^*). Si g_2 est un critère, alors $b' S b$. Selon un argument semblable au précédent bien que ne faisant référence à aucune compensation, Z peut refuser ce jugement de préférences. Il peut au contraire argumenter en faveur de $b > b'$ en faisant observer que le faible score d'urgence de b' étant solidement établi, contrairement à celui de b, il se peut que b soit en fait prioritaire et que, face à cette incertitude, s'il doit faire passer une demande avant l'autre, c'est b qui doit l'emporter.

¹ Cf. glossaire du chapitre 1 : Critère.

Les actions a et b considérées plus haut peuvent servir de point de départ à l'application du test 2.2.3 pour $k = 2$. Il est manifeste qu'avec des performances $g_2(a)$ et $g_2(b)$ légèrement différentes mais dont la valeur absolue de la différence reste inférieure au seuil d'indifférence, il n'est pas possible d'argumenter en faveur d'autre chose que $b \text{ I } a$. Il en est de même avec des valeurs différentes des performances de a et de b selon les critères autres que g_2 . Il ne paraît pas davantage possible de trouver une réponse positive au test pour $k = 3, \dots, n$.

Pour $k = 1$, le test 2.2.3 peut conduire à remettre en question le choix initial de $q_1[g_1(a)]$. Supposons en effet que ce seuil ait été choisi en raisonnant implicitement sur une valeur de la performance moyennement fiable ($g_2(a) = 0,5$). Supposons que l'on ait adopté une valeur constante $q_1 = 10$. On peut alors imaginer deux actions a et b ayant mêmes performances selon tous les critères autres que g_1 vérifiant en outre :

$$g_1(a) = g_1(b) = 75, g_2(a) = g_2(b) = 0,9.$$

Si le score d'urgence de b valait 0,85 au lieu de 0,75, il devrait toujours y avoir indifférence entre a et b ainsi réévaluées puisque les scores d'urgence ne diffèrent pas significativement. Or, pour une fiabilité du score aussi élevée que 0,90, l'écart de 10 peut, en fait, être jugé significatif. Etant donné que le seuil q_1 ne peut¹ pas être regardé comme variable avec $g_2(a)$, il faut en fixer la valeur en se plaçant dans des conditions qui le rendent minimum (à savoir $g_2(a)$ voisin de 1).

d) Remarques

Considérons un couple d'actions b, a tel que :

$$g_j(b) = g_j(a) + q_j[g_j(a)], \forall j \in F.$$

Le théorème 2.2.2 impose alors $b \text{ I } a$. Dans la plupart des cas, ceci ne soulève aucune objection. Chacun des écarts positifs $g_j(b) - g_j(a)$ fait apparaître a comme non significativement différente de b selon le critère g_j . Le raisonnement analytique, critère par critère, conduit naturellement à regarder b comme indifférente à a. Dans certains cas, on peut cependant alléguer ce que nous appellerons un **effet de cumul** pour refuser $b \text{ I } a$ au profit de $b \text{ Q } a$.

Du point de vue de la modélisation des préférences globales, la prise en compte d'effets de cumul se heurte à deux types d'obstacles :

¹ sous peine de complications qu'il est prudent de chercher à exclure (cf. MMCAD, 9.3.1 et 9.3.2).

– Sur un plan théorique, dire que le cumul d'écarts non significatifs peut devenir significatif ne peut s'expliquer que par la présence d'interdépendances entre les critères, lesquelles peuvent, seules, être à l'origine du phénomène de synergie capable de conférer un pouvoir discriminant à la réunion d'écarts qui, considérés isolément, en sont dépourvus. De quelle nature sont ces interdépendances ? Ne diminuent-elles pas l'intérêt et la portée des raisonnements "toutes choses égales par ailleurs" qui confèrent un sens aux différents critères de F ?

– Sur un plan pratique, comment délimiter le contour des configurations (non nécessairement aussi extrêmes que celles envisagées ci-dessus) relativement auxquelles cet effet de cumul opère ?

Faisons observer encore que la façon dont fonctionnent les tests ci-dessus peut fortement dépendre du type de systèmes relationnels de préférences que l'on a pour objectif de décrire ou de construire. Selon qu'on les postule comme étant ou devant être du type (I, P), (S, R), (I, P, Q, R), ..., tel argument apparaîtra adapté ou, au contraire, non adapté pour élaborer une réponse positive à l'un des tests. C'est dire qu'en toute rigueur savoir si l'axiome 2.1.2 est ou non acceptable pour raisonner à partir de F et fonder sur une famille un modèle de préférences globales satisfaisant suppose qu'on ait pris position sur le type de relations de préférences qui doivent effectivement intervenir dans le modèle.

On remarquera enfin que le principe qui est à l'origine de l'axiome de cohésion (cf. a) ci-dessus) suppose que l'on se place dans l'hypothèse où l'une au moins des deux inégalités $g_k(b^k) \geq g_k(b)$, $g_k(a) \geq g_k(a_k)$ est stricte. Il est facile de démontrer que si F satisfait à l'axiome de cohésion tel qu'il est énoncé, alors F satisfait à ce même axiome étendu au cas $g_k(b^k) = g_k(b)$, $g_k(a) = g_k(a_k)$ si F satisfait à l'axiome d'exhaustivité ¹.

2.2.3 Axiome de non redondance

a) Principe

Cette troisième et dernière exigence traduit un souci d'économie. Elle consiste à interdire, dans F, la présence de critères superflus.

Considérons un critère g_h de F et la famille $F \setminus \{h\}$ déduite de F en retirant ce critère. Admettons que les $n - 1$ critères de $F \setminus \{h\}$

¹ En effet, si $g_j(b^k) = g_j(b)$ et $g_j(a) = g_j(a_k)$, $\forall j \in F$, l'axiome d'exhaustivité appliqué au triplet b, b^k, a (a jouant le rôle de c) puis au triplet a, a_k, b^k (b^k jouant le rôle de c) permet d'écrire : $b H a \Rightarrow b^k H a \Rightarrow b^k H a_k$.

suffisent pour faire jouer à cette nouvelle famille le rôle (cf. 2.1) initialement dévolu à F . Il est clair que g_h est alors un critère redondant ; sur quoi prendre appui pour caractériser une telle propriété (l'hypothèse utilisée pour l'introduire paraît trop complexe pour être opératoire et formalisée) ?

Dès lors que l'on considère que, à côté de l'exigence dont il est ici question, seules les deux précédentes (exhaustivité et cohésion) sont à prendre en compte pour définir la notion de cohérence d'une famille F , il apparaît qu'un **critère g_h est redondant** si et seulement si son retrait laisse une famille $F \setminus \{h\}$ satisfaisant aux deux exigences d'exhaustivité et de cohésion.

Dire que g_h est, dans F , un critère redondant (au sens précis qui vient d'être donné à ce terme), c'est dire bien évidemment que g_h est "fortement dépendant" des $n - 1$ critères constituant $F \setminus \{h\}$. Il ne paraît pas pour autant possible de fonder l'exigence de non redondance sur cette notion de dépendance. Celle-ci est difficile à cerner, comme nous le verrons dans les sections suivantes, et donne lieu de ce fait à des concepts variés. Il s'ensuit qu'une famille de critères qui ne contient aucun critère redondant n'est pas pour autant exempte de dépendances entre les critères qui la constituent.

Imposer à F de ne pas contenir de critères redondants ne procède pas seulement d'un désir de simplicité. En effet, la présence de critères redondants complique singulièrement la modélisation des informations inter-critères nécessaires à une agrégation des préférences restreintes aux axes de signification des divers critères en vue d'une modélisation des préférences globales (cf. chapitres suivants).

b) Enoncé formel

AXIOME 2.2.3 (de non redondance) : F ne comporte aucun critère redondant en ce sens que le retrait de n'importe quel critère de F définit une famille qui met en défaut l'un au moins des axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

RÉSULTAT 2.2.4 : Une famille F qui satisfait aux axiomes d'exhaustivité, de cohésion et de non redondance ne contient aucune sous-famille propre ¹ qui satisfasse aux axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

Démonstration

L'axiome d'exhaustivité assure la validité du résultat pour toute sous-famille de la forme $F \setminus \{h\}$. Il faut encore prouver qu'il est toujours vrai lorsqu'on retire de F deux critères ou davantage. Nous établissons ci-après ce résultat pour le retrait des critères g_{n-1} et g_n . Le résultat, sous sa forme générale, découle immédiatement de cette démonstration.

Notons F' la sous-famille obtenue en retirant de g_{n-1} de $F \setminus \{n\}$. D'après l'axiome de non-redondance, $F \setminus \{n\}$ viole soit l'axiome d'exhaustivité, soit l'axiome de non redondance.

1°) $F \setminus \{n\}$ viole l'axiome d'exhaustivité : cela signifie qu'il existe trois actions a, b, c telles que :

$$g_j(a) = g_j(b), \forall j \in F \setminus \{n\}, \\ c H a \text{ et } \text{Non}(c H b) \text{ pour au moins une relation } H \in \{I, P, Q, R, \sim, > S\}.$$

Les trois mêmes actions mettent en défaut l'axiome d'exhaustivité après retrait de la $n-1^{\text{ème}}$ performance, ce qui prouve que F' viole l'axiome d'exhaustivité.

2°) $F \setminus \{n\}$ viole l'axiome de cohésion : il convient de distinguer deux cas :

i) La violation concerne la première partie de l'axiome du fait, par exemple, de l'existence de deux actions a et b telles que, pour un critère k :

$$b P a \text{ et } \text{Non}(b^k P a^k) ;$$

si $k \neq n-1$, alors F' viole encore l'axiome de cohésion (la cause de violation demeurant la même).

Si $k = n-1$, alors F' viole l'axiome d'exhaustivité : en effet, le triplet d'actions (b, b^k, a) vérifie :

$$g_j(b) = g_j(b^k), \forall j \in F', b P a \text{ et } \text{Non}(b^k P a).$$

Le même raisonnement vaut en substituant Q ou I à P .

¹ c'est-à-dire formée de au plus $n-1$ des critères de F .

ii) La violation concerne la seconde partie de l'axiome. C'est dire qu'il existe un critère k ayant un triplet d'actions (a, b, b^k) vérifiant :

$$g_j(b^k) = g_j(b), \forall j \in F \setminus \{n, k\}, b^k I_k b$$

$b H a$ et $\text{Non}(b^k H a)$ pour au moins une relation $H \in \{I, P, Q, R, \sim, >, S\}$.

Si $k \neq n - 1$, alors F' viole encore l'axiome de cohésion (la cause de violation demeurant la même).

Si $k = n - 1$, alors F' viole l'axiome d'exhaustivité (cf. triplet (b, b^k, a)).

CQFD.

Si une famille F satisfait à l'axiome d'exhaustivité, cela ne signifie nullement que l'on ne puisse concevoir une famille ayant au plus $n - 1$ critères, certains d'entre eux n'appartenant pas à F , qui satisfasse aux axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

c) Test opérationnel

TEST 2.2.4 : Existe-t-il un critère g_h dont le retrait de F définisse une famille vis-à-vis de laquelle aucun des tests 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 ne fournisse de réponse positive ?

Si un critère g_h répond à la question, il peut être regardé comme critère redondant et la famille $F \setminus \{h\}$ peut être avantageusement substituée à F . Pour mieux comprendre la portée de ce test, le lecteur peut chercher à l'appliquer aux deux exemples précédents : choix d'un premier emploi, entretien d'un parc immobilier ; il vérifiera aisément qu'aucune des deux familles introduites aux 2.2.1 c) et 2.2.2 c) à propos de ces deux exemples ne comporte de critères redondants. Evoquons succinctement un troisième exemple ayant trait au **tracé d'une liaison à grande vitesse** afin d'illustrer ce que peut être un critère redondant.

Exemple : Tracé d'une liaison à grande vitesse

Soit à comparer différents tracés d'une ligne de transport devant relier, à grande vitesse, deux aéroports. Imaginons que, pour ce faire, la famille F comporte :

- g_1 : longueur de la ligne,
- g_2 : coût de l'investissement,
- g_3 : coût d'entretien annuel,
- g_4 : gain de temps pour les passagers,
- g_5 : impact sur le trafic des aéroports ;
- g_6 : impact des nuisances sonores pour les riverains ;
- g_7 : impact de l'effet de coupure provoqué par la ligne.

Admettons que cette famille satisfasse aux axiomes 2.2.1 et 2.2.2. Il est très vraisemblable qu'il en sera alors de même avec la famille $F \setminus \{g_1\}$ formée des six critères g_2 à g_7 . Il paraît à peu près impossible d'imaginer une paire d'actions fournissant une réponse positive à l'un quelconque des tests 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3. Le critère g_1 est, dans ces conditions, redondant.

2.2.4 Famille cohérente de critères

Les considérations qui précèdent justifient la définition suivante :

DÉFINITION 2.2.1 : Famille cohérente de critères (f.c.c.) : F est une famille cohérente de critères (f.c.c.) dans un contexte décisionnel si tout intervenant Z accepte ou est supposé accepter de fonder le modèle de préférences globales sur d'une part les n critères formant F en tant que modèle de préférences à un niveau restreint et, d'autre part, les axiomes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 en tant qu'expression de principes de cohérence entre cette modélisation à un niveau restreint et celle qui est recherchée à un niveau global.

2.3 CONCEPTS ET PROPRIÉTÉS EN MARGE DE LA COHÉRENCE

Les axiomes d'exhaustivité, de cohésion, de non redondance formalisent des exigences en-dehors desquelles il paraît difficile de vouloir bâtir un modèle de préférences globales en limitant l'information spécifique à chaque action aux seules valeurs de n triplets de la forme $(g_j(a), q_j[g_j(a)], p_j[g_j(a)])$, $\forall j \in F$. On peut certes imaginer d'autres exigences qui paraîtront souvent naturelles mais toutes celles auxquelles nous avons songé nous ont paru

trop astreignantes pour être systématiquement imposées. Celles que nous présentons ci-après sont néanmoins satisfaites par beaucoup de modèles de préférences globales effectivement utilisés en pratique. Ceci implique l'intérêt des définitions auxquelles elles conduisent.

2.3.1 Famille inductive

Dans une famille F , chacun des critères correspond à un axe de signification pour lequel il est admis ¹ que la comparaison, toutes choses égales par ailleurs, de deux actions quelconques a et b a un sens en termes de surclassement. Il est de ce fait naturel d'attendre de tout critère $g_k \in F$ que :

$$\begin{aligned} g_j(b) &= g_j(a), \forall j \neq k \text{ et } b S_k a \Rightarrow b S a^2, \\ g_j(b) &= g_j(a), \forall j \neq k \text{ et } b I_k a \Rightarrow b I a. \end{aligned}$$

Il en est bien ainsi dans toute famille F cohérente car les implications ci-dessus sont des cas particuliers du résultat 2.2.3 sur la contagion du surclassement.

Supposons maintenant que la comparaison de b et a selon le critère g_k justifie le remplacement de S_k par P_k . Est-on de ce seul fait fondé à remplacer S par P ? Nous allons expliquer pourquoi il n'en est rien, même dans une famille cohérente. Pourtant, on peut souhaiter, au moins pour certains critères, qu'il en soit bien ainsi. Ceci explique la raison d'être des définitions qui suivront.

Nous avons déjà souligné, à la fin du 2.2.1 d), que la condition $g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k$, est une condition plus faible que celle qui intervient pour asseoir les relations S_k, I_k, Q_k, P_k . Ce genre de relations, restreintes à l'axe de signification du critère g_k , n'acquiert en général une signification au niveau des préférences globales que si les actions en cause sont identiques eu égard aux aspects des conséquences non modélisées dans le support de g_k . Cela explique que les relations d'induction formulées au début de ce paragraphe 2.3.1 ne découlent pas logiquement de la seule définition des critères constituant une

¹ Cf. 1.6 et glossaire du chapitre 1 : Critère.

² S ne pouvant ici laisser la place à une relation fondamentale différente de I que si S_k laisse aussi la place à une autre relation fondamentale.

famille F quelconque. Si ces implications sont valables dans une f.c.c., cela est étroitement lié à la manière dont l'axiome de cohésion met en jeu les relations S_k et I_k . Toutefois, ni cet axiome ni les autres ne font intervenir P_k ni directement, ni indirectement. On ne peut donc espérer en déduire qu'une préférence stricte, établie de façon restreinte à l'axe de signification d'un critère (toutes performances égales par ailleurs), induit obligatoirement une préférence stricte au niveau global.

Il suffirait de modifier légèrement l'axiome de cohésion pour que l'induction qui en découle pour S et I en découle aussi pour P . Nous avons écarté ce parti car, à notre avis, il affaiblit trop la portée du concept de f.c.c. En effet :

– Il exclut de F tout critère g_k tel que les conditions permettant de séparer (toutes performances égales par ailleurs) $b P_k a$ de $b Q_k a$ dépendent de certaines des valeurs des performances communes.

– Il exclut qu'un critère g_k conduise à :

$$g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k, b P_k a \text{ et } b Q_k a.$$

Pourtant, le fait que, sur l'axe de signification du critère g_k , la différence $g_k(b) - g_k(a)$ soit jugée suffisamment probante pour fonder une préférence stricte sur l'axe de signification de ce critère ne constitue pas toujours un argument suffisant pour asseoir une préférence stricte au niveau global, notamment lorsque le critère g_k est peu important et que des imprécisions, incertitudes, indéterminations rendent précaires les égalités des autres performances.

DÉFINITION 2.3.1 (critère inductif dans F) : Un critère g_k est inductif dans F si :

$$g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k \text{ et } b H_k a \Rightarrow b H a, \forall H \in \{I, Q, P, \succ, S\}^1.$$

DÉFINITION 2.3.2 (famille inductive) : Une famille F est inductive si elle est cohérente et si chacun de ses critères est inductif dans F .

¹ Au second membre, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle peut impliquer (P exceptée car remplacer $\succ$ ou S par P reviendrait à supposer une préférence plus affirmée au niveau global qu'au niveau restreint).

RÉSULTAT (sur la contagion des préférences) : Dans une famille inductive F :

$$[b S_j a, \forall j \neq k \text{ et } b P_k a] \Rightarrow b P a,$$

$$[b S_j a, \forall j \neq k \text{ et } b Q_k a] \Rightarrow b \succ a^1.$$

On établit aisément ce résultat en procédant de manière similaire à ce qui a été fait pour le résultat 2.2.3.

2.3.2 Famille séparable

Dans ce paragraphe, J désigne une sous-famille de F non identique à F. On note FJ la sous-famille des critères de F n'appartenant pas à J. Cette dernière est nécessairement non vide.

Considérons deux actions a et b ayant mêmes performances pour tout critère n'appartenant pas à une famille définie J. Intéressons-nous à la manière dont elles se comparent dans un modèle de préférences globales fondé sur F supposée cohérente. On peut se demander si, en vertu des axiomes qui définissent cette cohérence ainsi que du type de raisonnement toutes choses égales par ailleurs qui intervient dans la définition de chaque critère, il ne devrait pas être légitime de pouvoir raisonner ce genre de comparaison, abstraction faite des performances communes sur les critères de FJ. Autrement dit, lorsque le modèle conduit à accepter $b H a$, doit-il automatiquement conduire à $b' H a'$ entre deux actions b' et a' caractérisées respectivement comme b et a, à ceci près que les performances communes $g_j(b') = g_j(a'), \forall j \in FJ$ ne sont pas toutes les mêmes que celles communes à b et a ?

Lorsque J contient un unique critère g_k , on sait que la cohérence de F implique :

$$[g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k, \text{ et } b S_k a] \Rightarrow b S a,$$

$$[g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k, \text{ et } b I_k a] \Rightarrow b I a.$$

¹ Au second membre, la relation regroupée peut laisser la place à l'une des relations fondamentales qu'elle implique.

Dans ce cas particulier, il est, d'après la construction même du critère, légitime de raisonner avec g_k toutes performances égales par ailleurs à propos des relations I et S. On a vu au paragraphe précédent pourquoi, même lorsque J est réduite à un seul critère, il n'en va pas de même pour les relations P, Q ou $\succ$. Le raisonnement toutes performances égales par ailleurs sur le critère g_k est donc :

- toujours possible dans une famille cohérente à propos des relations I et S,
- possible à propos des relations P, Q et $\succ$ si g_k est inductif.

Examinons à présent le cas où J contient plus d'un critère. Est-il légitime de raisonner sur les critères de J toutes performances égales par ailleurs ? Comme dans le cas où J ne contient qu'un seul critère, on peut envisager des réponses qui varient avec la nature de la relation H considérée. Un exemple simple va nous permettre de montrer que, même dans le cas le plus favorable (le surclassement), la réponse à la question posée ne peut être systématiquement positive.

Soit F une famille cohérente constituée de trois vrai-critères¹ g_1 , g_2 , g_3 ne pouvant prendre que des valeurs entières comprises entre 0 et 10. Supposons que, sur cette base, il apparaisse légitime de modéliser les préférences globales en ayant recours au vrai-critère² $g(a)$ défini par :

$$g(a) = g_1(a) \cdot g_2(a) + g_2(a) \cdot g_3(a) + g_3(a) \cdot g_1(a).$$

Examinons, sur la base des données du tableau 2.3.1, la manière dont se comparent les actions b et a d'une part, b' et a' d'autre part selon le modèle de préférences globales ainsi défini.

¹ De ce fait, $b I_j a \Leftrightarrow g_j(b) = g_j(a)$.

² dont on peut s'assurer simplement qu'il vérifie les axiomes d'exhaustivité et de cohésion.

Tableau 2.3.1 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3	g
a	10	1	0	10
b	4	5	0	20
a'	10	1	10	120
b'	4	5	10	110

Les valeurs numériques choisies montrent que, dans ce modèle, deux actions qui ont mêmes performances sur le critère g_3 ne peuvent être comparées en ne prenant appui que sur les seules performances qui les différencient, à savoir celles de la sous-famille $J = \{g_1, g_2\}$. En faisant varier la performance commune g_3 de 0 à 10, on passe de $b \text{ S } a$ à $a' \text{ S } b'$ sans que les surclassements inverses n'aient lieu d'être acceptés. Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait introduire un seuil d'indifférence au moins égal à 10, ce qui n'est en rien une conséquence logique des hypothèses.

Cet exemple illustre ce qui peut se passer lorsque l'on veut séparer une sous-famille J des autres critères de F afin de ne faire intervenir que les premiers pour fonder le surclassement entre actions ayant mêmes performances sur les critères de FJ . Pourtant, compte-tenu de la manière dont les critères ont été élaborés, compte-tenu de ce que l'on sait ou de ce que l'on veut relativement aux préférences globales, il peut paraître justifié de poser, a priori, que telle ou telle sous-famille J peut ainsi être séparée des autres critères pour raisonner le surclassement dans les cas dont il vient d'être question. Ceci nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 2.3.3 (sous-famille faiblement séparable) : Dans une famille F , une sous-famille J ($J \neq F$) est faiblement séparable si, considérant quatre actions a, b, a', b' telles que :

$$\begin{aligned} g_j(b) &= g_j(a), \forall j \in FJ, \\ g_j(b') &= g_j(a'), \forall j \in FJ, \end{aligned}$$

$$g_j(b) = g_j(b'), \forall j \in J,$$

$$g_j(a) = g_j(a'), \forall j \in J,$$

alors :

$$b H a \Rightarrow b' H a', \forall H \in \{S, I, R\}.$$

Remarquons que cette définition ne changerait pas si on en éliminait le cas $H = R$. Il est en effet facile de la déduire d'une définition qui serait restreinte à $H \in \{S, I\}$. Moyennant quelques précautions, on pourrait même aller jusqu'à limiter la définition au seul cas $H = S$. Compte-tenu de ce qui a été dit au début de ce paragraphe, une sous-famille constituée d'un unique critère est nécessairement faiblement séparable dans une famille cohérente. Pour des sous-familles contenant plus d'un critère, l'exemple qui vient d'être donné montre qu'il n'en va pas toujours ainsi, même dans une famille cohérente.

DÉFINITION 2.3.4 (sous-famille séparable) : Dans une famille F , une sous-famille J ($J \neq F$) est séparable si, considérant quatre actions a, b, a', b' telles que :

$$g_j(b) = g_j(a), \forall j \in F \setminus J,$$

$$g_j(b') = g_j(a'), \forall j \in F \setminus J,$$

$$g_j(b) = g_j(b'), \forall j \in J,$$

$$g_j(a) = g_j(a'), \forall j \in J,$$

alors :

$$b H a \Rightarrow b' H a', \forall H \in \{I, P, Q, R, S, \succ, \sim\}.$$

Remarquons que le concept de sous-famille séparable contenant un unique critère coïncide avec celui de critère inductif défini au 2.3.1. Notons également que, de même que la faible séparabilité d'une famille de plus d'un critère n'est pas impliquée par la faible séparabilité de chaque critère d'une famille cohérente, une famille ne contenant que des critères inductifs n'est pas nécessairement séparable.

DÉFINITION 2.3.5 (famille séparable, faiblement séparable) : Une famille de critères F est respectivement séparable, faiblement séparable si elle est cohérente et si chacune des sous-familles J ($J \neq F$) qu'elle comporte est respectivement séparable, faiblement séparable.

Notons qu'une famille de critères séparable est nécessairement inductive.

Dans le cas particulier où l'on s'intéresse à un s.r.p. (I, P) au niveau global et où F est une famille de vrai-critères, la séparabilité d'une sous-famille se confond avec une forme d'indépendance traditionnellement appelée "indépendance au sens des préférences". Nous examinerons plus en détail cette forme d'indépendance au chapitre 4.

Signalons enfin qu'une modification apparemment anodine de l'axiome de cohésion rend séparable toute famille F vérifiant, outre l'axiome d'exhaustivité, cette nouvelle version de l'axiome de cohésion. Cette modification consiste à remplacer, dans la seconde partie de l'axiome, l'égalité $g_k(b) = g_k(a)$ par $b I_k a$ (il est tout d'abord facile d'établir que, dans cette nouvelle version de l'axiome, toute sous-famille de $n - 1$ critères est séparable dans F puis que la même propriété vaut pour des sous-familles ayant moins de $n - 1$ critères). Le fait qu'une si faible relaxation d'une condition locale puisse entraîner une propriété globale si forte illustre bien la puissance du raisonnement axiomatique. Il illustre aussi ce qu'il peut y avoir d'artificiel à vouloir légitimer le réalisme de telles structures, telles procédures au nom de considérations purement axiomatiques.

2.3.3 Famille fondamentale

Parmi les n critères d'une famille F, il se peut fort bien que certains ne jouent qu'un rôle accessoire au niveau des préférences globales en ce sens que leur impact sur la modélisation à ce niveau n'est pas fondamental. Il en est ainsi d'un critère g_k lorsque, quelles que soient les actions a et b que l'on puisse concevoir sous les conditions

$$g_k(a) = g_k(b), b H a, H \in \{P, Q, I\},$$

améliorer la performance $g_k(a)$ et détériorer la performance $g_k(b)$ (tout en maintenant inchangées $g_j(a)$ et $g_j(b)$, $\forall j = k$) conduisent à caractériser respectivement deux actions a' et b' qui se comparent "à peu près" comme a et b :

- si $b P a$, alors $b' P a'$ ou $b' Q a'$,
- si $b Q a$, alors $b' Q a'$ ou $b' I a'$,
- si $b I a$, alors $b' I a'$ ou $a' Q b'$.

Dire que g_k n'a pas un impact fondamental au niveau des préférences globales, c'est dire que ce critère n'est susceptible, à lui seul (d'après la façon dont deux actions se comparent selon son axe de signification, toute autre

performance demeurant inchangée par ailleurs), ni d'inverser le sens d'un surclassement, ni de transformer un surclassement en incomparabilité.

DÉFINITION 2.3.6 (critère fondamental) : Le critère g_k est un critère fondamental dans F s'il est possible de concevoir quatre actions a, b, a', b' telles que :

$$\begin{aligned} g_k(a) &= g_k(b), \\ \forall j \in F \setminus \{k\}, g_j(a') &= g_j(a), g_j(b') &= g_j(b), \\ b &P a \text{ ou } b &Q a \text{ ou } [b &S a \text{ et Non}(a &S b)] \text{ et} \\ a' &R b' \text{ ou } a' &P b' \text{ ou } a' &Q b' \text{ ou } [a' &S b' \text{ et Non}(b' &S a')]. \end{aligned}$$

Aucun critère redondant (au sens du 2.2.3) dans une famille F n'est fondamental. Il en va de même dans une famille cohérente F avec un critère g_k dont le seul rôle consiste à départager des actions qui, si elles n'étaient jugées que selon les $n - 1$ autres critères, seraient regardées comme indifférentes. Toujours dans une famille cohérente, un critère g_k peut ne pas être fondamental parce que, une fois définies les performances $g_j(a)$, $\forall j \neq k$, la marge de liberté qui subsiste pour la performance $g_k(a)$ est si étroite que ce critère, même s'il est regardé comme très important, ne peut avoir à lui seul, au niveau des préférences globales, l'impact attendu d'un critère fondamental. Dans bien des cas, on peut vouloir construire F en évitant la présence de tels critères superflus.

DÉFINITION 2.3.7 (famille fondamentale) : Une famille de critères F est fondamentale si elle est cohérente et si chacun de ses critères est fondamental dans F .

2.4 QUELLES FORMES D'INDÉPENDANCES CONVIENT-IL DE RECHERCHER ?

Pour des raisons souvent confuses, l'idée prévaut que la famille F doit être formée de critères "indépendants". Pourtant, aucun des trois axiomes "fondateurs" d'une famille cohérente F ne fait explicitement mention d'une notion d'indépendance. La définition de chaque critère oblige cependant à postuler une première forme d'indépendance. Nous l'approfondissons au 2.4.1. Nous étudions ensuite une autre forme d'indépendance fréquemment regardée comme une hypothèse de travail confortable et acceptable. Le dernier paragraphe traite d'une troisième forme d'indépendance, toujours souhaitable mais souvent impossible à réaliser.

2.4.1 Isolabilité de chaque critère (indépendance au sens des dispersions)

Rappelons que (cf. 1.6), pour chacun des critères g_k de la famille F , il a fallu :

1°) concevoir un axe de signification sur lequel deux actions pouvaient être comparées, abstraction faite des effets ou attributs non pris en compte par le critère ;

2°) définir le mode de calcul de la performance $g_k(a)$ pour toute action a sur la base de l'évaluation de l'action a relativement aux seuls effets et attributs formant le support de g_k (c'est-à-dire jugés pertinents pour fixer la valeur de la performance selon ce critère compte-tenu de l'axe de signification retenu).

Il est rare ¹ que la performance $g_k(a)$ découle de la connaissance d'une caractéristique unique. En-dehors de ce cas, la performance $g_k(a)$ fait intervenir, de par son mode de calcul (ponctualisation sur une dimension, sous-agrégation de plusieurs dimensions, ...) et/ou de par les seuils de discrimination (indifférence, préférence) qui lui sont associés, une représentation de l'action a non réduite à un chiffre unique jugé indiscutable. Cette performance $g_k(a)$ constitue alors une synthèse d'une information plus ou moins complexe. La comparaison de deux actions quelconques a et a' selon l'axe de signification du critère g_k doit, dans tous les cas, pouvoir être faite en ne faisant intervenir les deux actions qu'au travers ² des deux seules performances $g_k(a)$ et $g_k(a')$.

¹ Cela suppose d'une part que l'axe de signification du critère soit identifiable à l'échelle d'une unique dimension et, d'autre part, que toute action puisse être évaluée sur cette dimension au moyen d'un indicateur d'état ponctuel avec des seuils de dispersion par excès et par défaut tous deux nuls (cf. 1.6).

² Par définition (cf. MMCAD, 9.3), le mode de calcul des seuils d'indifférence et de préférence ne fait en effet intervenir l'action dans ce qu'elle a de spécifique qu'au travers de sa seule performance.

Ces rappels (cf.1.6) montrent que concevoir un critère, c'est avant tout isoler certains aspects des conséquences des actions en vue de pouvoir fonder sur eux seuls (c'est-à-dire abstraction faite des autres) des comparaisons reflétant des points de vue spécifiques. De façon plus précise, nous traduirons le fait que :

$$\begin{aligned} g_k(a') \geq g_k(a) &\Rightarrow a' S a \\ \text{dès que } {}^1 g_j(a') = g_j(a), \forall j \in F \setminus \{k\} \end{aligned} \quad (r.2.4.1)$$

en disant que l'axe de signification du critère g_k est **isolable** dans F . Il n'y a axe de signification (et, par conséquent, critère) que s'il y a cette propriété d'isolabilité. Comme on l'a vu, cette isolabilité de l'axe de signification de chaque critère est impliquée par les axiomes définissant une famille cohérente de critères ². L'exemple qui suit en illustre la signification. Nous en discutons enfin la portée, notamment en termes d'indépendance au sens des dispersions.

Exemple de la "comparaison de tracés de lignes à haute tension"

La comparaison de tracés de lignes à haute tension (reliant toutes un premier pôle P_1 à un second pôle P_2) doit prendre en compte, à côté de points de vue techniques, écologiques, agricoles, ..., les gênes de toutes sortes (atteintes à la propriété, esthétique, bruit, craintes d'accidents, ...) que peuvent éprouver les habitants du voisinage de la ligne. Des études ont montré ³ que la densité des zones traversée constituait un bon indicateur pour saisir certains aspects de cette gêne. Toutefois, étant donné un tracé a , la densité varie généralement lorsqu'on le parcourt depuis P_1 jusqu'à P_2 . Bâtir un critère g_1 reflétant l'importance plus ou

¹ Soulignons une fois encore (cf. 2.2.1 d)) que l'égalité des performances n'implique pas l'identité des conséquences.

² En effet, il résulte du résultat 2.2.3 sur la contagion du surclassement que chaque critère est nécessairement faiblement séparable dans une famille cohérente.

³ Voir notamment Grassin (1986).

moins grande de la gêne qu'éprouvent les habitants du voisinage du tracé a consiste donc à élaborer une synthèse des diverses densités des zones successives traversées.

Il est naturel d'introduire dans ce but l'indicateur de dispersion $\delta_i^*(d)$ indiquant, pour chaque valeur de la densité d , le pourcentage de la longueur du tracé a situé en zone de densité d . On peut en outre introduire une fonction $v(d)$ destinée à appréhender le fait que plus la densité d'une zone est forte et plus il est difficile de passer hors de portée de vue des maisons, voire d'éviter les surplombs. Ce "niveau de gêne" $v(d)$ est par conséquent voisin de 0 et très faiblement croissant pour des densités de l'ordre de quelques habitants au km^2 alors qu'il croît rapidement dans les zones un peu plus peuplées (quelques dizaines d'habitants au km^2) pour cesser à nouveau de croître dans les zones très peuplées (effet de saturation). On peut alors envisager de définir la synthèse recherchée par la moyenne du niveau de gêne que procure le tracé a ¹ :

$$g_1(a) = \sum_d v(d) \cdot \delta_i^*(d).$$

Ce qui est appréhendé au travers de la performance $g_1(a)$ reflète en réalité non pas la gêne intégrale que ressentent les habitants situés au voisinage de la ligne a (laquelle est, toutes choses égales par ailleurs, proportionnelle à la longueur $L(a)$ du tracé) mais une gêne unitaire, c'est-à-dire rapportée à une unité de longueur quelconque, le km par exemple. Le fait que la préférence aille systématiquement vers les tracés les plus courts (toutes choses égales par ailleurs) se retrouve dans tous les critères : économiques, techniques, écologiques, agricoles, ... Afin de ne pas surévaluer l'impact de cet "effet longueur" et de clairement cerner la manière dont il doit influencer les préférences globales, il peut paraître légitime d'en faire un critère séparé : $g_n(a) = L(a)$. Dans ces conditions, les autres critères doivent, comme g_1 , être rapportés à l'unité de longueur.

¹ critère de ponctualisation classique, cf. (r.1.6.2).

Montrons que la façon de raisonner ci-dessus peut fort bien ne pas être acceptable, précisément par défaut d'isolabilité de certains axes de signification tel celui du critère g_1 . Considérons pour cela deux tracés a et b de même longueur L dont les dispersions de densité soient respectivement définies par :

- pour a : 95 % du tracé en zones de densité très basse ($v(d)$ voisin de 0),
5 % du tracé en zones de densité très élevée ($v(d)$ voisin de 1),
- pour b : 100 % du tracé en zones de densité faible.

Supposons encore que a et b ne se différencient pas selon les autres critères économiques, techniques, écologiques, agricoles, ... Il s'ensuit que a et b se comparent obligatoirement de la même façon, quel que soit L. Pourtant, il est parfaitement légitime, lorsque L est petit, de préférer le tracé a et, lorsque L est grand, de préférer le tracé b. Il est clair que le critère g_1 ne peut, au côté des autres critères, rendre compte de préférences ainsi faites.

Pour en terminer avec cet exemple, soulignons que la difficulté d'isolabilité qu'il met en évidence ne peut être surmontée en cherchant à définir une gêne intégrale au lieu d'une gêne unitaire. Cela consisterait à remplacer le critère g_1 par un critère g_1' défini de la même manière à partir d'une dispersion $\delta_1''(d)$ fondée non plus comme $\delta_1^*(d)$ sur le pourcentage du tracé en densité d mais sur le nombre de km du tracé en densité d. Etant donné que :

$$g_1'(a) = L(a) \cdot g_1(a),$$

il est clair que le critère g_1' conduira toujours à comparer de la même façon les tracés a et b quelle que soit leur longueur commune L.

Considérons à nouveau le cas, relativement particulier, d'un critère tel que la performance $g_k(a)$ découle de la connaissance exacte d'une caractéristique unique (prix d'achat de l'objet a par exemple). Admettre que a' et a se comparent comme les performances $g_k(a')$ et $g_k(a)$ dès l'instant où elles ont mêmes performances selon les $n - 1$ autres critères traduit l'idée simple qu'on est bien en présence de ce qu'on a appelé un critère : l'isolabilité de son axe

de signification ne peut avoir ici aucune sorte d'implication sournoise. L'exemple qui précède a montré qu'il pouvait en être autrement en-dehors de ce cas. L'isolabilité veut en effet que l'information relativement complexe que synthétise g_k , lorsqu'elle est seule à l'origine de la comparaison de deux actions, conduite à des jugements de préférences qui ne soient en rien influencés par la valeur commune des performances selon les $n - 1$ autres critères. C'est dire que la manière d'opérer la synthèse en un seul chiffre $g_k(a)$ d'une information plus riche (faisant par exemple intervenir un indicateur de dispersion comme dans l'exemple précédent) doit être conçue de telle sorte que, s'il y a égalité des performances avec une quelconque action a' sur tous les autres critères, alors la comparaison de a avec a' puisse être entièrement justifiée (le cas échéant révisée) à partir des deux seuls nombres $g_k(a)$ et $g_k(a')$.

Dans bien des cas, la nécessité d'une synthèse n'est due qu'au caractère dispersé de l'information : l'impact de la mise à exécution d'une action sur une dimension donnée ne peut être convenablement représenté par un nombre certain regardé comme exact. C'est précisément pour faire face à ce type de difficultés qu'ont été introduits les concepts de seuils de dispersion et d'indicateurs de dispersion¹. Vouloir prendre en compte, au travers de l'un et d'un seul des critères de F , le type de conséquences associées à une telle dimension, c'est admettre que, quelle que soit la manière de décrire cette information dispersée (distribution géographique comme dans l'exemple précédent, distribution probabiliste comme dans l'exemple du choix d'un premier emploi, seuils de dispersion par excès et par défaut²), celle-ci se prête à des comparaisons indépendamment des niveaux atteints par les performances selon les autres critères. C'est pourquoi on peut dire dans ce cas que l'isolabilité est une propriété qui implique (de façon quelque peu sournoise) un mode d'indépendance que l'on peut qualifier d'**indépendance au sens des dispersions**.

Lorsque l'indicateur de dispersion est de nature probabiliste, cette indépendance au sens des dispersions est connue sous le nom d'**indépendance au sens des utilités**. Une autre manifestation de l'indépendance au sens des dispersions se retrouve dans le concept de seuils de discrimination tel que nous l'avons défini³. Dire en effet que les seuils q_k et p_k (lesquels marquent respectivement la frontière entre les zones d'indifférence et de préférence faible, de préférence faible et de préférence stricte) peuvent recevoir une valeur indépendante du niveau des performances selon les autres critères, c'est faire une hypothèse qui est dans l'esprit de l'isolabilité. Soulignons cependant que

¹ Cf. 1.5 et 1.6.

² Cf. 1.6.3, (r.1.6.6).

³ Cf. 1.6.

c'est aller plus loin que ce que requiert la définition d'un critère et l'isolabilité de son axe de signification au sein de F .

La façon de se prémunir contre les implications sournoises de cette propriété d'isolabilité¹ lorsque l'on conçoit les divers critères de F dépend du type de démarche adopté. Dans le cadre d'une démarche descriptive, il convient, en toute rigueur, de vérifier que la réalité est bien conforme aux hypothèses d'indépendance requises par les critères choisis. Dans le cadre d'une démarche constructive, il s'agit plus simplement de savoir si des hypothèses constituent ou non une base de travail acceptable pour raisonner, argumenter, transformer les préférences.

2.4.2 Séparabilité de chaque sous-famille de critères (indépendance au sens des préférences)

Dire d'une famille F qu'elle est séparable ou seulement faiblement séparable (cf. définition 2.3.5), c'est reconnaître la validité du raisonnement "toutes choses égales par ailleurs" dans des conditions très larges. Comme nous l'avons souligné à maintes reprises, le concept même de critère (propriété d'isolabilité), tout comme celui de famille cohérente F (axiome de cohésion) se fondent sur un usage restreint de ce mode de raisonnement. Ceci n'implique cependant pas que toute sous-famille J contenant au moins deux critères soit nécessairement faiblement séparable dans F . Nous allons tout d'abord illustrer ce fait (de façon moins abstraite que nous ne l'avons fait au 2.3.2) en faisant appel à un autre exemple, celui du **choix d'un nouvel emploi**. Nous donnerons ensuite un premier aperçu du rôle joué par cette forme d'indépendance (qu'est la séparabilité) ainsi que des raisons qui poussent à la rechercher.

Exemple du "choix d'un nouvel emploi"

Monsieur Z est à la recherche d'un nouvel emploi. Depuis de nombreuses années, son travail l'oblige à passer en moyenne trois

¹ Soulignons que la synthèse qu'opère un critère g_k peut avoir une autre origine que le caractère dispersé de l'information : c'est dire que l'idée d'indépendance au sens des dispersions (et, a fortiori, des utilités) est moins générale que celle d'isolabilité.

nuits par semaine hors de son domicile et il souhaiterait maintenant trouver un travail plus sédentaire. Il voudrait en profiter pour quitter la petite ville dans laquelle il réside pour habiter dans une grande agglomération et pouvoir ainsi aller plus facilement en famille au concert, au théâtre, visiter une exposition ou, tout simplement, sortir de temps en temps dans un quartier animé. Il aimerait, de surcroît, améliorer son salaire. Imaginons qu'il juge tout emploi qu'il convoite à partir des trois critères suivants :

- g_1 : pourcentage de nuits qu'il passera à son domicile ;
- g_2 : note (entre 0 et 10) traduisant l'attrait de l'agglomération dans laquelle il lui faudra résider ;
- g_3 : variation relative du salaire annuel en %.

Supposons qu'en vue d'expliciter ses préférences il cherche à comparer les quatre emplois a , b , a' , b' dont les performances sont données tableau 2.4.1. Il est clair qu'il préfère a' à a et b' à b . Intéressons-nous plus particulièrement à la manière dont il compare a et b d'une part, a' et b' d'autre part.

Il juge a préférable à b . Dans les deux cas, son salaire demeure égal à ce qu'il est aujourd'hui. Avec a , il accroit beaucoup moins sa sédentarité qu'avec b mais il estime que les différences d'attrait entre les deux localisations constituent un élément décisif en faveur de a . A ses yeux, il en va autrement lorsqu'il compare a' et b' . L'importante augmentation de salaire commune à ces deux emplois peut, en partie, servir à financer des sorties lui permettant de satisfaire ses aspirations culturelles et artistiques. De ce fait, l'intérêt qu'il porte à l'agglomération de a' perd de sa force face à l'attrait que représente une activité totalement sédentaire. Il préfère donc b' à a' . Dans ces conditions, la sous-famille $J = \{g_1, g_2\}$ n'est même pas faiblement séparable dans F puisque l'on a :

$$\begin{aligned} & a \text{ } S \text{ } b \text{ et Non}(b \text{ } S \text{ } a), \\ & \text{Non}(a' \text{ } S \text{ } b') \text{ et } b' \text{ } S \text{ } a'. \end{aligned}$$

Une famille F étant donnée, supposons qu'elle ait été utilisée pour définir un système relationnel de préférences sur A . Il s'ensuit que, pour toutes paires d'actions, on est en mesure de

dire laquelle des relations de préférences H les relie et dans quel sens. Dans ces conditions, il est facile de tester si, vis-à-vis du modèle de préférences globales ainsi défini sur l'ensemble A considéré, F est ou n'est pas séparable, est ou n'est pas faiblement séparable. On constate que la plupart des modèles sur lesquels l'aide à la décision prend effectivement appui implique que F soit au moins faiblement séparable. Le modèle de préférences globales est couramment obtenu en ayant recours à ce que nous appellerons, au chapitre suivant, une procédure d'agrégation multicritère. Nous verrons que les procédures classiques qui se fondent sur l'idée de somme pondérée et, plus généralement, sur les formes additives et multiplicatives que préconise la théorie de l'utilité multiattribut requièrent la séparabilité de F . Celles (comme ELECTRE) qui se fondent sur les concepts de concordance et de discordance se satisfont de la faible séparabilité. C'est dire l'importance du rôle joué par cette forme d'indépendance.

Tableau 2.4.1 : Exemple du choix d'un nouvel emploi

Action \ Critère			
	g_1	g_2	g_3
a	75	10	0
b	100	2	0
a'	75	10	40
b'	100	2	40

Changeons d'optique : la famille F étant toujours traitée comme une donnée, supposons que l'on veuille maintenant l'utiliser pour définir un système relationnel de préférences sur A . On sait que la plupart des procédures auxquelles on peut songer vont impliquer que F soit exploitée comme si elle était au moins faiblement séparable, voire séparable. Il devient alors nécessaire de s'interroger sur la légitimité de cette forme d'indépendance. Pour cela, on est naturellement tenté de chercher une réponse à la question : " F est-elle faiblement séparable, séparable ?".

Telle qu'elle est formulée, la question ci-dessus n'a, le plus souvent, pas de sens. En effet, pour qu'elle en ait un, il faut tout d'abord qu'il existe quelque part un système relationnel de préférences qui soit le lieu où cette forme d'indépendance est ou n'est pas vérifiée. Il faut ensuite avoir accès à ce système sans le perturber tout en parvenant à valider ou à falsifier la propriété. Ce sont-là des conditions rarement remplies en pratique. Rappelons (cf. 1.7) que, pour des raisons sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici, le système de préférences que l'on cherche à définir en vue de l'aide à la décision ne doit pas et ne peut pas être systématiquement pensé comme reflet ou description d'un système qui est supposé implanté dans la tête d'un individu bien identifié dont il dicte souverainement les choix.

Plaçons-nous néanmoins dans un cas où il soit possible d'identifier un individu Z dont on cherche à décrire les préférences relativement aux actions de A en prenant appui sur la famille F. Afin que la question formulée ci-dessus ait un sens, il faut encore admettre que, pour n'importe quelle paire d'actions, la relation H qui les relie s'impose à Z de façon suffisamment nette et stable pour qu'en en prenant localement et partiellement connaissance, un observateur extérieur ne risque pas, par les questions qu'il soulève, les réflexions et réactions qu'il suscite de la part de Z, de changer, voire de créer ¹, ce qu'il ne devrait qu'observer. Mais, si l'on considère au contraire que le système de valeurs, les convictions, l'expérience de Z ne structurent qu'imparfaitement ces préférences par référence à un réseau de lignes de force relativement intangible qui enserre dans ses mailles des zones d'interrogation, d'opinions fragiles, voire conflictuelles et contradictoires, on est forcé d'admettre que les questions posées, les réflexions et réactions suscitées puissent contribuer, dans un sens ou dans un autre, à lever les interrogations, à trancher les conflits, à dépasser les contradictions et, pourquoi pas, à déstabiliser certaines convictions. On est alors amené à se demander si, face à la complexité et au caractère

¹ Cf. Roy (1987).

artificiel des situations sur lesquelles Z doit s'interroger ¹, l'homme d'étude qui cherche à savoir si F est ou non séparable n'influence pas fortement la réponse, soit inconsciemment par la manière dont il formule les questions, soit plus consciemment par le désir qu'il a d'arriver à de telles conclusions.

Lorsque, pour les raisons qui précèdent, on ne peut dire si F est ou n'est pas séparable, est ou n'est pas faiblement séparable, on peut adopter une démarche constructive et reformuler comme suit la question posée plus haut : "l'hypothèse de séparabilité ou de faible séparabilité constitue-t-elle une base de travail acceptable pour construire, sur F, un modèle de préférences globales approprié à l'aide à la décision ?". Si la réponse est non, deux points peuvent être envisagés :

- chercher à bâtir un modèle ad hoc ² dans lequel le type d'indépendance que l'on estime devoir être pris en compte s'avère convenablement traduit, au moins sur un plan qualitatif (il suffit de se reporter à l'exemple du choix d'un nouvel emploi pour concevoir combien cela peut être difficile à réaliser) ;
- chercher à modifier l'axe de signification d'un ou plusieurs critères de façon à faire disparaître, dans la nouvelle famille ainsi conçue, le type de liaisons qui a été jugé irréductible dans la première (nous illustrons ci-après cette seconde possibilité).

Dans l'exemple ci-dessus (du choix d'un nouvel emploi), on peut tout d'abord modifier l'axe de signification du critère g_2 pour en faire un critère g_2' qui reflète l'amélioration des conditions d'accès à la grande agglomération et à la culture qu'offre le nouvel emploi. La note (toujours comprise entre 0 et 10) par laquelle Z évalue la performance selon ses nouveaux critères doit maintenant prendre en compte la part du supplément de salaire qu'il envisage d'allouer au financement de sorties lui permettant de satisfaire ses aspirations culturelles et artistiques. La perfor-

¹ Cf. chapitre 4.

² On verra des exemples de ce type de modèle au 4.2.2.

mance selon le critère g_3 doit ensuite être rabaisée d'autant de façon à éviter tout double compte. Ceci change un peu l'axe de signification de ce dernier critère et en fait un critère g_3' .

Avec la famille $F' = \{g_1, g_2', g_3'\}$, les performances de a , b , a' n'ont aucune raison d'être différentes de celles que montre (sur la base de F) le tableau 2.4.1. En revanche, les performances de b' peuvent, par exemple, être modifiées comme suit :

$$g_1(b') = 100, g_2'(b') = 9, g_3'(b') = 30.$$

Le fait que Z préfère a à b et b' à a' ne contredit plus l'hypothèse de séparabilité de la sous-famille $\{g_1, g_2'\}$ dans F' . De façon plus générale, la forme de liaisons mises en avant pour falsifier la séparabilité de F est maintenant internalisée dans le critère g_2' et rien ne paraît plus devoir s'opposer à ce que F' soit regardée comme une famille séparable.

Supposons que, dans les préférences que l'on cherche à décrire ou dans le modèle que l'on souhaite construire à partir d'une famille F , la sous-famille J soit séparable dans F . Il s'ensuit que, si l'on cherche seulement à comparer des actions qui ont mêmes performances sur les critères de FJ , cette comparaison ne fait intervenir que les performances relatives aux seuls critères de J . Supposons enfin que ce genre de comparaisons ne fasse intervenir ni incomparabilité, ni préférence faible, ni intransitivité de I ou de P . On est alors dans les conditions qui ramènent la séparabilité à l'indépendance au sens des préférences (cf. 2.3.2).

Dans le corps d'hypothèses qui vient d'être précisé, la sous-famille J définit un préordre complet sur tout sous-ensemble d'actions dont les performances ne diffèrent que sur les seuls critères de J (ce préordre n'étant en rien influencé par les valeurs particulières des performances selon les critères de FJ). Ceci équivaut à dire que la famille J se comporte comme un vrai-critère. C'est pourquoi, à la suite de Ting (1971), nous parlerons dans ce cas de sous-famille contractable dans F en un vrai-critère. Le lecteur constatera qu'il est aisé d'étendre ce concept de façon à pouvoir parler d'une sous-famille J contractable dans F en un pseudo-critère.

Soulignons que si le critère g_j obtenu par une telle contraction est formellement substituable dans F à la sous-famille J (pour décrire ou construire des préférences), son axe de signification peut paraître artificiel et, pour cette simple raison, s'avérer impropre à une démarche constructive.

Enfin, il est clair qu'il ne peut y avoir contractabilité d'une sous-famille J en un critère de nature imposée (pseudo, pré ou quasi-critère) que si les trois conditions ci-après sont remplies :

- J est séparable dans F ;
- la prise en compte des seuls critères de J , toutes choses égales par ailleurs, exclut toute incomparabilité ;
- les relations I, P, Q associées aux seuls critères de J concernent une structure ordonnée compatible avec la nature imposée du critère (cf. 1.4 et 1.6).

Lorsque la procédure d'agrégation multicritère (cf. chapitre 3) revêt une forme additive ou multiplicative, les trois conditions envisagées ci-dessus sont remplies. Il s'ensuit que toute sous-famille apparaît alors comme contractable. Le lecteur vérifiera sans peine que, dans les méthodes ELECTRE au contraire, aucune sous-famille n'est contractable.

2.4.3 Absence de facteurs influençant conjointement plusieurs critères (indépendance d'ordre structurel)

Considérons à nouveau la famille F' (séparable) définie ci-dessus dans le cadre de l'exemple du choix d'un nouvel emploi. Les critères g_2' et g_3' ne sont pas structurellement indépendants en ce sens que si un nouvel emploi conduit à une performance excellente selon le critère g_3' , alors Z ne peut lui attribuer une note nulle (ni même trop mauvaise) selon le critère g_2' .

Dans les problèmes de choix de tracés d'une liaison ferroviaire ¹, routière ² ou de lignes à haute tension ³, il n'est pas rare que la famille F de critères fasse intervenir un facteur commun à plusieurs des critères considérés, à savoir la longueur du tracé. Pour ces critères, en général, plus long est le tracé et plus mauvais il apparaît selon ces critères.

Les exemples évoqués ci-dessus montrent que l'on peut être fréquemment conduit à élaborer une famille F de critères telle que deux ou davantage, formant une sous-famille J , présentent une

¹ Ministère des Transports (1984).

² Cf. MMCAD, 10.3.2.

³ Cf. ci-dessus, exemple du tracé de lignes à haute tension.

liaison d'ordre structurel (au moins relativement à l'ensemble A que l'on considère). Si F est une famille cohérente, cette liaison ne peut évidemment pas être fonctionnelle : l'un au moins des critères de J serait, dans ce cas, redondant. La liaison peut être due à la présence de facteurs (qui peuvent être externes et/ou implicites) susceptibles, dans certains cas tout au moins, d'influencer conjointement les performances des critères de J. Certaines configurations de ces performances peuvent alors s'avérer invraisemblables ou encore des corrélations nettement marquées peuvent être mises en évidence à partir de l'ensemble A. Dans de telles conditions, aucun des critères de J ne peut être éliminé puisque, relativement aux autres, ils véhiculent une part d'informations additionnelles indispensables pour raisonner les préférences. Pourtant, on est tout naturellement conduit à se demander si, en cherchant à bâtir un modèle de préférences globales sur F, on ne court pas un risque : celui de faire jouer un rôle excessif à ce qui est à l'origine de la liaison. On parle alors de "surpondération", de "double compte". Pour comprendre ce dont il s'agit, il convient, une fois de plus, de situer la question posée dans chacune des deux démarches descriptive et constructive.

Dans une démarche descriptive, le modèle de préférences globales qu'il s'agit de décrire pré-existe par définition. Si un rôle excessif est dévolu à quelque aspect que ce soit, cela signifie que la description n'est pas fidèle. La question doit donc être reformulée comme suit : "sachant que la famille F contient une sous-famille J de critères structurellement liés, cela la rend-elle inapte à la description visée ?". Il est clair que cela dépend du cas considéré ¹.

Dans une démarche constructive, vis-à-vis de quelles normes pourra-t-on dire que ce qui est à l'origine de la liaison joue un rôle excessif ? Dans la mesure où les facteurs et phénomènes complexes qui sont responsables de cette liaison structurelle entre

¹ Voir notamment à ce sujet MMCAD, 10.3.1.

les critères de J sont trop abstraits ¹ ou trop éloignés ² de ce à partir de quoi s'élaborent, se justifient ou se transforment les préférences, le risque redouté perd toute signification claire. Lorsque, au contraire, ces facteurs et phénomènes sont suffisamment concrets et proches de ce à partir de quoi l'on cherche à raisonner les préférences, l'idée d'une "juste part" qu'il doivent prendre dans la formation de ces dernières peut acquérir un sens. Le risque redouté plus haut est alors lié au fait qu'à l'insu du modélisateur (à cause de la liaison structurelle) ces facteurs et phénomènes ne soient pas cantonnés dans leur juste rôle. Ce risque est toutefois totalement écarté dès lors que chacun des critères de J renvoie à des bénéficiaires distincts ou encore à des points de vue autonomes ³ pouvant par exemple être incarnés par des acteurs distincts.

En conclusion, chercher à travailler avec une famille F de critères, tous structurellement indépendants, paraît sans aucun doute être une orientation recommandable. Il convient toutefois de l'abandonner dès lors qu'elle conduirait à faire intervenir des critères artificiels dont les axes de signification, tout comme les unités dans lesquelles s'expriment les performances, risqueraient d'apparaître obscurs et éloignés de ce à partir de quoi les acteurs conçoivent, argumentent, modifient leurs préférences.

¹ Cf. exemple du choix d'un nouvel emploi en début de 2.4.2.

² Cf. MMCAD, 10.3.2 : exemple du tracé autoroutier.

³ Dans l'exemple du choix d'un nouvel emploi, on peut parler de points de vue autonomes à propos de g_1 : conditions de travail, g_2' : conditions de loisirs, g_3' : gain net.

Chapitre 3

CONFLITS ENTRE CRITÈRES ET PROCÉDURES ÉLÉMENTAIRES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE

RÉSUMÉ

3.1 Dans cette section, on met l'accent sur les liens qui existent entre le caractère conflictuel des critères et le mode de comparaison, en termes de préférences globales, de deux actions.

Dans un premier paragraphe, on précise ce qu'il faut entendre par critères en conflit. La relation de préférences qui lie deux actions peut alors être vue comme la résultante de ces conflits. On montre que deux types de considérations peuvent intervenir pour élaborer cette résultante et, par conséquent, définir un s.r.p.

Au paragraphe suivant, on introduit le concept de **coalition concordance** $C(b \ H \ a)$ avec l'affirmation $b \ H \ a$, $H \in \{S, >, P, Q, I\}$ (r.3.1.4). Cela nous amène à cerner une première facette de cette notion complexe et ambiguë à laquelle on se réfère en parlant d'importance relative d'un critère vis-à-vis des autres.

A partir d'un exemple numérique, on montre que, même dans le cadre de considérations de premier type, la seule analyse des divers niveaux de concordance est tout à fait insuffisante pour asseoir une relation de préférence à un niveau global. Cela conduit (au 3.1.3) à regarder la coalition $C(a \ P \ b)$ comme discordante avec la proposition $b \ S \ a$. Moyennant l'introduction d'un nouveau seuil appelé seuil de veto, chaque critère de cette coalition doit être amené à s'opposer à l'affirmation $b \ S \ a$ (cf. (r.2.3.6)). On montre qu'on approche là une autre facette de la notion d'importance relative d'un critère.

Dans certains cas, on peut souhaiter élaborer un s.r.p. non réduit à une simple idée de dominance sans pour autant devoir faire intervenir des informations précises servant à différencier l'importance des critères. Après quelques rappels sur la relation de dominance Δ_P , on introduit dans ce but

(au 3.1.4) plusieurs relations de surclassement emboîtées : S_Δ (cf. r.3.1.11)), S_{PQ} (cf. (r.3.1.13)), $S_{\Delta Q}$ (cf. (r.3.1.14)), $S_{\Delta P}$ (cf. (r.3.1.15)).

La prise en compte de considérations de type C n'intervient qu'au 3.1.5 où l'on approfondit le mode de calcul consistant à effectuer un bilan des écarts favorables à l'une et à l'autre des deux actions en prenant appui sur une idée de compensation. Le tableau 3.1.3 illustre, sur un exemple simple, ce type de calcul. Les hypothèses restrictives que suppose ce mode de raisonnement sont mises en évidence. On montre que l'on peut s'en affranchir partiellement grâce à une définition relativement générale du concept de **taux de substitution** $r_{j_n}(g)$ (cf. (r.3.1.17)).

Le dernier paragraphe de cette première section traite des informations inter-critères. On définit ce que l'on entend par là dans ce livre ; on souligne le rôle essentiel qu'elles jouent dans la modélisation des préférences globales ; on montre enfin qu'elles relèvent de deux types distincts (cf. les deux types de considérations introduites au 3.1.1).

- 3.2 Dans cette section, on présente et on illustre le concept central de Procédure d'Agrégation MultiCritère (PAMC). Une PAMC y est définie comme une règle permettant, sur la base d'un tableau de performances et d'informations inter-critères, de bâtir un ou plusieurs s.r.p. sur un ensemble d'actions.

Ce concept est ensuite illustré au paragraphe suivant où l'on présente quelques PAMC élémentaires systématisant les raisonnements introduits au 3.1 et constituant le noyau de PAMC plus sophistiquées qui seront introduites dans la suite de cet ouvrage. En particulier, on introduit les PAMC lexicographiques, de type concordance élémentaire, de type concordance-discordance élémentaire et de type somme pondérée.

Dans le troisième paragraphe, on examine comment, selon la PAMC considérée, l'importance relative accordée à certains critères est prise en compte. On montre que cette notion d'importance n'acquiert de signification que relativement à une PAMC définie. On précise ensuite le sens donné aux termes "coefficients d'importance" et "poids".

On conclut enfin ce chapitre en faisant quelques remarques sur les liens et les différences existant entre le problème de l'agrégation des performances et celui de l'agrégation des préférences en théorie du choix social.

Le problème de l'agrégation des performances ne se pose réellement que lorsque des critères divergent dans la façon de comparer certaines actions. Ceci nous amène, au 3.1, à clarifier

l'idée de conflit entre critères puis à présenter rigoureusement les concepts classiques de concordance, discordance, dominance et taux de substitution couramment utilisés pour comparer deux actions à partir d'une famille F de critères pouvant être conflictuels.

Dans les approches opérationnelles 1 et 2, l'aide à la décision prend appui sur un modèle explicite des préférences globales. Ce modèle est obtenu en utilisant une "Procédure d'Agrégation MultiCritère". La section 3.2 vise à préciser et à illustrer ce qu'il faut entendre par là. Cela nous conduit en particulier à introduire quelques procédures élémentaires et à discuter le rôle qu'y joue la notion complexe et ambiguë d'importance relative de chaque critère. Les procédures élémentaires présentées dans cette section visent à préparer le lecteur à aborder les procédures plus complexes qui seront présentées aux chapitres 4 et 5.

3.1 AVEC QUELS CONCEPTS COMPARER DEUX ACTIONS D'APRÈS DES CRITÈRES POUVANT ÊTRE CONFLICTUELS

3.1.1 Critères en conflit dans la comparaison de deux actions

Soit A un ensemble d'actions potentielles et F une famille cohérente formée de n critères. Considérons deux actions potentielles a et b que l'on cherche à comparer au niveau des préférences globales sur la base des performances données par les critères de F.

Considérons tout d'abord le cas où les n critères sont unanimes pour faire apparaître a comme au moins aussi bonne que b, c'est-à-dire :

$$a S_j b, \forall j \in F. \quad (r.3.1.1)$$

Nous dirons dans ce cas que **les critères de F ne sont pas en conflit dans la comparaison de a et de b**. Si, comme on le supposera par la suite, les critères de F sont des pseudo-critères,

l'absence de conflit caractérisée par (r.3.1.1) équivaut à :

$$g_j(b) \leq g_j(a) + q_j[g_j(a)], \forall j \in F. \quad (r.3.1.2)$$

Dans ces conditions, a ne domine pas nécessairement b. Lorsque la famille F est cohérente, le résultat 2.2.3 permet cependant d'affirmer que, au niveau global, a surclasse b indépendamment du rôle que l'on souhaite voir jouer à chaque critère.

Considérons maintenant le cas où les critères ne sont pas unanimes pour déclarer que a surclasse b ou que b surclasse a ((r.3.1.1) n'est donc vérifiée ni par le couple (a, b), ni par le couple (b, a)). Nous dirons alors que **les critères de F sont en conflit dans la comparaison de a et de b**. Cette situation de conflit entre critères de F peut être caractérisée par le fait qu'il existe au moins une paire de critères j et k tels que :

$$\text{Non}(a S_j b) \text{ et } \text{Non}(b S_k a),$$

ce qui équivaut à :

$$b \succ_j a \text{ et } a \succ_k b \quad (r.3.1.3)$$

ou encore à :

$$g_j(b) > g_j(a) + q_j[g_j(a)] \text{ et } g_k(a) > g_k(b) + q_k[g_k(b)].$$

Nous nous référerons à la situation caractérisée par (r.3.1.3) en disant que **la paire de critères {j, k} est conflictuelle dans la comparaison de a et de b**.

Nous parlerons de :

- conflit faible si $\succ_j = Q_j$ et $\succ_k = Q_k$;
- conflit fort si $\succ_j = P_j$ et $\succ_k = P_k$;
- conflit dissymétrique présumé favorable à a si $\succ_j = Q_j$ et $\succ_k = P_k$;
- conflit dissymétrique présumé favorable à b si $\succ_j = P_j$ et $\succ_k = Q_k$.

Lorsque les critères de F sont conflictuels dans la comparaison de a et b, on peut, en général, trouver non pas une seule mais

plusieurs paires de critères conflictuels. Porter un jugement de préférence global tel que $a \succ b$, $a \succ b$, $a \succ b$ revient à prendre position sur ce qui apparaît comme la **résultante des conflits**. Cette résultante dépend de la logique d'agrégation et du système de valeurs qui président à la formation des préférences globales. Quels que soient sa logique d'agrégation et son système de valeurs, celui qui cherche à argumenter le jugement de préférences globales qui résulte pour lui des conflits en présence prend appui sur des considérations qui relèvent de l'un, de l'autre ou des deux types suivants :

1°) Considérations de type O. Ces considérations sont celles qui, pour différencier l'influence que peut avoir chacun des critères, font uniquement appel à :

- la nature propre de chacun des critères en conflit et à
- une catégorisation de ceux-ci fondée sur une signification qualitative attribuée aux différences $g_j(a) - g_j(b)$ en fonction de leur position par rapport à des seuils.

Elles exploitent donc avant tout la signification ordinaire (O) des nombres manipulés.

Dans le cas où l'on ne considère qu'une seule paire de critères conflictuels, les considérations de ce type peuvent être illustrées par des propos tels que :

- un conflit dissymétrique présumé favorable à a légitime $a \succ b$ quelle que soit la nature des deux critères en conflit ;
- un conflit dissymétrique présumé favorable à a ne légitime $a \succ b$ que si la nature des critères en conflit ne fait pas apparaître le critère favorable à b comme ayant une influence (en termes d'importance) sur la formation de la résultante considérablement plus forte que celle qu'a le critère favorable à a .

2°) Considérations de type C. Ces considérations sont celles qui font en outre appel au caractère quantitatif des différences $g_j(b) - g_j(a)$ en ce sens que leur valeur, éventuellement corrigée par leur position sur l'échelle du critère j et d'autres caractéristiques liées à la nature de ce critère, permet une comparaison, voire même une mesure, d'"écart de préférence". Elles tirent parti des propriétés cardinales (C) des nombres manipulés. Dans le cas où

l'on ne considère qu'une seule paire de critères conflictuels, les considérations de ce type peuvent être illustrées par des propos tels que :

– si les deux différences positives caractérisant le conflit vérifient $g_k(a) - g_k(b) \geq g_j(b) - g_j(a)$, alors, quelle que soit la nature des deux critères en cause, on est fondé à admettre que a surclasse b ;

– si le rapport $(g_k(a) - g_k(b))/(g_j(b) - g_j(a))$ des différences positives caractérisant le conflit vaut r , alors on est fondé à admettre a surclasse b seulement si r dépasse une certaine valeur, laquelle peut dépendre de facteurs complexes tels que la place sur leurs échelles respective des intervalles $[g_j(a) ; g_j(b)]$ et $[g_k(b) ; g_k(a)]$ ainsi que de considérations de type O (ayant trait notamment à l'importance relative des deux critères).

L'objet de la présente section est de présenter les principaux concepts qui ont pris forme à partir de ces deux types de considérations. Comme nous le verrons tout au long de ce livre, ils jouent un rôle capital pour concevoir et analyser les procédures d'agrégation multicritère (cf. 3.2.1) qui sont couramment utilisées pour expliciter ou construire des systèmes relationnels de préférence.

Les deux paragraphes qui suivent sont respectivement consacrés aux notions de concordance et de discordance. Comme on le verra, les définitions auxquelles elles conduisent se réfèrent, pour l'essentiel, à des considérations de type O ¹. Ces notions vont tout naturellement nous amener à parler de la plus ou moins grande importance de chaque critère et de la représentation quantifiée de cette importance. Nous verrons que chacune de ces deux notions invite à un mode de quantification qui lui est spécifique. Cette quantification vise, dans les deux cas, à caractériser la manière dont chaque critère, en fonction de sa nature propre, affecte la résultante d'un conflit. Ce premier aperçu² sur la complexité, voire l'ambiguïté, de ce à quoi on se réfère

¹ Il ne faut voir là aucune contradiction avec l'usage qui en est fait au chapitre 5 pour bâtir des indicateurs de concordance et de discordance : rien ne s'oppose en effet à ce que ces derniers prennent en compte, de façon accessoire ou locale, des considérations de type C .

² Nous reviendrons à plusieurs reprises sur ce sujet, en particulier au 3.1.6 et au 3.2.3.

lorsqu'on parle d'importance (ou encore de poids) des différents critères explique que l'on consacre le paragraphe 3.1.4 à quelques principes susceptibles de guider le traitement des conflits (en vue de l'élaboration de systèmes relationnels de préférence) en l'absence de toute donnée destinée à différencier (par quantification ou simple hiérarchisation) l'importance propre à chaque critère.

Un mode de raisonnement particulièrement important, fondé principalement sur des considérations de type C, exploite l'idée de bilan par compensation. Nous lui consacrerons l'avant-dernier paragraphe de cette section.

Précisons dès à présent que tous les exemples numériques auxquels nous aurons recours pour illustrer les développements des quatre paragraphes qui suivent concernent une famille F formée exclusivement de critères dont l'échelle a été normée de telle sorte que :

$$0 \leq g_j(a) \leq 100, \forall a \in A \text{ et } \forall j \in F$$

(le nombre n de critères pouvant varier d'un exemple à l'autre).

On montrera enfin, au 3.1.6, que les notions, concepts ou règles dont il va être question dans les quatre paragraphes qui suivent se rapportent à ce que l'on peut appeler des informations inter-critères. Celles-ci jouent, comme on le verra tout au long de ce livre, un rôle essentiel pour passer, en conformité avec les axiomes du 2.1 et compte-tenu des formes de dépendance ou d'indépendance discutées au 2.4, du modèle de préférence au niveau restreint que constituent F et le tableau de performances associé à un modèle de préférence global dépassant la simple relation de dominance.

3.1.2 Analyse de la concordance et hiérarchie de niveau

Supposons que l'on cherche à comparer les actions a et b dont les performances sont indiquées au tableau 3.1.1. Imaginons qu'un acteur Z ait le sentiment plus ou moins confus que, globalement, b n'est certainement pas pire que a . Examinons quels peuvent être

les arguments simples que Z peut mettre en avant pour étayer un tel jugement.

Tableau 3.1.1 : Exemple numérique
Pour tous les critères du tableau, on a $q_j = 7$, $p_j = 15$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
a	10	20	30	40	50	60	70	80	90
b	80	75	70	65	60	55	60	50	40

Dans cette optique, Z est tout naturellement amené à inventorier les critères qui fournissent des jugements de préférence restreints en accord avec l'affirmation $b \succ a$. C'est incontestablement le cas des cinq premiers et même du sixième puisque l'infériorité apparente de b par rapport à a (55 face à 60) n'est pas significative. Nous dirons que ces critères 1 à 6 constituent la sous-famille ou encore la coalition des critères **concordant** avec la proposition $b \succ a$. On notera cette coalition $C(b \succ a)$ et l'on écrira indifféremment :

$$C(b \succ a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ou } C(b \succ a) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}.$$

Les critères 7, 8 et 9 sont concordants avec la proposition $a \succ b$, de même d'ailleurs que le critère 6. Ce dernier figure donc à la fois dans $C(b \succ a)$ et dans $C(a \succ b)$.

Dans cet exemple, le conflit oppose les critères 1 à 5 aux critères 7 à 9. Nous dirons que les premiers constituent la sous-famille ou la coalition des critères concordant avec la proposition $b \succ a$, notée $C(b \succ a)$, alors que les seconds constituent la sous-famille ou coalition des critères concordant avec la proposition $a \succ b$, notée $C(a \succ b)$. Faisons observer que tous les critères de cette dernière coalition ne sont pas concordants avec la proposition $a \succ b$. En conservant le même principe de notation, on a $C(a \succ b) = \{8, 9\}$, sous-famille strictement incluse dans $C(a \succ b)$. Ceci fait ressortir le fait que le critère 7, sans être en concordance avec la proposition $b \succ a$, ne contredit pas cette proposition avec la même netteté que les critères 8 et 9. Rappelons en effet que

dire que, sur ce septième axe de signification, il y a une préférence faible en faveur de a traduit une hésitation (ambiguïté) entre les situations de préférence stricte en faveur de a et d'indifférence entre b et a. Pour ces raisons, le critère 7 ne sera pas considéré comme un critère discordant avec la proposition b S a.

A partir d'une telle analyse, Z peut faire valoir que si chaque critère était représenté par un individu et que l'on procède à un vote, 6 votants sur 9 approuveraient la proposition "b n'est pas pire que a". Un serait hésitant et 2 seraient contre sans hésitation. On peut donc faire valoir le fait que la proposition b S a recueille, sans hésitation, une majorité des deux tiers des critères.

C'est là un mode de raisonnement prenant appui sur la notion de concordance qui appelle quelques remarques importantes :

Remarque 1 : Il ne prend appui que sur des considérations de type O.

Remarque 2 : Il accorde aux critères une importance (un poids) que l'on peut juger identique puisque, dans le dénombrement des voix, chaque critère est compté pour un quelle que soit sa nature ; il est clair qu'on pourrait aisément différencier cette importance en affectant à chaque critère un nombre de voix variable en fonction du rôle qu'on estime devoir lui faire jouer.

Remarque 3 : Pour analyser la proposition b S a, il ne fait intervenir que la coalition $C(b \text{ S } a)$ et ne fait jouer aucun rôle aux critères de la coalition $C(a > b)$. Si cette dernière coalition est "minoritaire", alors, quelles que soient les performances (éventuellement désastreuses pour b) des critères de $C(a \text{ P } b)$, elle ne peut s'opposer à b S a. A l'inverse, si elle est majoritaire, elle suffit à s'opposer à b S a et cela même si $C(a \text{ P } b) = \emptyset$.

Remarque 4 : Il est en harmonie avec les principes qui ont permis de fonder la cohérence de F (cf. 2.1).

Pour s'en convaincre, montrons qu'un modèle de préférence qui serait bâti en utilisant ce mode de raisonnement satisfait bien aux conclusions des résultats 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3.

a) Si $g_j(a) = g_j(b)$, $\forall j \in F$, on a $C(a S b) = C(b S a) = F$. Les propositions $a S b$ et $b S a$ sont donc toutes deux acceptées à l'unanimité des critères. On a donc bien $a I b$, conformément au résultat 2.2.1.

b) Considérons deux actions a et b telles que $b H a$ avec $H \in \{P, \succ, S\}$. Si $b^* \Delta_F b$ et $a \Delta_F a^*$, il est clair que $C(b H a) \subset C(b^* H a^*)$. La proposition $b^* H a^*$ est donc appuyée par un nombre de critères au moins aussi grand que ne l'est la proposition $b H a$. On a donc bien $b^* H a^*$ conformément au résultat 2.2.2. Notons de plus que si $b \Delta_F a$, alors $C(b S a) = F$, ce qui justifie $b S a$.

c) Considérons deux actions a et b telles que $b S_j a$, $\forall j \in F$. On a alors $C(b S a) = F$ et donc $b S a$, conformément au résultat 2.2.3.

Nous laisserons le soin au lecteur de vérifier qu'il en va bien ainsi pour tous les modes de raisonnement introduits au 3.1.

L'exemple ci-dessus nous a amenés à introduire les concepts de **critère concordant** et de **coalition concordante** avec une proposition telle que $b S a$, $b \succ a$ ou $b P a$.

Précisons et complétons les notations auxquelles nous nous conformerons tout au long de cet ouvrage pour désigner ce genre de coalition.

$$C(b H a) = \{j \in F : b H_j a\} \text{ avec } H \in \{S, \succ, P, Q, I\}. \quad (r.3.1.4)$$

Attirons à nouveau l'attention sur le fait que, bien que tous les critères de $C(b Q a)$ ne soient en concordance avec aucune des propositions suivantes $b P a$, $a I b$, $a S b$, ils ne sont pas pour autant en net désaccord avec elles.

Le lecteur établira aisément que :

$$\begin{aligned} C(b P a) &\subset C(b \succ a) \subset C(b S a), \\ C(b S a) \cap C(a S b) &= C(b I a) = C(a I b), \\ C(b S a) \cap C(a \succ b) &= \emptyset, \\ C(b S a) \cup C(a \succ b) &= F. \end{aligned} \quad (r.3.1.5)$$

Revenons à la seconde des remarques ci-dessus. Même lorsqu'on ne fait que dénombrer les critères de $C(b S a)$ (afin de

faire jouer un rôle à la fraction ¹ $\text{card}(C(b \text{ S } a))/\text{card}(F)$ pour valider ou invalider $b \text{ S } a$, on prend parti sur une façon de quantifier cette notion complexe et ambiguë introduite au 3.1.1 sous le nom d'importance des critères. D'une façon plus générale, dès lors qu'on se situe dans le cadre d'une analyse de la concordance et de considérations ne sortant pas du type O, il est naturel en pratique de concevoir une quantification de l'importance des critères dans le schéma suivant ².

a) A chaque critère j , on associe un nombre $k_j > 0$ qui a pour objet de caractériser la plus ou moins grande influence que l'on reconnaît au critère j (compte-tenu de sa nature propre) lorsqu'il doit contribuer à fixer la résultante d'un conflit. C'est ainsi que le simple dénombrement des critères dont il a été question ci-dessus consiste à poser, $\forall j \in F$, $k_j = 1$.

b) On définit une règle de calcul qui, à chaque sous-famille $C \subset F$, associe un nombre $k[C]$ à partir d'un "principe logique" et des données que sont les nombres k_j . On définit de la sorte, pour n'importe quelle coalition C , son **importance absolue** $k[C]$ et son **importance relative** $k[C]/k[F]$. C'est ainsi que la procédure simple suggérée plus haut consiste à poser :

$$k[C] = \sum_{j \in C} k_j$$

(nous verrons au chapitre 5 que d'autres règles, à peine moins simples, peuvent être préférées à celle-ci).

Une fois fixée la règle permettant de déduire l'importance d'une coalition C de l'importance des critères qu'elle renferme, la question se pose de savoir comment procéder pour attribuer une valeur à chacun des coefficients k_j . C'est là un problème délicat

¹ On désigne par $\text{card}(A)$ le cardinal de l'ensemble fini A , c'est-à-dire le nombre d'éléments de A .

² Les progrès récents en intelligence artificielle permettent d'envisager des approches où l'on peut se passer de cette quantification, cf. Pasche (1987, 1991) et Rommel (1989).

qu'il serait prématuré de vouloir aborder maintenant. Nous le traiterons en détail au 5.4.

3.1.3 Analyse de la discordance et effet de veto

Revenons aux données du tableau 3.1.1. Imaginons qu'un autre acteur Z' éprouve, pour sa part, le sentiment plus ou moins confus que, globalement, la proposition "b n'est pas pire que a" est davantage sujette à caution que ne le pense Z. Cela ne signifie pas pour autant que la proposition "a n'est pas pire que b" s'impose aux yeux de Z' . On considère ici qu'il n'a pas pour objectif de faire prévaloir cette dernière proposition mais qu'il cherche seulement des arguments capables de mettre en doute le bien-fondé de b S a.

Dans ce but, Z' doit s'intéresser aux critères de $C(a P b)$ qui sont les critères **discordants** avec la proposition ¹ b S a. Rappelons que, dans cet exemple, $C(b P a) = \{8, 9\}$.

Considérons tout d'abord le critère 8 : Z' peut estimer que si la performance (50) de b sur ce critère est bien inférieure à celle (80) de a avec un écart supérieur au seuil p_8 , cet écart n'est pas pour autant "suffisamment grand" (compte-tenu notamment de la signification du critère 8) pour justifier à lui seul une mise en question de la proposition b S a. Il peut par contre juger qu'il en va autrement avec le critère 9 : il peut en effet faire valoir que l'écart qui sépare 40 de 90 dépasse ce qui est, pour lui, **le seuil de compatibilité de l'acceptation de b S a à partir d'une simple analyse de concordance**. C'est dire qu'aux yeux de Z' l'amplitude de cet écart (accessoirement rapportée à sa position sur l'échelle) donne au critère 9 (compte-tenu de sa nature propre) le pouvoir de mettre son veto au surclassement b S a.

Z peut tenter d'objecter que ce veto serait selon lui acceptable si la coalition concordante $C(b S a)$ ne rassemblait pas tous les

¹ On notera que ces critères sont, a fortiori, discordants avec les propositions $b > a$ et $b P a$; nous nous bornerons cependant ici à analyser la discordance vis-à-vis des seuls jugements formulés en termes de surclassement.

critères qu'elle comporte, autrement dit si son importance relative $k[C(b\ S\ a)]/k[F]$ était moindre. A cela, Z' peut à son tour objecter qu'il serait prêt à admettre cet argument si, au côté du critère 9, il n'y avait pas de critère 8 pour venir renforcer le pouvoir de veto de la coalition discordante $C(a\ P\ b)$.

Ce mode de raisonnement, prenant appui sur les notions de concordance et de discordance, appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Si, dans sa première partie, il ne prend appui que sur des considérations de type O, il fait appel, au moins de façon locale, dans la seconde, à des considérations de type C.

Remarque 2 : Il permet de différencier le rôle dévolu à chaque critère en fonction de sa nature propre puisque, fixer de façon précise les conditions qui donnent au critère j le pouvoir de mettre son veto à un surclassement $b\ S\ a$, c'est caractériser et même quantifier, en un certain sens, l'importance qui lui est reconnue. On aborde là une facette de cette notion complexe et ambiguë qui diffère de celle abordée au 3.1.2, remarque 2.

Remarque 3 : Il échappe à l'objection de la remarque 3 du 3.1.2.

Examinons comment caractériser, aussi simplement que possible, les conditions dans lesquelles un critère discordant j peut, de son seul fait (c'est-à-dire sans faire entrer en ligne de compte d'éventuels autres critères discordants), mettre son veto au surclassement $b\ S\ a$. Parmi ces conditions figure tout d'abord celle qui consiste à admettre que, pour légitimer $b\ S\ a$, seule l'analyse de la concordance entre en ligne de compte. Conformément à ce qui a été dit plus haut, il faut ensuite traduire le fait que b s'avère, selon le critère j , significativement "beaucoup" plus mauvais que a . Autrement dit que la différence $g_j(a) - g_j(b)$ est non seulement supérieure à $p_j[g_j(b)]$ (ce qui caractérise le fait que j est un critère discordant) mais encore supérieure à un autre seuil v_j que l'on appellera le **seuil de veto**. Le seuil v_j , comme tous les autres seuils, peut évidemment varier avec l'origine de l'intervalle considéré, c'est-à-dire avec $g_j(b)$. Afin de rester dans

le cadre de considérations de type O, on n'envisagera pas ici d'autres facteurs ¹ pouvant affecter la valeur de ce nouveau seuil.

Sur ces bases, l'effet de veto peut être caractérisé par :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a) \Rightarrow \text{Non}(b \text{ S } a) \quad (\text{r.3.1.6})$$

(toujours sous l'hypothèse que $b \text{ S } a$ n'est étayé que par l'importance de la coalition concordante). Par conséquent, dans ces conditions, $v_j[g_j(b)]$ se définit ² comme **la plus petite valeur de la différence** $g_j(a) - g_j(b)$ ($g_j(b)$ étant regardé comme fixé) sur un critère j discordant avec $b \text{ S } a$ (c'est-à-dire tel que $j \in C(a \text{ P } b)$) **qui, dès lors qu'elle est dépassée, interdit l'acceptabilité du surclassement $b \text{ S } a$, même si $C(b \text{ S } a) = F \setminus \{j\}$.**

Soit b' une action caractérisée par des performances vérifiant :

$$g_j(b') < g_j(b) \text{ et } g_k(b') = g_k(b), \forall k \in F \setminus \{j\}.$$

Supposons que l'effet de veto du critère j joue contre un surclassement $b \text{ S } a$. Ce même effet de veto jouera aussi bien, sinon mieux, vis-à-vis de $b' \text{ S } a$ puisque b' est encore pire que b selon le critère discordant j (toutes les autres performances demeurant inchangées). Il s'ensuit que :

$$g_j(b') < g_j(b) \Rightarrow g_j(b') + v_j[g_j(b')] \leq g_j(b) + v_j[g_j(b)],$$

ce qui équivaut à :

¹ On pourrait songer à formaliser l'effet de veto de telle sorte que le veto soit mis pour des intervalles $[g_j(b), g_j(a)]$ d'autant plus petits que $k[C(b \text{ S } a)]$ est plus faible ou encore qu'il existe d'autres critères discordants venant renforcer l'impact du critère j considéré.

² Faisons observer que cette définition est de même nature que celle donnée dans MMCAD, 9.3.2 pour les seuils $q_j[g_j(b)]$ et $p_j[g_j(b)]$.

$$\frac{v_j[g_j(b)] - v_j[g_j(b')]}{g_j(b) - g_j(b')} \geq -1 \quad (r.3.1.7)$$

(cette condition est identique à celles auxquelles sont astreints les seuils p_j et q_j , cf. 1.6).

Dans les cas extrêmes, on peut évidemment poser $v_j[g_j(b)] = p_j[g_j(b)]$. Rappelons que, dans tous les cas, on doit avoir :

$$v_j[g_j(b)] \geq p_j[g_j(b)]$$

puisque'il ne peut y avoir effet de veto que pour des critères discordants. Ceci explique que, d'un point de vue opérationnel, il est souvent commode de raisonner la valeur du seuil de veto en prenant pour unité le seuil de préférence, ce qui amène à s'interroger sur la valeur du rapport $v_j[g_j(b)]/[p_j(g_j(b))]$.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus (remarque 2), le seuil de veto v_j traduit une facette de ce à quoi on se réfère lorsqu'on parle de l'importance du critère j . D'une façon générale, on peut penser que plus l'importance de ce critère est grande (k_j élevé) et plus v_j "se rapproche" de p_j . Cela ne signifie pas pour autant qu'il faille chercher une relation fonctionnelle rigide entre k_j et $v_j - p_j$ (ou $(v_j - p_j)/p_j$). Ce sont en effet, comme on l'a dit, deux facettes distinctes de l'importance du critère j (vis-à-vis des autres critères de F) que les analyses de concordance et de discordance mettent en évidence. On peut par conséquent avoir de bonnes raisons de fixer les nombres k_j et v_j de telle sorte que le rangement des n critères de F résultant des valeurs croissantes de k_j ne coïncide pas avec celui fourni par les rapports v_j/p_j décroissants (ou tout autre indicateur de même nature, cf. 5.4.3).

L'effet de veto tel qu'il a été défini opère de la même façon, que j soit seul critère discordant ou non, et que la valeur du rapport $k[C(b \text{ S } a)]/k[F]$ soit élevée ou non. Lorsque j n'est pas le seul critère discordant, on peut songer à faire jouer l'effet de veto avant même que la différence $g_j(a) - g_j(b)$ ne dépasse le seuil $v_j[g_j(b)]$ (prise en compte d'un effet de renforcement des critères discordants autres que j). On peut également songer à accentuer d'autant plus ce phénomène que $k[C(b \text{ S } a)]/k[F]$ est plus petit. Ces suggestions devraient permettre au lecteur d'entrevoir une analyse plus fine de la discordance. Celle-

ci peut être menée de façon à associer à la coalition discordance $C(a P b)$ un indicateur $w[C(a P b)]$ faisant intervenir la place des différences $g_i(a) - g_i(b)$ vis-à-vis des repères $p_i[g_i(b)]$ et $v_i[g_i(b)]$ introduits par chaque critère discordant, cet indicateur étant destiné à appréhender ce que l'on peut regarder comme un plus ou moins grand **pouvoir de veto de la coalition discordante**. C'est sur la base des nombres $w[C(a P b)]$ et $k[C(b S a)]/k[F]$ qu'il convient alors d'argumenter l'acceptation ou le rejet de la proposition $b S a$.

Le schéma, de portée tout à fait générale, qui vient d'être esquissé permet de formaliser la seconde partie du mode de raisonnement illustré sur l'exemple numérique du tableau 3.1.2. Nous l'approfondirons au chapitre 5.

3.1.4 Dépassement de la dominance en-dehors d'informations servant à différencier l'importance des critères

a) Compléments sur la relation de dominance (Δ_F)

Rappelons que la relation de dominance Δ_F est définie par :

$$b \Delta_F a \Leftrightarrow g_j(b) \geq g_j(a), \forall j \in F. \quad (r.3.1.8)$$

Cette relation appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Elle est établie indépendamment de toute information relative à un quelconque mode de différenciation de l'importance des critères. La non-différenciation qui en résulte (tous les critères sont traités de la même façon) ne doit pas porter à croire que la relation de dominance prend appui sur une hypothèse (implicite) d'égale importance des n critères. La non-différenciation signifie seulement que l'affirmation $b \Delta_F a$ ne préjuge en aucune façon de l'importance que tel acteur ou tel autre peut vouloir accorder aux différents critères.

Remarque 2 : Elle ne fait intervenir aucun seuil (ni d'indifférence, ni de préférence) et ne tient donc aucun compte du pouvoir discriminant des différents critères.

Remarque 3 : Elle est réflexive et transitive et définit par conséquent, sur A , une structure de préordre partiel ¹ ; nous

¹ Cf. 1.4.2 c).

noterons ¹ R_{Δ_F} la relation d'incomparabilité définie par :

$$b R_{\Delta_F} a \Leftrightarrow \text{Non}(a \Delta_F b) \text{ et } \text{Non}(b \Delta_F a). \quad (\text{r.3.1.9})$$

Remarque 4 : Quelle que soit la façon de définir la relation de surclassement globale S à partir du tableau de performances fondé sur une famille cohérente F et d'éventuelles informations additionnelles (données et/ou règles), la relation de dominance vérifie (d'après le résultat 2.2.2) :

$$b \Delta_F a \Rightarrow b S a, \quad (\text{r.3.1.10})$$

ce qui équivaut à $\Delta_F \subset S$.

C'est dire que toute relation de surclassement est nécessairement compatible avec le préordre partiel de dominance. Bien que Δ_F soit ainsi au cœur de toute relation de surclassement, on ne peut avoir $S = \Delta_F$ que si $q_j = 0, \forall j \in F$. En effet, poser $S = \Delta_F$ avec des seuils d'indifférence non nuls mettrait en défaut la seconde partie de l'axiome 2.1.2.

b) La relation de Δ -surclassement (S_Δ)

Posons :

$$b S_\Delta a \Leftrightarrow C(b S a) = F. \quad (\text{r.3.1.11})$$

La relation S_Δ n'est par conséquent vérifiée que si les critères de F ne sont pas en conflit dans la comparaison de b et a .

Tout système de préférences globales décrit ou construit à partir de la famille cohérente F et d'éventuelles informations additionnelles est nécessairement tel que (cf. résultat 2.2.3) :

$$b S_\Delta a \Rightarrow b S a, \quad (\text{r.3.1.12})$$

¹ Cette notation nous paraît préférable à R_F adoptée dans MMCAD.

ce qui équivaut à $S_A \subset S$.

Contrairement à Δ_F , S_A fait intervenir les seuils q_j . De ce fait, rien ne s'oppose à ce qu'un système de préférences globales vérifie $S = S_A$. **La relation S_A apparaît donc comme la relation de surclassement la plus pauvre que l'on puisse concevoir.** Nous l'appellerons relation de Δ -surclassement.

Bien que réflexive et compatible avec le préordre partiel de dominance, elle n'est pas nécessairement transitive. C'est ainsi par exemple qu'avec les données du tableau 3.1.2 on a :

$$d S_A b \text{ et } b S_A a$$

avec d et a incomparables selon S_A . On a par ailleurs :

$$c S_A b, b S_A a, a S_A c.$$

Tableau 3.1.2 : Exemple numérique

Pour tous les critères du tableau, on a $q_j = 7$, $\bar{p}_j = 15$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
a	45	45	50	50	55	55
b	55	55	45	45	50	50
c	50	50	55	55	45	45
d	60	60	60	55	45	45
e	65	65	60	55	45	45

La transitivité impliquerait que l'on ait également :

$$a S_A b, b S_A c, c S_A a.$$

Or, aucun de ces trois Δ -surclassements n'est vérifié.

Comme la dominance, le Δ -surclassement ne préjuge en rien de la plus ou moins grande importance de chaque critère (c'est dire qu'il ne sous-entend aucune hypothèse d'équi-importance). Il

apparaît comme une simple extension de la dominance prenant en compte les seuils d'indifférence conformément à l'axiome 2.2.2 mais au prix d'une perte de la transitivité.

C'est parce que la relation S_A est généralement trop pauvre pour aider à prendre des décisions que l'analyse de la concordance et de la discordance présente un réel intérêt de même que les bilans par compensation et le concept de taux de substitution dont il sera question au paragraphe suivant. Toutefois, ces modes de raisonnement ainsi que les concepts qui leur sont liés requièrent des données additionnelles servant à caractériser et, presque toujours, à quantifier l'importance relative des différents critères. Dans certaines situations concrètes, on peut avoir envie d'approfondir la comparaison de deux actions quelconques en introduisant le moins d'informations possible sur cette importance relative des différents critères. Les raisons invoquées pour cela peuvent être variées : il est impossible (faute de temps par exemple) d'obtenir de telles informations, les différents acteurs ne pondèrent pas les critères de la même façon ¹, on souhaite aller aussi loin que possible dans les comparaisons sans préjuger de l'importance des critères ², ... Nous explorons ci-après quelques voies allant dans ce sens.

c) La relation de PQ-surclassement (S_{PQ})

Revenons à l'exemple numérique du tableau 3.1.2. Considérons le couple d'actions (e, a). Il vérifie :

$$C(a \ P \ e) = \emptyset, C(a \ Q \ e) = \{5, 6\}.$$

C'est dire que seules les préférences faibles en faveur de a des critères 5, 6 sont responsables du fait que l'on n'a pas $e \ S_A \ a$. Pourtant, en faveur de cette dernière proposition, la coalition concordante comporte notamment la sous-famille :

$$C(e \ P \ a) = \{1, 2\}.$$

¹ Voir par exemple MMCAD, chapitre 3, exemple 4.

² Voir par exemple chapitre 8 et Roy et Hugonnard (1982b).

Dans ces conditions, l'ensemble des conflits des critères de F dans la comparaison de e et a peut être structuré selon une famille de paires de critères conflictuels du type suivant :

$\{1, 5\}, \{2, 6\}$.

Une telle famille satisfait aux trois propriétés ci-après :

PROPRIÉTÉ 1 : Chaque conflit est dissymétrique et présumé favorable à e .

PROPRIÉTÉ 2 : Aucun critère de $C(e P a)$ n'apparaît plus d'une fois.

PROPRIÉTÉ 3 : Chaque critère de $C(a > e)$ apparaît au moins une fois.

Faisons observer qu'une telle décomposition de l'ensemble des conflits n'est généralement pas unique et qu'elle peut très bien laisser de côté des critères de $C(e P a)$. Considérons maintenant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : Quels que soient les critères j et k pouvant donner lieu à une paire de critères conflictuels dans la comparaison de deux actions e et a , dès lors que le conflit est dissymétrique présumé favorable à e , alors sa résultante est forcément compatible avec $e S a$.

Si on accepte cette hypothèse, alors, dans l'exemple numérique considéré, plus rien ne s'oppose au surclassement $e S a$. Il en sera ainsi chaque fois que l'ensemble des critères conflictuels dans la comparaison de e et a pourra être structuré selon une famille de paires de critères conflictuels satisfaisant les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus. Il est clair que ceci est possible si et seulement si il y a au moins autant de critères dans $C(e P a)$ qu'il y en a dans $C(a > e)$, aucun critère ne devant en outre être discordant avec $e S a$. Ceci nous conduit donc à nous intéresser à la relation S_{PQ} , que nous appellerons **PQ-surclassement**, définie comme suit :

$$b S_{PQ} a \Leftrightarrow [\text{card}(C(b P a)) \geq \text{card}(C(a Q b)) \text{ et } C(a P b) = \emptyset]. \quad (r.3.1.13)$$

En matière d'aide à la décision, pourvu que l'hypothèse 1 paraisse raisonnable, la relation S_{PQ} peut être adoptée pour définir les préférences globales en termes de surclassement : en particulier, $S_\Delta \subset S_{PQ}$. L'information additionnelle qu'elle requiert quant à l'importance relative des critères de F est contenue dans l'hypothèse 1. Elle peut être reformulée ainsi :

Hypothèse 2 : Quelle que soit la manière dont on veuille différencier l'importance des critères de F , on admet que si deux quelconques d'entre eux, j et k , forment une paire de critères conflictuels telle que $b P_j a$ et $a Q_k b$, alors le caractère ambigu (c'est-à-dire mal étayé) de la préférence faible en faveur de a selon le critère k n'est pas de nature à contre-balancer la préférence stricte

(c'est-à-dire solidement étayée) en faveur de b selon le critère j de façon à constituer un argument pouvant contribuer à invalider la proposition "b n'est pas pire que a".

On peut bien évidemment rejeter une telle hypothèse lorsque le critère k apparaît comme primordial et le critère j comme tout à fait mineur. Accepter l'hypothèse 2 (ou l'hypothèse 1), c'est admettre une certaine limitation (de nature qualitative) dans les disparités d'importance entre critères. Cette limitation ne doit cependant pas être confondue avec une equi-pondération (comme les dénombrements d'ensembles intervenant dans (r.3.1.13) pourraient le laisser croire à première vue ¹).

Le PQ-surclassement n'est pas une relation transitive puisqu'avec les données du tableau 3.1.2 on a par exemple :

$d S_{PQ} b, b S_{PQ} a$ et $\text{Non}(d S_{PQ} a)$.

d) Les relations de $\succ Q$ -surclassement ($S_{\succ Q}$) et de ΔP -surclassement ($S_{\Delta P}$)

De façon plus contestable mais néanmoins parfois digne d'intérêt, on peut enrichir le surclassement défini par S_{PQ} en prenant appui sur la relation $S_{\succ Q}$ définie ² par :

$b S_{\succ Q} a \Leftrightarrow [\text{card}(C(b \succ a)) \geq \text{card}(C(a Q b)) \text{ et } C(a P b) = \emptyset]$. (r.3.1.14)

C'est ainsi qu'avec les données du tableau 3.1.1 on a :

$d S_{\succ Q} a$ et $\text{Non}(d S_{PQ} a)$.

Le lecteur reformulera sans peine les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus ainsi que les hypothèses 1 et 2 (qu'il suffit d'étendre au conflit faible) de façon à asseoir une relation $S_{\succ Q}$ sur des bases analogues à celles données pour S_{PQ} .

A la limite, dès lors que $C(a P b) = \emptyset$, on peut estimer qu'il n'existe aucun argument suffisamment bien étayé pour s'opposer à la proposition "b n'est certainement pas pire que a". Ceci conduit à considérer la relation $S_{\Delta P}$

¹ Cette confusion est en particulier commise par Gargaillo (1982). On consultera à ce sujet la réponse de Roy et Hugonnard (1982c).

² Relation dite de pseudo-dominance et notée S_p dans Roy et Hugonnard (1982 a et d).

définie ¹ comme suit :

$$b S_{\Delta P} a \Leftrightarrow C(a P b) = \emptyset. \quad (r.3.1.15)$$

Si le surclassement est défini en termes de ΔP -surclassement, alors on constate qu'avec les données du tableau 3.1.2, les actions a, b, c et d sont toutes indifférentes deux à deux. D'une façon générale, si $b S_{\Delta P} a$ est établi à partir d'une coalition concordante faible en ce sens que $C(a P b)$ est vide, alors on a nécessairement $a S_{\Delta P} b$ (c'est-à-dire l'indifférence). Le même phénomène se produit avec $S_{>Q}$ mais dans des conditions un peu plus nuancées.

Précisons que, pour des raisons évidentes :

$$\Delta_F \subset S_{\Delta} \subset S_{PQ} \subset S_{>Q} \subset S_{\Delta P}. \quad (r.3.1.16)$$

e) Autres relations

Pour des raisons tenant à la prise en compte d'éventuels "effets de cumul" (cf. 2.2.2 d)), on peut être amené à s'intéresser à des relations visant à dépasser Δ_F sans pour autant contenir S_{Δ} ². Faisons observer qu'une telle extension de la dominance, dès lors qu'elle est incluse dans S_{PQ} , n'implique pas, pour être légitimée, de restriction sur les disparités d'importance entre critères plus fortes que celles contenues dans l'hypothèse 2.

3.1.5 Analyse des compensations : Valorisation sur un axe des écarts par taux de substitution

Revenons aux données du tableau 3.1.1. Soit Z'' un nouvel acteur cherchant, lui aussi, à se faire une opinion sur la résultante du conflit entre critères de F dans la comparaison de a et b. Imaginons que Z'' propose un tout autre mode de raisonnement que celui fondé sur des analyses de concordance et de discordance envisagées par Z et Z'. Z'' estime en effet qu'il convient de faire entrer davantage en ligne de compte la plus ou moins grande amplitude des écarts de performances entre les actions à compa-

¹ Notons que cette définition est identique à celle de S_{Δ} en remplaçant le seuil d'indifférence q par le seuil de préférence p.

² Les relations de ce type, lorsqu'elles sont prises comme relations de surclassement, ne satisfont pas (dès lors qu'un q_j au moins est différent de 0) à la seconde partie de l'axiome 2.2.2 : voir au 5.3.1 b2) les relations de quasi-dominance Δ_q et de dominance canonique Δ_c .

rer. Dans ce but, il distingue :

- d'une part les critères 1 à 5 qui font tous apparaître des écarts favorables à b, lesquels valent respectivement $(80 - 10)$, $(75 - 20)$, $(70 - 30)$, $(65 - 40)$, $(60 - 50)$;
- d'autre part les critères 6 à 9 qui font tous apparaître des écarts favorables à a, lesquels valent respectivement $(60 - 55)$, $(70 - 60)$, $(80 - 50)$, $(90 - 40)$.

Faire entrer en ligne de compte (pour accepter ou refuser b S a) les amplitudes de ces 9 écarts de performances oblige à regarder chacun de ces écarts à la lumière du critère concerné, autrement dit en fonction de l'importance qu'on lui accorde dans la formation de la résultante des critères en conflit. Ainsi, aux yeux de Z'', le critère 3 est "beaucoup moins important" que le critère 7. Dans ces conditions, il estime que l'écart $g_3(b) - g_3(a) = (70 - 30)$, en dépit de son amplitude assez grande, compense tout juste l'écart $g_7(a) - g_7(b) = (70 - 60)$. En rapprochant de la sorte deux à deux les écarts de performances, il lui paraît naturel d'admettre qu'il y a compensation significative ¹ :

de l'écart $(90 - 40)$ selon g_9 par l'écart $(80 - 10)$ selon g_1 ,
 de l'écart $(80 - 50)$ selon g_8 par l'écart $(75 - 20)$ selon g_2 ,
 de l'écart $(70 - 60)$ selon g_7 par l'écart $(70 - 30)$ selon g_3 ,
 de l'écart $(60 - 55)$ selon g_6 par l'écart $(60 - 50)$ selon g_5 .

Si l'on admet ces compensations, lesquelles ne font pas intervenir le critère 4 favorable à b (par 65 contre 40), il est clair que le bilan global est favorable à b. Sur ces bases, Z'' peut regarder b P a comme bien établi.

Imaginons que Z' souhaite reconsidérer chacune des compensations ci-dessus en les resituant dans un cadre plus rigoureux. Il propose pour cela de chercher à "mesurer" l'écart de performances propre à chaque critère sur un axe "étalon" selon une opération analogue à celle qui permet de convertir, en une monnaie unique,

¹ On remarquera que ce mode de raisonnement diffère profondément de celui qui est à l'origine des hypothèses 1 ou 2 du 3.1.4.

des gains et des pertes initialement exprimés dans des monnaies différentes. Dans cette perspective, il admet que 3 unités du critère 1 (favorable à b) sont nécessaires pour compenser exactement une unité du critère 9 (favorable à a). Autrement dit, l'unité du critère 1, valorisée sur l'axe de signification du critère 9, ne vaut que $1/3$. Si l'on admet cette "pondération relative" des critères 1 et 9 ainsi qu'un raisonnement par proportionnalité, on constate que l'écart $80 - 10 = 70$ ne compense que $70/3 = 23,3$ unités du critère 9 (favorables à a), ce qui est très inférieur à $90 - 40 = 50$. Il y a par conséquent ici désaccord entre Z'' et Z' : pour ce dernier, la résultante du conflit entre les critères 1 et 9 est favorable à a.

Il est clair que Z' peut appliquer aux critères 2, 3, ..., 8 le même principe de quantification en conservant le même axe étalon (critère 9). Cela le conduit à apprécier le nombre n_j (éventuellement fractionnaire) d'unités du critère j qui sont à ses yeux nécessaires pour compenser exactement un écart de **une unité de sens opposé** sur l'axe du critère 9. Ceci équivaut à dire que $1/n_j$ est la "valeur" de l'unité du critère j lorsqu'elle est évaluée en prenant pour unité de mesure celle qui est propre au critère 9 (cette dernière étant utilisée comme référence). Tous les écarts de performances selon les critères 1 à 8 peuvent ainsi (dès lors qu'on accepte un raisonnement par proportionnalité) être convertis dans la "monnaie" du critère de référence. Tous les écarts de performances étant ainsi valorisés sur un même axe de signification (cf. tableau 3.1.3), on peut admettre (raisonnement par additivité) que leur résultante s'obtient par simple somme algébrique des valeurs obtenues sur cet axe.

Z' en déduit que ce bilan n'est pas favorable à b. Le solde en faveur de a étant malgré tout faible, il conclut à a Q b.

Supposons que, après réflexion, Z'' accepte les valeurs des coefficients $1/n_j$ (y compris pour $j = 1$). Il peut néanmoins contester la conclusion de Z' . L'écart de performances selon le critère 6 ne vaut que 5. Or, c'est là une valeur non significative car inférieure à q_6 . Z'' peut donc faire valoir qu'elle ne doit pas être comptabilisée dans le bilan, lequel vaut, par conséquent, +15,8. Ceci exclut a Q b et valide b S a (Z'' peut toutefois hésiter

à se prononcer entre b Q a et b I a).

Tableau 3.1.3 : Valorisation, sur l'axe du critère 9, des écarts de performances des actions b et a du tableau 3.1.1

Critères g_j	$g_j(b) - g_j(a)$	Coefficients $1/n_j$	Valorisation sur l'axe 9
g_1	80 - 10	1/3	+ 23,3
g_2	75 - 20	1/2	+ 27,5
g_3	70 - 30	1/2	+ 20
g_4	65 - 40	1	+ 25
g_5	60 - 50	2	+ 20
g_6	55 - 60	4	- 20
g_7	60 - 70	2	- 20
g_8	50 - 80	1	- 30
g_9	40 - 90	1	- 50
Bilan global sur l'axe 9			- 4,2

Le mode de raisonnement ci-dessus appelle quelques remarques importantes.

Remarque 1 : Il fait directement appel à des données de type C.

Remarque 2 : Il permet de différencier le rôle dévolu à chaque critère en fonction de sa nature propre en quantifiant l'importance du critère j par un "poids" défini par le coefficient $1/n_j$; ce coefficient vaut 1 pour le critère choisi comme référence.

Remarque 3 : Les compensations qu'il opère dans le cadre du bilan final font intervenir trois hypothèses importantes :

– Une hypothèse d'invariance par translation impliquant de ne pas tenir compte de la position sur l'échelle du critère j de l'intervalle $[g_j(a) ; g_j(b)]$. La seule donnée prise en compte est l'écart $(g_j(a) - g_j(b))$.

– Une hypothèse de proportionnalité impliquant que si un écart $(g_j(a) - g_j(b))$ compense un écart en sens inverse $(g_n(b) -$

$g_n(a)$), alors un écart $\alpha \cdot (g_j(a) - g_j(b))$ compense un écart $\alpha \cdot (g_n(b) - g_n(a))$.

– Une hypothèse d'additivité impliquant que la résultante des conflits entre les critères peut être déterminée par addition, après conversion de tous les écarts sur l'échelle d'un critère de référence.

Remarque 4 : Les hypothèses de proportionnalité et d'additivité conduisent à un mode de raisonnement qui est difficilement compatible avec la prise en compte de seuils d'indifférence, de préférence ou de veto.

Nous explicitons ci-après la signification concrète des trois hypothèses ci-dessus.

Continuons à supposer (ce qui n'est pas restrictif) que le critère de référence est celui numéroté n . Le raisonnement étudié prend pour point de départ la possibilité de définir, pour chaque critère j , l'amplitude n_j de la variation de performances qui compense très exactement une variation de une unité en sens opposé sur le critère n . Si cette dernière variation est négative (perte), n_j s'interprète comme le prix à payer (dans la "monnaie" du critère j) pour racheter cette perte unitaire sur le critère n ; s'il s'agit d'une variation positive (gain), la même valeur n_j s'interprète alors comme le "prix de revente" de ce gain unitaire. Dans le raisonnement ci-dessus, on a admis (hypothèse d'invariance par translation) que la position sur l'axe de signification du critère j des n_j unités gagnées ou perdues était sans influence sur la valeur de n_j pas plus que celle-ci n'était influencée par le niveau de performances à partir duquel l'unité du critère n était perdue ou gagnée. Autrement dit, que l'unité à "racheter" (ou à "revendre") se situe dans le bas ou dans le haut de l'échelle du critère n , elle vaut le même "prix", prix qui correspond aussi bien à n_j unités du bas de l'échelle du critère j que du haut de cette même échelle.

Les "prix" n_j ayant la signification et les propriétés qui viennent d'être précisées, l'hypothèse de proportionnalité peut être regardée comme un prolongement naturel des hypothèses déjà faites. Il s'agit tout simplement d'admettre que, si deux écarts de

sens opposé sur les critères j et n se compensent exactement, alors des écarts doubles (dont la position importe peu) se compensent aussi exactement. Cette nouvelle hypothèse permet de valoriser, grâce à un seul coefficient (comme on l'a fait dans le tableau 3.1.3), tous les écarts de performances sur l'axe de signification du critère de référence.

Le dernier pas à franchir consiste à admettre que ces valorisations qui proviennent d'écarts de performances situés sur des axes de signification différents peuvent être purement et simplement additionnées (hypothèse d'additivité) pour en apprécier la résultante. Ceci suppose l'absence d'effets de synergie positive ou négative. Le bilan ainsi obtenu (cf. tableau 3.1.3) doit alors permettre, selon des règles à préciser, de juger du bien-fondé d'affirmations telles que $b \succ a$, $b \sim a$, $b \prec a$ ou, plus modestement, de $b \succsim a$, $b \precsim a$.

On peut résumer comme suit les limites auxquelles se heurte l'argumentation d'une préférence globale fondée sur un bilan par compensation établi à partir de poids du type $1/n_j$.

1°) Pour un critère donné, les gains que représente un accroissement de performances d'une amplitude fixée (10 % par exemple dans le cas d'un critère du tableau 3.1.1) peuvent être jugés différemment selon la place qu'ils occupent sur l'échelle du critère. La perte qu'ils compensent exactement, sur un autre critère (quel qu'il soit), va alors obligatoirement dépendre de cette place, ce qui conduit à remettre en cause l'hypothèse d'invariance par translation.

2°) Pour un critère donné, il n'est pas déraisonnable d'admettre que, dans certaines situations, passer de $g_j(a) = 100$ à $g_j(b) = 0$ n'entraîne pas un "écart de préférence" exactement égal à 100 fois l'écart existant entre $g_j(a') = 1$ et $g_j(b)$, par exemple parce que, au-delà d'une certaine valeur, les performances sont toutes considérées comme "très satisfaisantes". Ceci conduit à remettre en cause l'hypothèse de proportionnalité.

3°) L'hypothèse d'additivité exclut toute prise en compte de synergie positive ou négative entre critères. C'est là une restric-

tion que l'on peut vouloir remettre en cause.

4°) Comme on l'a dit, les hypothèses de proportionnalité et d'additivité sont difficilement conciliables avec la prise en compte de seuils d'indifférence ou de préférence. Dans le raisonnement qui a été exposé, le critère de référence étant toujours numéroté n , la définition des poids $1/n_j$ suppose :

- d'une part que l'on adopte comme unité du critère n un écart de performance supérieur à q_n , sinon même à p_n ;
- d'autre part que l'on prenne position sur la manière de comptabiliser, dans le bilan global, les écarts de performances non significatifs du type $g_j(b) - g_j(a) \leq q_j$ ¹.

5°) L'interprétation en termes de préférence du résultat du bilan global ne s'impose pas de façon évidente : cela a-t-il un sens de comparer ce résultat aux seuils q_n et p_n conformément au modèle du pseudo-critère ?

On verra en détail, au chapitre 4, comment on peut faire face à certaines de ces difficultés tout en restant dans un cadre similaire. On se contentera ici de montrer l'intérêt du concept de taux de substitution pour raisonner l'idée de compensation.

La définition du **taux de substitution** $r_n(g, \delta_n)$ fait en premier lieu intervenir un vecteur de performances ² g (nous dirons aussi point dans l'espace des performances) :

$$g = (g_1, \dots, g_j, \dots, g_n).$$

Elle fait intervenir en second lieu un critère de référence, qu'il n'est pas restrictif de noter n , auquel on a associé une variation élémentaire de référence

¹ Faisons observer que si l'on a $g_j(b) - g_j(a) > q_j$ et $(g_j(b) - g_j(a))/n_j \leq q_n$, il peut être raisonnable de comptabiliser la quantité $(g_j(b) - g_j(a))/n_j$ dans le bilan par compensation puisqu'elle correspond à un écart significatif sur le critère d'origine j .

² Ce vecteur de performances g est un élément de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, produit cartésien des échelles des n critères.

(ou variation unitaire ¹) que nous notons δ_n . Celle-ci doit correspondre à un écart de préférence faible mais significatif. C'est dire qu'une valeur raisonnable de δ_n est fournie par le seuil de préférence p_n lorsque celui-ci n'est pas nul. Prendre en compte une telle variation élémentaire de référence est souvent utile dans un raisonnement par compensation. Dans le cas de vrai-critères avec échelle continue, on peut faire disparaître cette variation unitaire δ_n en étudiant la limite du rapport $r_{jn}(g, \delta_n)/\delta_n$ lorsque δ_n tend vers 0. On parle alors de **taux marginal de substitution**.

Par définition, le taux de substitution $r_{jn}(g, \delta_n)$ entre les critères j et n au point g pour une variation élémentaire de référence δ_n a pour valeur le minimum de l'accroissement v qui s'avère compatible avec l'indifférence entre les deux actions idéales caractérisées par les vecteurs-performances g et g^v :

$$g^v = (g_1, \dots, g_{j-1}, g_j + v, g_{j+1}, \dots, g_n - \delta_n). \quad (r.3.1.17)$$

Vis-à-vis d'un système relationnel de préférences existant et stable dans l'esprit d'un acteur ou bien encore défini par une procédure d'agrégation multicritère (cf. 3.2), il est clair que, pour tout point g de l'espace des performances et pour tout critère j , on peut, en faisant croître progressivement v depuis la valeur 0 (l'action caractérisée par g étant obligatoirement préférée à celle caractérisée par g^0), définir, éventuellement au prix de quelques conventions additionnelles ², la plus petite valeur de v qui permet d'atteindre l'indifférence. On remarquera que :

– compte-tenu des ambiguïtés possibles du système de préférences, rien ne s'oppose à ce que l'indifférence persiste pour un accroissement v légèrement supérieur à $r_{jn}(g, \delta_n)$;

– $r_{jn}(g, \delta_n) > q_j$ (les performances g_j et $g_j + r_{jn}(g, \delta_n)$ ne pouvant être indifférentes) ; de surcroît, si δ_n a été choisi significativement supérieur à p_n , alors $r_{jn}(g, \delta_n) > p_j$ sauf si l'importance accordée au critère j est si grande qu'un accroissement v ne correspondant qu'à une préférence faible sur l'axe du critère j peut compenser, sur l'axe du critère n , une variation inverse d'amplitude significativement supérieure à p_n ;

– pour j fixé, le taux $r_{jn}(g, \delta_n)$ peut fort bien varier lorsqu'on déplace le point g dans l'espace des performances ; dans le mode de raisonnement ci-dessus, cette possibilité était exclue ou négligée puisqu'on cherchait à appréhender $r_{jn}(g, \delta_n)$ par une constante n_j .

¹ Dans MMCAD 10.4, il était convenu que $\delta_n = 1$.

² Celles-ci peuvent provenir soit du fait que g_j est trop proche de la valeur maximum de l'échelle du critère j ou bien du fait que cette dernière échelle est discrète. Le recours à des idées simples de prolongement et d'interpolation suffit pour surmonter ces difficultés.

Revenons au calcul d'un bilan par compensation fondé sur des coefficients $1/n_j$. Les trois hypothèses d'invariance par translation, de proportionnalité et d'additivité impliquent que le taux de substitution $r_{jn}(g, \delta_n)$:

- est indépendant du vecteur de performances g et
- est tel que $r_{jn}(g, \alpha \delta_n) = \alpha r_{jn}(g, \delta_n)$.

On verra, au chapitre 4, comment on peut utiliser et formaliser un raisonnement par compensation hors du cadre restrictif de ces hypothèses.

Soulignons enfin que $r_{jn}(g, \delta_n)$ peut être vu comme une façon de quantifier l'importance accordée au critère j (relativement au critère n) lorsqu'on raisonne au voisinage du point g de l'espace des performances. Il faut prendre garde au fait que (comme avec n_j) plus l'importance accordée au critère j est grande et plus faible est le nombre $r_{jn}(g, \delta_n)$. Autrement dit, si l'on veut raisonner en termes de "poids", c'est l'inverse des nombres $r_{jn}(g, \delta_n)$ qu'il convient de faire intervenir. La métaphore du poids n'est cependant pas sans danger. En effet, on ne peut pas déduire de l'inégalité :

$$1/r_{jn}(g, \delta_n) > 1/r_{kn}(g, \delta_n)$$

que le critère j a plus d'importance que le critère k (au voisinage de g et pour une variation élémentaire de référence δ_n fixée). Pour s'en convaincre, il suffit de ranger l'unité dans laquelle s'expriment les performances sur l'axe du critère j (ou sur l'axe du critère k) et de constater qu'une telle inégalité peut être inversée sans que l'importance relative accordée aux deux critères ne s'en trouve modifiée. Ainsi, sauf conditions particulières, la simple comparaison des taux $r_{jn}(g, \delta_n)$ et $r_{kn}(g, \delta_n)$ (tout comme celle des nombres n_j et n_k) est dépourvue de signification en termes d'importance.

3.1.6 Informations inter-critères

Dès l'instant où l'on souhaite fonder l'aide à la décision sur un système relationnel de préférences qui dépasse la simple idée de dominance (autrement dit le Δ -surclassement (r.3.1.11)), on se voit contraint, d'une façon ou d'une autre, de faire intervenir des informations extérieures à la famille F (c'est-à-dire non contenues dans le tableau des performances). Les paragraphes précédents nous ont conduits à mettre en évidence les formes sous lesquelles on fait couramment intervenir de telles informations supplémentaires pour raisonner les résultantes de conflits entre critères. C'est ainsi que l'on a été amenés à introduire :

- des grandeurs auxquelles on fait jouer le rôle de "données"

numériques ou fonctionnelles comme, par exemple, les coefficients d'importance k_j (cf. 3.1.2), les seuils de veto $v_j[g_j(a)]$ (cf. 3.1.3), les taux de substitution $r_{jn}(g, \delta_n)$ (cf. 3.1.5) ;

– des règles logiques auxquelles on fait jouer le rôle de principe fondamental ou hypothèse de travail comme, par exemple, l'hypothèse 2 au 3.1.4, les principes qui sous-tendent, au 3.1.5, le calcul d'un bilan par compensation ou bien encore le fait que le taux de substitution $r_{jn}(g, \delta_n)$ soit une constante (indépendante non seulement de l'unité δ_n mais encore du vecteur g).

La raison d'être de telles informations, que nous qualifierons respectivement de numériques et logiques, est de caractériser le mode d'influence qu'exerce chaque critère relativement aux autres pour définir, à un niveau global, la relation de préférence qui lie deux actions quelconques. C'est pourquoi nous qualifions ces informations d'inter-critères. Par **information inter-critère**, on désigne toute information (numérique ou logique) qui précise le rôle que joue un critère vis-à-vis d'un autre ou de plusieurs autres pour asseoir la résultante de critères en conflit.

Quelles que soient l'approche opérationnelle et la procédure suivies pour définir un modèle de préférences globales, une bonne analyse des informations inter-critères qui les sous-tendent est essentielle pour parvenir à une réelle compréhension de ce que l'on fait. Une telle analyse peut, dans bien des cas, avantageusement prendre appui sur la distinction entre considérations de type O et de type C (introduites au 3.1.1) pour élaborer la résultante de conflits entre critères.

C'est ainsi que les règles, concepts et discussions présentés aux 3.1.2, 3.3.3 et 3.1.4 prennent appui (à l'exception de quelques développements annexes) sur des considérations ordinales. Cela signifie en particulier que même si les échelles associées aux critères (cf. tableaux 3.1.1 et 3.1.2) font appel à des nombres, la teneur quantitative de ceux-ci n'est pas fondamentalement prise en compte par l'analyse de la concordance, de la discordance ou par les différentes formes de surclassement étudiées au 3.1.4. Autrement dit, la définition et l'interprétation de toutes les informations inter-critères que l'on peut être amené à véhiculer lorsque l'on introduit des coefficients d'importance de type k_j , des

seuils de veto v_j ou encore des principes ou hypothèses comme ceux du 3.1.4 supposent simplement que les couples d'échelons liés à un critère donné peuvent être répartis entre un petit nombre de catégories. Le fait qu'un couple soit affecté à telle ou telle catégorie lui confère une signification particulière (voire une absence de signification). Les nombres qui servent à coder les performances (les pourcentages dans les exemples numériques ci-dessus) n'opèrent pas en tant que quantités puisqu'on pourrait leur substituer des désignations purement ordinales (par exemple à partir d'échelles du type : "catastrophique", "très mauvais", "mauvais", "médiocre", ..., "bon", "très bon", "excellent") et expliciter, pour chaque catégorie, la liste des actions qu'elles renferment.

Au 3.1.5 au contraire, ni les principes sur lesquels se fonde le calcul d'un bilan par compensation, ni le concept de taux de substitution ne peuvent s'accommoder d'échelles dont on ne veut exploiter que le caractère purement ordinal, même si on les complète par une répartition des écarts de performances entre un petit nombre de catégories. C'est le signe que l'on a quitté les considérations de type O pour rentrer dans celles de type C. Sur ces bases, on peut parler d'informations inter-critères de type O et d'informations inter-critères de type C.

3.2 PROCÉDURE D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE : DÉFINITION ET PREMIERS EXEMPLES

On a vu, au 3.1, un certain nombre de concepts utiles pour raisonner la comparaison d'actions évaluées sur une famille de critères. La mise en œuvre de ces raisonnements conduit souvent à utiliser ce que nous définirons, au 3.2.1, comme une Procédure d'Agrégation MultiCritère (PAMC). C'est toujours le cas lorsque l'élaboration de la recommandation prend appui sur un modèle explicite des préférences globales comme dans les approches opérationnelles 1 et 2. Le concept de PAMC sera illustré, au 3.2.2, par quelques exemples simples. Ceux-ci permettront au lecteur de se familiariser avec les notions utiles pour aborder les chapitres 4 et 5 où d'autres PAMC, plus complexes, seront présentées.

Dès lors qu'elle amène à bâtir un modèle de préférences plus riche que celui fournit par Δ_F ou S_Δ , une PAMC fait intervenir ce que nous avons appelé, au 3.1.6, des informations inter-critères. Parmi ces informations, celles concernant l'importance relative des divers critères sont cruciales. On y consacre le 3.2.3.

On concluera ce chapitre, au 3.2.4, par quelques remarques concernant les liens et les différences entre le problème de l'agrégation des performances et celui, classique en théorie du choix social, de l'agrégation des préférences individuelles en une préférence collective.

3.2.1 Définition et remarques

DÉFINITION 3.2.1 : Une **procédure d'agrégation multicritère (PAMC)** est une règle, un procédé permettant d'établir, sur la base du tableau des performances et d'informations inter-critères (cf. 3.1.6), un ou plusieurs systèmes relationnels de préférences (s.r.p.) sur l'ensemble A des actions (et, éventuellement, sur l'ensemble des mutations $(A \times A)$).

Cette définition, très générale, appelle quelques remarques :

Remarque 1 : Le s.r.p. sur A dont il est question dans la définition peut prendre des formes diverses : (I, P) , (I, Q, P) , (I, P, R) , (S, R) , ... Lorsque le s.r.p. ainsi établi exclut toute incomparabilité et possède des propriétés remarquables de transitivité¹, on dira que la PAMC vise à l'établissement d'un critère unique de synthèse. Ces PAMC seront étudiées en détail au chapitre 4. Les autres font l'objet du chapitre 5.

Remarque 2 : Ce sont le ou les s.r.p. obtenus par application d'une PAMC qui serviront de base à l'élaboration d'une recommandation. Lorsque la PAMC vise à l'établissement d'un critère unique de synthèse, l'exploitation des modèles de préférences pour parvenir à une recommandation dans une problématique donnée s'opère, en général, de façon simple comme on le verra

¹ Cf. 1.4 et 1.6.

au 6.1. Le problème est beaucoup plus complexe s'agissant des autres PAMC. Nous l'aborderons au chapitre 6.

Remarque 3 : La donnée d'un tableau de performances est suffisante à elle seule pour bâtir sur A un s.r.p. (Δ_F, R_{Δ_F}) qui peut être vu comme le produit d'une PAMC particulièrement frustrée¹. Raffiner ce modèle des préférences globales suppose inévitablement, même si cela est souvent inconscient ou implicite dans les études réelles, d'utiliser – et donc d'obtenir et de modéliser – des informations extérieures au tableau de performances. On verra, tout au long de cet ouvrage, que ces informations inter-critères sont très spécifiques à la PAMC utilisée. La façon de les obtenir, de les modéliser, de gérer les inévitables divergences d'opinion parmi les acteurs du processus de décision à propos de ces informations constitue des options cruciales de l'approche opérationnelle retenue (cf. 3.1.6).

Remarque 4 : La plupart des PAMC ne visent qu'à l'établissement d'un s.r.p. sur A (éventuellement par le biais d'un critère). Cependant, comme on le verra au 4.4, il est également possible de chercher à élaborer une information plus riche et à prendre position sur le problème de la comparaison de mutations². Ceci explique la précaution prise à la fin de la définition 3.2.1, une PAMC pouvant conduire à l'établissement d'un s.r.p. sur l'ensemble $A \times A$ des mutations. Bien souvent, le fait de disposer d'un s.r.p. sur $A \times A$ facilite grandement l'exploitation des résultats de la PAMC en fonction de la problématique retenue.

Remarque 5 : Les divers s.r.p. auxquels peut conduire une PAMC peuvent être vus soit comme un ensemble de s.r.p. élaborés à un moment donné, soit comme une succession de s.r.p. bâtis à des moments différents dans le temps. Dans le premier cas, l'existence de plusieurs s.r.p. pourra s'interpréter comme marquant l'existence de préférences (d'indifférences, de surclassements) plus ou moins crédibles, probants ou marqués. Dans le

¹ Cf. 3.1 où d'autres PAMC simples ont déjà été envisagées.

² Cf. MMCAD, 7.2.4.

second cas, elle traduira le fait que les préférences de l'acteur Z ont évolué au cours même du processus de modélisation (cf. Roy (1987)). Ces deux phénomènes peuvent coexister.

Remarque 6 : Si la famille F de critères est cohérente au sens de la définition 2.2.1, il convient de s'assurer que le (ou les) s.r.p. établis par une PAMC donnée sur la base de F satisfont bien à l'axiome 2.2.2¹. Il s'agit là d'une vérification ayant trait à la compatibilité entre la PAMC et la définition des critères qu'il est toujours prudent d'opérer.

Remarque 7 : Telle que nous l'avons définie, une PAMC pourra faire intervenir des vecteurs de performances autres que $g(a)$ et $g(b)$ dans l'établissement de la (ou des) relation(s) liant a et b , mettant ainsi en défaut une propriété d'"**indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes**"². Nous n'envisageons pas dans la suite de telles PAMC³. Comme nous le verrons cependant au chapitre 6, on peut vouloir tirer parti de ce (ou ces) s.r.p. pour parvenir à une recommandation en utilisant des techniques ne respectant pas cette propriété d'indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes.

Remarque 8 : Les PAMC étudiées dans ce chapitre (ainsi qu'aux deux chapitres suivants) feront toutes l'hypothèse que le pouvoir discriminant des critères contenus dans le tableau des performances a pu être précisé à l'aide de seuils de discrimination, ce qui en fait soit des vrai, quasi, pré ou pseudo-critères⁴. Ceci implique que la relation S_g que le critère modélise soit complète et possède des propriétés remarquables de transitivité. Notre expérience nous incite à penser que cette hypothèse est opérationnelle.

En-dehors de toutes les autres options constitutives d'une approche opérationnelle, mettre en œuvre une PAMC, c'est-à-dire combiner l'information contenue dans le tableau des performances avec d'autres informations pour parvenir à un ou plusieurs s.r.p., implique de prendre position sur un certain nombre de problèmes cruciaux en matière d'agrégation : quelle importance accorder aux différents critères ? Comment compenser des écarts de préféren-

¹ L'axiome d'exhaustivité 2.2.1 et l'axiome de non redondance 2.2.3 ont un statut différent à cet égard puisque la PAMC travaille exclusivement sur la base de F et d'informations inter-critères y afférant.

² Une traduction française possible de "independence of irrelevant alternatives".

³ Ceci en conformité avec MMCAD, 11.1.1.

⁴ Cf. 1.6.3.

ce ? Comment prendre en compte le pouvoir discriminant plus ou moins grand des différents critères ? De même que pour le choix d'une approche opérationnelle, le choix d'une PAMC ne saurait que faiblement dépendre d'un raisonnement hypothético-déductif¹. Notre objectif dans cette section, de même que dans la suite de cet ouvrage, ne saurait donc être de guider le lecteur vers le choix d'une "meilleure" PAMC pour chaque type de situations.

Au 3.2.2, on présentera un certain nombre de PAMC élémentaires. Celles-ci peuvent, dans certains cas, être utilisées telles quelles. Elles constituent surtout le cœur de PAMC plus complexes, fort importantes, que nous rencontrerons aux chapitres 4 et 5.

Au 3.2.2, comme dans la suite de cet ouvrage, on s'efforcera de montrer, pour chaque PAMC, quelles sont les propriétés que devrait "posséder"² le tableau des performances pour pouvoir l'appliquer, quelles informations supplémentaires recueillir ou élaborer et comment les transformer pour parvenir au(x) s.r.p. Ce faisant, on s'efforcera de préciser comment chaque PAMC prend position sur les différents problèmes évoqués plus haut. Ce dernier aspect est tout-à-fait essentiel pour aider l'homme d'étude à choisir telle ou telle PAMC.

Cette mise à jour des caractéristiques sous-jacentes à chaque PAMC est traditionnellement effectuée en théorie de la décision par une analyse de type axiomatique s'efforçant de cerner les "hypothèses de rationalité" permettant de recourir à la procédure d'agrégation analysée. Comme nous le verrons par la suite l'interprétation de ces axiomes ne va pas sans poser problème dans certaines situations. Le fait de disposer des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir "appliquer" telle ou telle PAMC est souvent loin de permettre de comprendre précisément ce que mettre en œuvre cette PAMC revient à supposer dans le cadre d'une étude d'aide à la décision. Cependant, en dépit de ces difficultés, nous avons cru utile de devoir faire figurer, dans ce chapitre ainsi qu'aux deux suivants, quelques remarques ayant trait à l'analyse axiomatique des PAMC étudiées. Cette analyse axiomatique permet en effet souvent de faire ressortir un certain nombre de caractéristiques fondamentales

¹ Cf. MMCAD, 11.1.2.

² Le terme posséder est ici mis entre guillemets car le tableau des performances est un "construit", fruit d'un travail de modélisation souvent long au cours duquel de nombreuses options ont déjà été prises. Face à un même problème, il est envisageable de modéliser le tableau des performances de différentes façons et donc de lui reconnaître ou non certaines propriétés.

que l'intuition seule ne permet pas, en général, de découvrir et ainsi de comparer plus précisément ce qui sépare différentes PAMC.

Cependant, il s'agira plus pour nous de donner au lecteur une "porte d'entrée" dans une littérature très abondante (et, le plus souvent, en langue anglaise) que de faire œuvre mathématique. C'est pourquoi nous omettrons généralement les démonstrations des propositions annoncées lorsque celles-ci sont facilement accessibles. De même, pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous avons souvent cherché à privilégier la lisibilité de ces propositions au détriment d'une présentation rigoureuse sur le plan formel.

3.2.2 Présentation de quelques PAMC élémentaires

Ce paragraphe s'attachera à présenter quelques PAMC élémentaires fondées sur les raisonnements et les concepts introduits au 3.1 et permettant d'enrichir Δ_F ou S_A sur A .

a) PAMC lexicographique

On a déjà souligné au 3.1 que, dans la phase d'agrégation, un problème crucial réside dans l'importance relative à accorder à chaque critère. Une **PAMC lexicographique** repose sur un rangement de tous les critères de F selon un ordre complet traduisant une hiérarchie d'importance. Celle-ci reflète une importance dictatoriale ¹ en ce sens que l'on ne tiendra compte de ce qui se passe sur les critères situés au bas de la hiérarchie que lorsque les comparaisons effectuées sur les critères hiérarchiquement supérieurs l'autorisent.

Précisons ce à quoi conduit ce principe dans le cas où F ne contient que des vrai-critères ², ces critères ayant été numérotés par ordre d'importance hiérarchique décroissante. Pour comparer deux actions a et b en utilisant une PAMC lexicographique, on s'intéresse tout d'abord au critère g_1 qui est le plus important. Supposons que la comparaison des valeurs $g_1(a)$ et $g_1(b)$ traduise une préférence stricte de a sur b , c'est-à-dire que $g_1(a) > g_1(b)$.

¹ ou bureaucratique.

² On verra que l'application d'une PAMC lexicographique à une famille F ne comprenant pas que des vrai-critères ne va pas sans soulever des difficultés.

Avec une PAMC lexicographique, on conclura alors que, globalement, a est strictement préférée à b quelles que soient les évaluations de ces deux actions sur les critères autres que g_1 . En revanche, si les évaluations $g_1(a)$ et $g_1(b)$ traduisent une indifférence entre a et b (ce qui implique $g_1(a) = g_1(b)$), on s'intéressera alors à la comparaison des évaluations $g_2(a)$ et $g_2(b)$. Si celle-ci traduit l'existence d'une préférence stricte de a sur b, on conclut alors à l'existence d'une préférence stricte au niveau global. Au contraire, l'existence d'une situation d'indifférence entre a et b sur g_2 implique de s'intéresser à la comparaison de $g_3(a)$ et $g_3(b)$ et ainsi de suite. Ainsi, cette PAMC, lorsque les n critères de F sont des vrai-critères, conduit à ranger les actions de A selon un préordre complet (I, P) de la même manière que les mots d'une langue sont rangés dans un dictionnaire, d'où le qualificatif lexicographique.

Cette analogie du dictionnaire ne doit cependant pas faire illusion puisque ce type de PAMC peut ne pas conduire à un rangement des actions sous forme de préordre complet lorsque la famille F ne contient pas que des vrai-critères. Considérons, à titre d'exemple, les données du tableau 3.2.1 dans lequel trois actions sont évaluées sur une famille F de deux quasi-critères ¹ à seuil constant.

Si l'on suppose que g_1 est hiérarchiquement plus important que g_2 , l'application d'une PAMC de type lexicographique conduit alors à :

c P b, b P a, a P c.

Cet exemple suffit à montrer que la simplicité avec laquelle cette PAMC résout le problème de l'agrégation ne va pas sans contrepartie. De plus, il n'est pas simple de vouloir adapter cette PAMC au cas où l'on dispose d'une hiérarchie d'importance se présentant sous la forme d'un préordre complet (ou de toute autre structure plus faible ²) : le principe à adopter dans le cas où les évaluations sur deux critères jugés d'égale importance conduit à des conclusions opposées est loin de s'imposer avec évidence. L'introduction de situations de préférence faible (qui traduisent une hésitation entre la préférence stricte et l'indifférence) ne va pas également sans poser problème. Dans le cas où la comparaison de $g_1(a)$ et $g_1(b)$ nous conduit à adopter une situation de

¹ On trouvera de nombreux résultats utiles concernant l'agrégation lexicographique de quasi-ordres dans Pirlot et Vincke (1992).

² Cf. 1.4.2.

préférence faible a Q_1 b sur ce critère, faut-il admettre que, globalement, a est faiblement préférée à b ou, au contraire, faut-il s'intéresser au critère g_2 pour admettre, par exemple, qu'une situation de préférence stricte b P_2 a permettra de conclure que, globalement, b S a ?

Tableau 3.2.1 : Exemple numérique

	g_1	g_2
$p = q$	3	1
a	10	8
b	8	10
c	6	12

Faisons enfin remarquer que, pour pouvoir appliquer ce type de PAMC, il faut que les acteurs du processus de décision admettent l'idée d'une hiérarchie d'importance amenant à négliger entièrement ce qui peut se passer sur les critères "subalternes". Compte-tenu des préceptes qui ont conduit à l'élaboration de F et du tableau des performances, il nous semble qu'un tel consensus ne pourra se produire que dans des situations assez exceptionnelles.

En dépit de ces inconvénients, cette PAMC présente des avantages lorsqu'il s'agit de tirer rapidement une conclusion à partir du tableau des performances. Elle permet de plus de faire ressortir les principaux problèmes liés à l'agrégation des performances : quelle importance accorder aux différents critères et que signifie cette importance ? Comment tenir compte du pouvoir discriminant plus ou moins grand des différents critères ?

Cette PAMC a été utilisée dans un certain nombre de méthodes multicritères et, en particulier, celles issues du "goal programming" ¹. Mentionnons en dernier lieu que, d'un point de vue théorique, cette PAMC présente de nombreux points communs avec celles utilisant la notion de concordance et celles utilisant l'idée d'utilité additive sur lesquels nous reviendrons dans la suite de cet ouvrage ².

¹ On parle alors de "goal programming" avec "poids préemptifs" (cf. Zeleny (1982)).

² Pour une étude théorique approfondie de cette PAMC, on pourra se reporter à Fishburn (1974).

b) PAMC élémentaire de type concordance

On a déjà évoqué au 3.1.2 une façon simple de bâtir un s.r.p. en utilisant la seule notion de concordance. Fondée sur des informations inter-critères de type O, elle amène à affecter, à chaque coalition C de critères, une importance $k[C]$. Dans ce paragraphe, nous présentons deux PAMC élémentaires fondées sur cette seule notion.

La PAMC concordance de type ELECTRE I conduit à un s.r.p. (S, R) et revient à poser :

$$a S b \text{ si } \frac{k[C(a S b)]}{k[F]} \geq s,$$

$$a R b \text{ si } \text{Non}(a S b) \text{ et } \text{Non}(b S a)$$

où s est une valeur comprise entre 0 et 1. Prendre en compte une telle valeur permet d'être plus ou moins exigeant sur l'importance de la coalition C(a S b) nécessaire pour asseoir la proposition a S b. Poser $s = 1$ dans le cadre de cette PAMC conduit à un surclassement qui n'est autre que S_A .

La PAMC concordance de type Roachat ¹ conduit, elle, à un s.r.p. (I, P) avec :

$$a P b \text{ si } k[C(a P b)] > k[C(b P a)],$$

$$a I b \text{ si } k[C(a P b)] = k[C(b P a)].$$

Cette dernière PAMC revenant à négliger les g_j critères tels que $a Q_j b$ ou $b Q_j a$, il pourra être prudent de restreindre son application éventuelle au cas où l'on dispose d'une famille F de vrai ou quasi-critères.

Il est bien entendu possible d'imaginer d'autres PAMC fondées sur la seule notion de concordance. En pratique, l'importance d'une coalition C sera souvent appréciée de façon additive en posant (cf. 3.1.2) :

¹ Cette PAMC est en effet inspirée du travail de Roachat (1980).

$$k[C] = \sum_{i \in C} k_i$$

après avoir associé un coefficient d'importance positif k_i à chaque critère ¹.

Les PAMC fondées sur la seule notion de concordance ne conduisent pas, en général, à des s.r.p. ayant des propriétés remarquables de transitivité.

A titre d'exemple, considérons le tableau 3.2.2 où 3 actions sont évaluées sur une famille F de 3 vrai-critères.

L'application d'une PAMC concordance de type Rochat avec $k_1 = k_2 = k_3$ conduit alors au s.r.p.

$c \text{ P } b, b \text{ P } a, a \text{ P } c.$

Nous reviendrons au chapitre 5 sur d'autres façons de définir des PAMC utilisant la notion de concordance.

c) PAMC élémentaire de type concordance discordance

On a vu au 3.1.3 l'intérêt, voire la nécessité, de recourir à l'idée de discordance parallèlement à celle de concordance. Prendre en compte l'idée de discordance au sein d'une PAMC revient à refuser d'admettre une proposition de type $a \text{ S } b$, $a \text{ Q } b$, $a \text{ P } b$ ou $a \text{ I } b$ dès lors que, sur certains critères de $C(b \text{ P } a)$, la différence $(g_i(b) - g_i(a))$ est jugée trop importante. Comme on l'a vu, une façon simple de recourir à cette notion consiste à définir un "seuil de veto" sur chaque critère. Ce seuil

¹ Il est facile de montrer qu'une PAMC de type lexicographique est un cas particulier d'une PAMC concordance de type Rochat. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, compte-tenu de (r.3.2.1), qu'une hiérarchie de critère 1, puis 2, puis 3 dans une PAMC de type lexicographique revient à adopter des importances telles que : $k[\{1\}] > k[\{2, 3\}]$ et $k[\{2\}] > k[\{3\}] > k[\emptyset]$ dans une PAMC concordance de type Rochat.

de veto ¹ est tel que, s'il existe un critère i tel que $g_i(b) - g_i(a) > v_i$, on est amené à refuser toute proposition faisant apparaître a comme au moins aussi bonne que b . Cette idée de veto a été présentée et discutée au 3.1.3 (cf. en particulier (r.3.1.6)). Le lecteur notera cependant que les rôles de a et b ont été ici permutés par rapport à (r.3.1.6). Ce seuil est toujours supérieur au seuil de préférence p_i .

Tableau 3.2.2 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3
a	10	9	8
b	8	10	9
c	9	8	10

En utilisant les deux PAMC élémentaires de type concordance qui viennent d'être évoquées, on peut alors obtenir deux PAMC élémentaires de type concordance-discordance. La première, à laquelle nous donnerons le nom de PAMC de type ELECTRE I, repose sur la façon de modéliser la notion de concordance évoquée au 2.3.3 et conduit à un s.r.p. (S, R) de la façon suivante :

$$a S b \text{ si } \frac{k[C(a S b)]}{k[F]} \geq s \text{ et } g_i(b) - g_i(a) \leq v_i, \forall i \in F,$$

$$a R b \text{ si } \text{Non}(a S b) \text{ et } \text{Non}(b S a).$$

Notons ici encore que poser $s = 1$ revient à exiger l'unanimité des critères pour déclarer que $a S b$. Dans ce cas, l'effet de veto ne joue jamais et le surclassement obtenu s'identifie avec S_Δ .

¹ Notons que, comme on l'a vu au 3.1.3, rien n'empêcherait de raisonner avec un seuil de veto pouvant varier selon l'endroit où l'on se trouve sur l'échelle du critère.

On peut également chercher à introduire la notion de discordance sur la base d'une PAMC concordance de type Rochat. On est alors conduit à un s.r.p. (I, P, R) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 a P b & \text{ si } k[C(a P b)] > k[C(b P a)] \text{ et} \\
 & \quad g_i(b) - g_i(a) \leq v_i, \forall i \in F, \\
 a I b & \text{ si } k[C(a P b)] = k[C(b P a)] \text{ et} \\
 & \quad g_i(b) - g_i(a) \leq v_i, \forall i \in F, \\
 & \quad g_i(a) - g_i(b) \leq v_i, \forall i \in F, \\
 a R b & \text{ si } \text{Non}(a P b), \text{Non}(b P a) \text{ et } \text{Non}(a I b).
 \end{aligned}$$

Ces PAMC ainsi que d'autres, moins élémentaires, fondées sur les concepts de concordance et de discordance seront étudiées plus en détail au chapitre 5.

d) PAMC de type somme pondérée

Les PAMC qui viennent d'être évoquées ne prennent pas en compte l'idée de bilan par compensation évoquée au 3.1.5. Comme on l'a vu, une façon simple de prendre en compte cette idée revient à définir, pour chaque critère i , un "taux de conversion" $1/n_i$ permettant d'exprimer des écarts $(g_i(a) - g_j(b))$ dans la "monnaie" d'un critère de référence.

Dans le cas d'une famille cohérente de vrai-critères, ceci peut conduire à une PAMC produisant un s.r.p. de type (I, P) qui est un préordre complet en posant :

$$\begin{aligned}
 a P b & \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i (g_i(a) - g_i(b)) > 0, \\
 a I b & \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i (g_i(a) - g_i(b)) = 0
 \end{aligned}$$

où les k_i représentent les "taux de conversion". On peut les normaliser de façon à ce que l'on ait $\sum_{i=1}^n k_i = 1$.

Il est bien sur possible de récrire ces deux expressions de manière plus classique en posant :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i \cdot g_i(a) > \sum_{i=1}^n k_i \cdot g_i(b),$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i \cdot g_i(a) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot g_i(b).$$

Cette PAMC ne convient que lorsque l'on travaille avec une famille F de vrai-critères dans laquelle les seuls écarts non significatifs sont ceux pour lesquels $(g_i(a) - g_i(b))$ vaut exactement 0. Cette réécriture est alors peu adaptée si l'on souhaite généraliser le modèle de la somme pondérée à des familles ne comprenant plus que des vrai-critères.

Dans le cas d'une famille cohérente de quasi-critères, on peut aménager simplement les expressions ci-dessus en posant :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i \in C(a/b)} k_i (g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i \in C(a/b)} k_i (g_i(a) - g_i(b)) = 0,$$

ce qui revient à exclure les écarts non significatifs, c'est-à-dire tels que $|g_i(a) - g_i(b)| \leq q_i$, du bilan par compensation. Bien d'autres façons de faire sont néanmoins envisageables. On en verra certaines au 5.3.2 c).

Dans le cas d'une famille cohérente de pseudo-critères, on peut chercher à ne faire figurer les écarts tels que $q_i < g_i(a) - g_i(b) \leq p_i$ que pour une part dans le bilan par compensation. Une façon simple de le faire consiste à poser, lorsque les seuils p_i et q_i sont constants :

$$a \text{ P } b \text{ si } \sum_{i \in C(a/b)} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a \text{ I } b \text{ si } \sum_{i \in C(a/b)} k_i \cdot f_i(g_i(a) - g_i(b)) = 0,$$

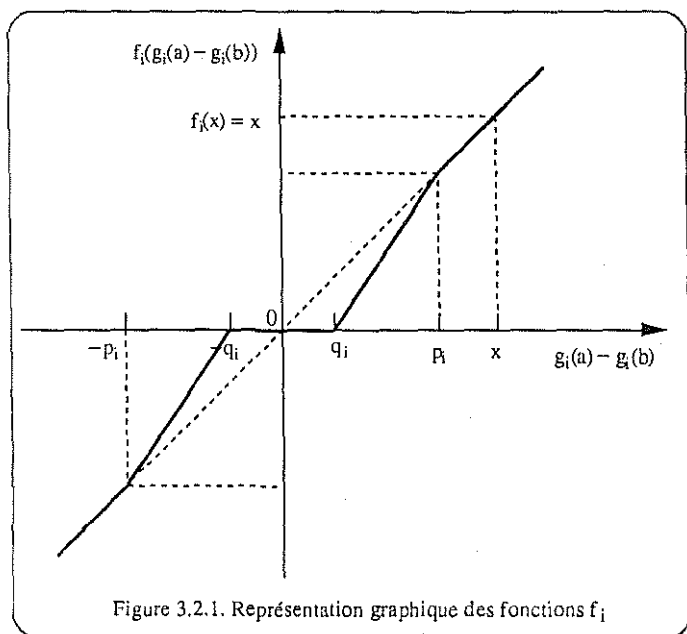
les f_i étant des fonctions telles que :

$$f_i(x) = x \text{ si } |x| > p_i \text{ et}$$

$$f_i(x) = \frac{p_i(x - q_i)}{p_i - q_i} \text{ si } q_i < x \leq p_i,$$

$$f_i(x) = \frac{p_i(x + q_i)}{p_i - q_i} \text{ si } q_i < -x \leq p_i.$$

On peut prolonger la fonction f_i dans l'intervalle $[-q_i, +q_i]$ conformément à ce qui a été fait à la figure 3.2.1. On peut alors écrire :



$$a P b \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i f_i(g_i(a) - g_i(b)) > 0,$$

$$a I b \text{ si } \sum_{i=1}^n k_i f_i(g_i(a) - g_i(b)) = 0.$$

Les PAMC que nous avons présentées dans le cas d'une famille cohérente de quasi ou pseudo-critères conduisent toutes deux à des s.r.p. de type (I, P). Au contraire de ce qui se passe dans le cas d'une famille de vrai-

critères, ces PAMC ne conduisent cependant pas à des s.r.p. où I et P sont transitifs comme le montre l'exemple du tableau 3.2.3.

Tableau 3.2.3 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3
$p = q$	20	20	20
a	100	100	100
b	119	119	79
c	138	138	61

Avec les données du tableau 3.2.3, choisir $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$ conduit alors au s.r.p. a P b, b P c, c P a.

3.2.3 Prise en compte de l'importance relative des critères dans une PAMC

Les considérations du paragraphe précédent ainsi que ce qui a été dit au 3.1 font ressortir que, parmi les informations extérieures au tableau des performances nécessaires à la mise en œuvre d'une PAMC, celles concernant l'importance relative à accorder aux différents critères étaient cruciales. Ceci est conforme à l'idée que l'on se fait habituellement du multicritère : pour agréger, il faut des "poids", poids qui traduisent, en termes numériques, la notion d'importance relative. Il convient cependant de remarquer dès à présent que l'idée de "poids" n'est pas la seule façon de quantifier cette notion. Comme on l'a déjà souligné au 3.1, d'autres grandeurs telles les seuils de veto peuvent permettre d'en saisir des facettes différentes. Nous limiterons cependant notre attention, dans ce paragraphe, au problème des "poids". Nous aurons l'occasion de revenir sur cette question à plusieurs reprises dans cet ouvrage. Il nous a cependant semblé bon de faire dès à présent quelques brèves remarques d'ordre général qui nous paraissent importantes.

a) La plupart des PAMC conduisent à associer, à chaque critère i , un nombre k_i reflétant une facette de l'importance de ce critère au sein de la procédure d'agrégation. Il convient de

remarquer que :

– Toutes choses égales par ailleurs, plus ce coefficient k_i est élevé, plus le critère i acquiert d'importance.

– L'ordre des k_i ne peut pas toujours s'interpréter simplement en termes d'importance relative des différents critères. Ainsi, dans une PAMC de type somme pondérée, changer l'unité dans laquelle s'exprime le critère i implique de changer la valeur numérique du coefficient k_i , ce qui peut entraîner un bouleversement de l'ordre de ces coefficients si l'on souhaite que ce changement d'unité ne se traduise pas par l'établissement d'un s.r.p. différent. L'expression "poids" prêtant souvent à confusion¹, nous utiliserons l'expression de "coefficients d'importance" pour désigner les k_i . De même, nous parlerons de "jeu de coefficients d'importance" pour désigner le n-uple $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

On a vu, au paragraphe précédent, que les PAMC de type somme pondérée ou concordance élémentaire utilisaient de tels coefficients k_i . Les PAMC lexicographiques n'y font pas explicitement appel. Pourtant, il est aussi possible, dans ce cadre, d'affecter un coefficient k_i à chaque critère pour refléter son importance hiérarchique. Toutefois, seul l'ordre des critères défini par les k_i interviendrait alors pour définir le s.r.p.

b) Il importe de souligner que ces coefficients n'ont pas la même interprétation d'une PAMC à une autre du fait de l'utilisation différente qui en est faite. Dans une PAMC de type concordance élémentaire, ils servent à traduire une idée d'importance entre coalitions de critères et constituent des informations inter-critères de type O. Dans une PAMC de type somme pondérée, ils permettent de valoriser, sur une même échelle, des écarts de préférence selon différents critères (cf. 3.1.5) ; ils constituent donc alors une information inter-critère de type C comme on l'a déjà souligné au 3.1.6. Ces coefficients ne peuvent donc s'interpréter en-dehors du cadre de la PAMC qui les utilise, étant

¹ La notion de poids est en effet souvent associée intuitivement aux seules PAMC de type somme pondérée.

intrinsèquement dépendants de l'idée d'importance véhiculée par cette PAMC. Il faut donc être très prudent lorsque l'on cherche à comparer les valeurs numériques de ces coefficients d'importance utilisés dans différentes PAMC. Ceci est d'autant plus vrai que, comme on l'a indiqué plus haut, d'autres grandeurs que les coefficients d'importance peuvent intervenir au sein d'une PAMC pour prendre en compte certains aspects de l'importance relative des critères.

c) Supposons qu'en utilisant une PAMC donnée sur un tableau de performances avec un jeu donné de coefficients d'importance, on ait obtenu un certain s.r.p. On peut alors se demander si d'autres jeux de coefficients d'importance auraient pu conduire à un s.r.p. identique.

Remarquons tout d'abord que, dans la plupart des PAMC, si le jeu de coefficients d'importance $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ conduit à un s.r.p., tous les jeux du type $(\alpha \cdot k_1, \alpha \cdot k_2, \dots, \alpha \cdot k_n)$ avec $\alpha > 0$ conduisent à un s.r.p. identique. On peut donc, sans inconvénients, raisonner en supposant que le jeu de coefficients a été normalisé de manière arbitraire. Une normalisation commode

consiste à poser $\sum_{i=1}^n k_i = 1$.

Une fois décidé d'une normalisation arbitraire, plusieurs jeux de coefficients d'importance différents peuvent-ils conduire au même s.r.p. ? Dans une PAMC concordance élémentaire de type Rochat (et donc, a fortiori, dans une PAMC lexicographique), la réponse à cette question est positive. Tous les jeux de coefficients d'importance traduisant (par addition) une même hiérarchie des groupes de critères conduisent au même s.r.p. Appliquer une PAMC concordance élémentaire de type Rochat sur une famille cohérente de 3 critères avec

$$k_1 = 1/10, k_2 = 2/10, k_3 = 1/10$$

conduit à un s.r.p. qui est le même que si l'on avait choisi le jeu

$$k_1' = 2/11, k_2' = 3/11, k_3' = 6/11.$$

En effet, il est facile de vérifier que, $\forall I, J \subset F, I \cap J = \emptyset$:

$$\sum_{i \in I} k_i > \sum_{j \in J} k_j \Leftrightarrow \sum_{i \in I} k'_i > \sum_{j \in J} k'_j.$$

Le lecteur pourrait penser qu'il n'en va pas de même dans une PAMC de type somme pondérée. Ceci n'est cependant vrai que dans le cas où l'ensemble A est "continu". On verra en effet, au 4.2.1.2, que, dans le cas où A est fini, il existe toujours une infinité de jeux de coefficients d'importance (normalisés) conduisant au même s.r.p. dans le cadre d'une PAMC somme pondérée.

Ainsi, même dans le cas où l'on cherche à rendre compte de préférences pré-existantes à l'aide d'une PAMC, il est presque toujours possible de le faire en utilisant plusieurs jeux de coefficients d'importance.

d) La plupart des acteurs d'un processus de décision confrontés à un tableau de performances vont émettre des jugements intuitifs et qualitatifs concernant l'importance relative des différents critères. Ces jugements traduisent, en général, une position volontariste de ces différents acteurs : ceux-ci souhaitent voir tel ou tel critère avoir beaucoup de "poids" dans la procédure d'agrégation. Le problème essentiel sera donc, pour l'homme d'étude, de parvenir à traduire ces positions volontaristes en un ou un ensemble de jeux de coefficients d'importance ayant une signification précise au sein de la PAMC retenue. On voit donc que, d'une façon plus nette que l'information contenue dans le tableau des performances, les coefficients d'importance sont des construits¹, fruits d'une modélisation impliquant le recueil et/ou l'élaboration d'informations inter-critères dans le cadre d'une PAMC donnée.

¹ Ceci reste vrai même dans le cadre d'une démarche purement descriptive, plusieurs PAMC pouvant parfois être utilisées pour rendre compte des mêmes préférences globales pré-existantes.

Une façon possible de parvenir à cerner un ensemble de jeux de coefficients d'importance consiste à essayer de directement tirer parti des jugements qualitatifs des acteurs sur l'importance relative des critères ¹. Ceci comporte, à notre sens, un grand nombre de difficultés, indépendamment même du fait que les jugements émis par les différents acteurs se révèlent souvent antagonistes ou conflictuels. Une information en termes d'importance n'a, en effet, pas de signification opérationnelle claire en-dehors d'une PAMC donnée. Au prix de nombreux efforts, on pourrait éventuellement, dans une situation donnée, chercher à savoir quels sont les types de raisonnements plus ou moins formalisés que met en œuvre un acteur pour analyser intuitivement un tableau de performances et tenter d'interpréter l'information fournie en termes d'importance au sein de ces raisonnements ². Dans bien des cas, un tel travail nous paraît superflu compte-tenu de sa difficulté et de l'illusoire précision des résultats en termes de coefficients d'importance qui pourrait en résulter au départ d'une formation qualitative et vague. L'important est, à nos yeux, de tenter, lors de l'établissement des coefficients d'importance, de rester cohérent avec ce que semblent être les positions volontaristes des différents acteurs. Ceci implique de renoncer le plus souvent à l'établissement d'un seul jeu de coefficients d'importance. En effet, même si les positions volontaristes des acteurs ne se révèlent pas conflictuelles, le principe même de la traduction de ces positions en termes numériques rend souvent inutile la recherche d'une trop grande précision. Afin d'éviter de raisonner directement sur l'informa-

¹ C'est là ce qu'on appelle, dans la littérature, les méthodes dites "psychométriques" de pondération. Leur émergence remonte à Eckenrode (1965). Elles connaissent un regain d'intérêt lié aux travaux de T. Saaty (voir par exemple Saaty (1981)).

² Il y a là un champ d'investigation de nature empirique encore très ouvert. Parmi les questions dignes d'intérêt, mentionnons :

- Est-il possible de recueillir de l'information directement en termes d'importance de façon suffisamment fiable ?
 - Y a-t-il une méthode de recueil particulièrement efficace à cet égard ?
 - L'information recueillie permet-elle, combinée à telle ou telle PAMC, d'expliquer un certain nombre de préférences globales de l'acteur considéré ?
- On trouvera des indications utiles sur ces questions dans Mousseau (1993).

tion qualitative en termes d'importance dont l'interprétation est, on l'a vu, délicate, on se fondera, le plus souvent, pour donner une valeur numérique aux indices d'importance, sur l'analyse, au sein d'une PAMC donnée, d'un certain nombre de jugements de préférences émis sur des actions judicieusement choisies. Le choix de ces actions, la façon de formuler les questions et de les enchaîner restent, bien entendu, propres à chaque PAMC. Nous y reviendrons à plusieurs reprises dans la suite de cet ouvrage.

3.2.4 Agrégation des performances et agrégation des préférences en théorie du choix social

Le problème de l'agrégation des performances se rapproche, par bien des aspects, du problème classique de l'agrégation des préférences en théorie du choix social¹. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remplacer, dans tout ce qui précède, les mots "critères", "relation S_g ", "préférence globale" par "votants", "préférences individuelles" et "préférences collectives". La théorie du choix social est plus ancienne et a donné lieu à bien davantage de travaux que les problèmes multicritères. Il serait donc illusoire de chercher à la résumer ici. Notre objectif sera donc simplement de tenter de préciser les liens unissant ces deux approches.

Depuis l'ouvrage classique d'Arrow (1963), un des problèmes centraux de la théorie du choix social concerne la possibilité d'agréger, en une préférence collective, les préférences de n individus (votants) concernant un ensemble d'actions (candidats) de façon à respecter un certain nombre d'exigences que l'on estime désirables. A ce titre, une telle procédure d'agrégation est formellement identique à une PAMC, les informations inter-critères étant remplacées, en théorie du choix social, par les exigences que l'on s'impose de respecter.

La plupart des résultats obtenus dans ce domaine sont des résultats d'impossibilité qui démontrent, sous des conditions générales, l'inexistence d'une procédure d'agrégation respectant un petit nombre d'exigences en apparence raisonnables : absence de dictateur, respect de l'unanimité, etc.

Certains, devant l'identité formelle des deux problèmes, ont cru pouvoir transposer ces résultats d'impossibilité au cas multicritère pour en conclure souvent à la vanité de l'analyse multicritère². Cette conclusion serait fondée si l'on pouvait admettre :

¹ Voir Arrow (1963), Sen (1970, 1982) et Kelly (1978).

² Voir par exemple Gargaillo (1982).

1°) que les exigences utilisées en théorie du choix social pour agréger les préférences individuelles doivent l'être aussi au sein des PAMC pour agréger des performances ;

2°) que les seules informations extérieures au tableau de performances dont on dispose pour agréger des performances sont ces exigences.

Dans la majorité des problèmes multicritères, ces deux conditions ne nous paraissent pas satisfaites.

Compte-tenu du nombre extrêmement élevé de façons possibles de combiner diverses exigences de façon à parvenir à un théorème d'impossibilité, il ne nous est pas possible, dans le cadre restreint de cet ouvrage, de fournir une réponse exhaustive aux deux points évoqués. Nous nous contenterons ici de mentionner quelques unes des différences fondamentales entre ces deux approches.

— Dans la définition d'une PAMC, nous avons admis implicitement que le (ou les) s.r.p. issu(s) de son application pouva(en)t ne pas posséder des propriétés remarquables de transitivité et de complétude rendant ensuite nécessaire la mise en œuvre de techniques d'exploitation de ces relations pour parvenir à une prescription. Il en va différemment en théorie du choix social où l'on suppose soit :

. que l'on cherche à construire une préférence collective ayant des propriétés remarquables de transitivité et de complétude¹,

. que l'on cherche à bâtir une préférence collective quelconque que l'on exploite² ensuite de façon à respecter certaines propriétés.

Il y a là une différence importante entre ces deux approches. En particulier, la condition d'indépendance vis-à-vis des actions non pertinentes ainsi que des conditions plus faibles qui lui sont reliées concernant la cohérence vis-à-vis de la contraction ou de la dilatation de l'ensemble des actions est, en général, violée dans la phase d'exploitation du surclassement en analyse multicritère.

— Pour des raisons "institutionnelles", on estime qu'une bonne procédure d'agrégation en théorie du choix social doit pouvoir faire face à n'importe

¹ Ordres ou préordres complets le plus souvent mais aussi, parfois, des structures plus faibles (voir par exemple Sen (1969)). Notons que la recherche de telles structures plus faibles ne contribue que très rarement à supprimer les "cas" d'impossibilité.

² Dans une problématique α s'il s'agit d'élire le meilleur candidat (voir par exemple Bordes (1983)).

quel nombre de votants, quelles que soient leurs préférences. Même si cela est rarement précisé explicitement, il est clair, à nos yeux, qu'aucune PAMC ne peut prétendre à cette universalité et que le domaine de validité de ces procédures est généralement réduit à une catégorie limitée de situations délimitées par des conditions plus ou moins difficiles à formaliser que l'on suppose vérifiées dans les cas pratiques.

– Toutes les PAMC font appel à une notion d'importance relative, notion qui est automatiquement exclue en théorie du choix social si l'on admet le principe, fort démocratique, de rationalité voulant que l'opinion exprimée par un votant soit traitée indépendamment de l'identité de ce votant. Il y a là une différence fondamentale et irréductible entre ces deux approches. De plus, la plupart des PAMC font appel à l'idée de comparaison d'écarts de préférence sur différents critères (en termes du choix social, ceci revient à admettre une certaine "comparaison interpersonnelle des utilités"). Pour qu'une telle comparaison soit possible, il est nécessaire de disposer d'une information plus riche que la seule relation S_i sur chacun des critères (cf. MMCAD, 7.2.4 et 9.4), information que l'on exclut généralement en théorie du choix social¹. On verra d'ailleurs, au 5.5, que les PAMC rejetant l'idée de comparaison d'écarts permettent de retrouver certains théorèmes célèbres d'impossibilité.

Si certaines des exigences classiques utilisées en théorie du choix social se retrouvent "naturellement" en multicritère (respect du principe de Pareto-dominance, monotonie, absence de dictateur – si l'on fait abstraction des procédures lexicographiques, non imposition de la préférence collective), on voit donc qu'il y a, entre les deux approches, certaines différences fondamentales qui imposent de se garder des assimilations et des transpositions trop brutales tant l'agrégation multicritère présente un certain nombre de caractères spécifiques.

Il ne faudrait cependant pas conclure de cette section que ces deux champs d'investigation sont complètement disjoints. D'un point de vue pédagogique, Vansnick (1986a) a montré comment on peut voir le multicritère comme un élargissement et un déplacement de la problématique de la théorie du choix social. Il y a de plus beaucoup à tirer de l'abondante littérature dans

¹ Il est intéressant de noter que lorsqu'une telle information est admise en théorie du choix social, les procédures d'agrégation utilisées présentent alors des analogies frappantes avec les PAMC (voir par exemple Sen (1977, 1979)). On pourra également se référer à l'approche utilitariste prônée par Harsanyi (1955). Pour une démarche allant du multicritère vers le choix social, on consultera le chapitre 10 de Keeney et Raiffa (1976) ainsi que Dyer et Sarin (1979a).

ce domaine, tant du point de vue de la conception des PAMC que de l'exploitation du surclassement. Nous reviendrons sur ces questions au 5.5 et au 6.5.

Chapitre 4

PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE CONDUISANT À UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est l'étude des PAMC visant à établir un s.r.p. sur l'ensemble des actions en bâtissant un critère unique de synthèse $g(a) = V(g_1, g_2, \dots, g_n)$.

Ces diverses PAMC se différencient principalement par les propriétés et le pouvoir discriminant qu'elles confèrent à ce critère de synthèse.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des PAMC qui bâtissent un vrai-critère de synthèse. On y étudie plus particulièrement la PAMC additive conduisant à poser :

$$g(a) = v_1[g_1(a)] + v_2[g_2(a)] + \dots + v_n[g_n(a)]$$

qui est analysée tant du point de vue axiomatique que de celui de sa mise en œuvre.

Après avoir rapidement passé en revue d'autres façons de parvenir à un vrai-critère de synthèse, on consacre la section suivante à l'étude des PAMC visant à l'établissement d'un critère unique de synthèse muni de seuils de discrimination. Bien que l'intérêt de ce type de PAMC soit très important, on montre les difficultés tant pratiques que théoriques que l'on rencontre lorsque l'on souhaite les appliquer.

La section 4.4 est consacrée aux PAMC visant à l'établissement d'un critère de synthèse induisant à la fois un s.r.p. sur A et un s.r.p. sur l'ensemble des mutations $A \times A$. Après avoir montré l'intérêt de ce type de PAMC pour l'aide à la décision et analysé diverses nouvelles hypothèses d'indépendance qui apparaissent dans ce cas, on insiste plus particulièrement sur les formes d'agrégation additives et multiplicatives.

La section 4.5 de ce chapitre est consacrée au cas particulier des PAMC se fondant sur la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern. On montre qu'elles visent à bâtir un critère unique de synthèse en se fondant sur une description probabiliste des conséquences de la mise à exécution des actions sans nécessairement bâtir un tableau de performances. Dans ce cadre, on peut envisager un grand nombre de PAMC. On se restreint, dans cette section, à l'étude des procédures d'agrégation additives et multiplicatives (qui sont, de loin, les plus utilisées en pratique) et aux problèmes soulevés par leur mise en œuvre.

On conclut ce chapitre au 4.6 par quelques remarques générales sur les problèmes soulevés par la mise en œuvre des PAMC qui y sont présentées.

4.1 GÉNÉRALITÉS

Il est naturel et courant de fonder l'aide à la décision sur un modèle de préférences issu d'un critère g défini sur A . Lorsqu'une analyse préalable a montré l'intérêt que pouvait présenter la prise en compte d'une famille F de n critères ($n > 1$), ceux-ci peuvent être synthétisés en un seul par ce que nous avons appelé (cf. définition 3.2.1) une **procédure d'agrégation multicritère**. Les PAMC qui feront l'objet de ce chapitre visent précisément à bâtir sur A une fonction g à valeurs réelles de telle sorte que g puisse être considéré comme un critère et donc en particulier que :

$$g(a) \geq g(b) \Rightarrow a \text{ S } b$$

où S est une relation de surclassement globale prenant en compte les n critères de F .

Il importe, dès à présent, d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que ce qui est dit dans ce chapitre peut avoir un intérêt dans des approches opérationnelles autres que celles du critère unique de synthèse ¹. Dans une méthode relevant de l'approche opérationnelle du surclassement de synthèse (A.O.2), on pourra, par exemple, chercher à bâtir plusieurs fonctions g conduisant donc à plusieurs relations de surclassement globales et à ne retenir en définitive que l'intersection de ces différents surclassements, laissant ainsi place à d'éventuelles situations d'incomparabilité (cf. 5.3.2.3). Dans l'approche du jugement local interactif (A.O.3), on peut concevoir un protocole d'interaction fondé sur une

¹ Cf. 1.7.

"succession" de fonctions d'agrégation, formellement identiques à des critères de synthèse définis de façon locale, en fonction des réponses fournies par l'interrogé (cf. chapitre 7).

La plupart de ces PAMC cherchent à définir le critère g sur la base des critères de F et donc à bâtir une fonction d'agrégation V telle que :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)).$$

Cette fonction V tient compte à la fois de l'information contenue dans le tableau des performances et d'informations inter-critères (cf. 3.1.6).

On verra au 4.5 qu'on peut également vouloir bâtir V directement à partir du modèle d'évaluation $\Gamma(A)$ des actions de A (cf. 1.5). On a donc, dans le cas plus général :

$$g(a) = V(\Gamma(a)) = V(\{\gamma(a), \delta_i^*(e)\}, i = 1, 2, \dots, \bar{n}).$$

Les différentes PAMC visant à bâtir un critère unique de synthèse se différencient principalement par :

- la forme de la fonction V utilisée ;
- la nature des informations inter-critères qu'elles prennent en compte à côté du tableau des performances ;
- le pouvoir discriminant et les propriétés qu'elles confèrent à g .

La section 4.2 est consacrée à l'étude des vrai-critères de synthèse. On y insiste plus particulièrement sur un modèle d'agrégation additif. A la section 4.3, on aborde l'étude de critères de synthèse au pouvoir discriminant plus nuancé. La section 4.4 étudie des critères de synthèse permettant de comparer non seulement des actions mais aussi des écarts entre actions. La théorie de l'utilité espérée fait l'objet de la section 4.5. On conclura ce chapitre au 4.6 par quelques remarques sur les problèmes liés à la mise en œuvre de ces PAMC.

Il est possible d'envisager un très grand nombre de PAMC entrant dans le cadre ci-dessus. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à celles qui présentent, à nos yeux, un certain intérêt en aide à la décision. Ceci implique, bien entendu, une part importante de subjectivité. Nous avons cherché principalement à ne mentionner que les PAMC qui ont déjà été appliquées dans des études réelles ou qui, à notre avis, seraient susceptibles de l'être compte-tenu des informations qu'elles requièrent pour bâtir V. On se contentera de mentionner brièvement celles dont l'intérêt est avant tout théorique.

Pour chaque PAMC envisagée, on s'efforcera à la fois de montrer comment elles peuvent être mises en œuvre et quelles sont les hypothèses théoriques qui "sous-tendent" leur utilisation ¹. S'intéresser à l'analyse axiomatique d'une PAMC de ce chapitre ou la mettre en œuvre suppose, le plus souvent, de raisonner sur un ensemble d'actions plus riche que l'ensemble A des actions potentielles. Plus précisément, on raisonnera sur un ensemble d'actions contenant A et suffisamment riche d'actions fictives pour que l'on puisse admettre que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions est identique ² à $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, produit cartésien des échelles associées aux n critères de F.

L'analyse axiomatique d'une PAMC vise, comme nous l'avons déjà mentionné au 3.2, à caractériser les s.r.p. susceptibles d'être obtenus à l'aide de cette PAMC. Une telle analyse conduit à énoncer les "hypothèses de rationalité" sous-jacentes à l'utilisation d'une PAMC. Si certaines de ces hypothèses peuvent avoir une interprétation relativement simple soit en vue d'un test, soit pour servir de fondement à un raisonnement, il n'est pas exclu que l'analyse axiomatique d'une PAMC fasse apparaître des conditions difficilement interprétables. De plus, comme nous le verrons au 4.2.1.2, il est des cas où le problème de la caractérisation axiomatique n'admet pas de

¹ Appliquer une PAMC aboutit à définir un s.r.p. sur A. Si ce s.r.p. n'est pas remis en cause par les acteurs du processus de décision, il est important de savoir s'il y a bien conformité entre le s.r.p. qui a été bâti et les axiomes de cohérence mentionnés au 2.2. Ce sera le cas de façon évidente pour toutes les PAMC étudiées dans ce chapitre et nous n'y reviendrons pas dans la suite, laissant au lecteur le soin d'opérer ces vérifications s'il le désire.

² On s'autorisera, dans ces conditions, à parler de s.r.p. sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

solution simple (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de systèmes d'axiomes pleinement satisfaisants pour caractériser les s.r.p. en question, ce qui est par exemple le cas si l'on a besoin d'une infinité d'axiomes). Dans ce cas, il est fréquent de devoir s'intéresser à un problème moins général admettant une solution simple en imposant au problème de vérifier un certain nombre de conditions structurelles non nécessaires. L'interprétation du système d'axiomes obtenu devient alors extrêmement délicate dans une optique d'aide à la décision (d'autant plus que deux corps d'axiomes suffisants mais pas nécessaires ne sont pas forcément logiquement équivalents), au point qu'il peut paraître légitime de se demander si sa recherche présente véritablement un intérêt. Sans répondre de façon tranchée à cette question, nous croyons néanmoins qu'une telle analyse peut contribuer à mieux faire comprendre le fonctionnement des PAMC et, qu'à terme, elle permettra de mieux les comparer et les utiliser.

Cet ouvrage ne vise pas à faire une revue de littérature complète du problème de l'analyse axiomatique des PAMC. Pour une analyse détaillée de ces problèmes, nous renvoyons aux ouvrages de base en la matière : Krantz et al. (1971), Roberts (1979), Pzangal (1971), Fishburn (1970a). Nous nous contenterons donc, le plus souvent, d'énoncer des résultats renvoyant le lecteur intéressé à ces ouvrages pour y trouver une démonstration complète et rigoureuse.

Avant d'aborder l'étude de ces PAMC, il nous paraît important d'insister sur leur caractéristique essentielle qui est de refuser l'introduction de l'incomparabilité à ce stade de la modélisation (ce qui n'exclut pas, comme nous l'avons déjà mentionné, de les utiliser au sein d'A.O.2, l'incomparabilité étant introduite ultérieurement). Les s.r.p. auxquels ces procédures conduisent sont donc particulièrement riches et, partant, souvent sujets à caution car établis dans des conditions pouvant être remises en cause. Le lecteur familier avec la méthodologie proposée dans MMCAD percevra sans peine tout ce que cette élimination systématique de l'incomparabilité peut parfois avoir de restrictif dans les problèmes réels compte-tenu de la qualité des "données" de $\Gamma(A)$ et de la présence éventuelle d'acteurs multiples ayant des systèmes de valeurs fortement contrastés. Cependant, nous invitons le lecteur à se reporter au 1.6.1 pour se convaincre que l'utilisation de telles PAMC ne doit pas être confondue avec une analyse purement monocritère. Ces PAMC ont été souvent utilisées dans le cadre de méthodes ayant été appliquées à des problèmes réels. Elles présentent donc un intérêt certain en matière d'aide multicritère à la décision.

Soulignons enfin que, lorsque l'on a eu recours à une PAMC bâtissant un critère unique de synthèse, l'élaboration d'une recommandation dans l'une des trois problématiques α , β ou γ s'opère de façon assez naturelle et ne nécessite pas, en général, la mise en œuvre de procédures spécifiques comme on le verra plus précisément au 4.6 et au 6.1.

4.2 CAS OÙ L'ON CHERCHE À BÂTIR UN VRAI-CRITÈRE

On verra au 4.3 les difficultés auxquelles conduit l'utilisation d'un critère de synthèse avec seuils de discrimination, ces difficultés allant de pair avec une modélisation des préférences plus réaliste et flexible. De ce fait, la plupart des PAMC visant à bâtir un critère de synthèse cherchent à en faire un vrai-critère. Cette section est consacrée à ces PAMC. Elles conduisent à une modélisation des préférences globales telle que :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)),$$

$$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b),$$

$$a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b).$$

Dans le cas où l'évaluation des actions de A sur chacun des critères conduit à un petit nombre de valeurs, on peut vouloir chercher à définir la fonction V en se contentant d'associer une et une seule des relations P ou I à la comparaison de tous les couples de vecteurs de performances ¹ ($\underline{g}(a)$, $\underline{g}(b)$). C'est cette idée qui est mise en œuvre dans la **méthode des déclassements comparés** ². Dans le cas général, on conçoit bien qu'une telle définition de V est souvent difficile. Pour bâtir g, il faut donc, alors, spécifier une forme fonctionnelle précise pour V permettant de donner une valeur à g(a) compte-tenu du vecteur de performances $\underline{g}(a)$ et d'informations inter-critères.

¹ Rappelons que $\underline{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$.

² Cf. Le Boulanger et Roy (1968). Pour une autre illustration de cette méthode, voir aussi MMCAD, 11.2.2.

Lorsque l'on cherche à bâtir un vrai-critère de synthèse, il semble naturel de vouloir le faire sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères. C'est ce que font la plupart des PAMC étudiées dans ce chapitre. Il importe cependant de noter que les trois axiomes fondateurs du concept de famille cohérente n'interdisent nullement de chercher à bâtir un vrai-critère de synthèse sur la base d'une famille de quasi, pré ou pseudo-critères¹. Sauf mention contraire, on n'envisagera pas ce cas dans la suite de cette section et l'on supposera que l'on travaille sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères. Mentionnons cependant que, dans une étude réelle, il peut y avoir un intérêt certain à bâtir un modèle d'évaluation des actions faisant intervenir des seuils de discrimination non nuls, même si, dans une deuxième phase de l'étude, on cherche à obtenir un préordre sur A, par exemple en tirant parti du préordre sous-jacent au quasi, pré ou pseudo-critère² ou au moyen d'hypothèses ad hoc.

4.2.1 Agrégation additive³

4.2.1.1 Définitions et remarques

Un des modèles les plus simples qu'on puisse envisager, en dehors de la somme pondérée que l'on a déjà étudiée au 3.2.2 et au 3.2.3, revient à supposer que l'on peut donner une valeur à $g(a)$ en additionnant de façon adéquate les diverses composantes de $g(a)$. Ceci revient à considérer un modèle tel que, $\forall a, b \in A$:

$$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b),$$

$$a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b)$$

avec

$$g(a) = \sum_{i=1}^n v_i(g_i(a)) \quad (r.4.2.1)$$

où les v_i sont des fonctions monotones strictement croissantes.

¹ En effet, aucun d'eux ne fait apparaître les relations I_k , Q_k ou P_k .

² Cf. 1.4.

³ On pourrait préciser ici "Agrégation additive d'ordre 1" en référence au travail de Mareschal (1988). Nous nous référerons souvent à la PAMC définie par (r.4.2.1) en parlant d'agrégation additive **simple** pour éviter, lorsque le besoin s'en présentera, tout risque de confusion avec d'autres PAMC utilisant également une opération d'addition. Précisons que le terme de "simple" ne préjuge bien sûr en rien des qualités et de l'intérêt de cette PAMC.

Il est élémentaire de montrer que, dans ces conditions, $v_i(g_i)$ est également un vrai-critère et modélise le même préordre que g_i .

Dans les problèmes réels, on peut mettre (r.4.2.1) sous une forme qui permet de mieux en apprécier l'intérêt. Dans ces problèmes, on peut en effet supposer que, $\forall i \in F$, l'échelle E_i du critère g_i est bornée inférieurement par une valeur e_{i*} et supérieurement par une valeur e_i^* , ces deux valeurs étant distinctes. On notera $\underline{e}_* = (e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{n*})$ et $\underline{e}^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$. Posons, $\forall i \in F$:

$$v_i^* = v_i(e_i^*),$$

$$v_{i*} = v_i(e_{i*}),$$

$$v^* = \sum_{i=1}^n v_i^*,$$

$$v_* = \sum_{i=1}^n v_{i*},$$

$$w_i(g_i(a)) = (v_i(g_i(a)) - v_{i*}) / (v_i^* - v_{i*}),$$

$$k_i = \frac{v_i^* - v_{i*}}{v^* - v_*}.$$

Considérons alors le critère g' défini par :

$$g'(a) = (g(a) - v_*) / (v^* - v_*).$$

Il est facile de montrer que g' est un codage de g . Il s'agit donc d'un vrai-critère modélisant le même préordre.

Compte-tenu de ce qui précède, on peut, dans les problèmes réels, récrire (r.4.2.1) en posant :

$$g'(a) = \sum_{i=1}^n k_i w_i(g_i(a)) \quad (\text{r.4.2.2})$$

avec :

$$\sum_{i=1}^n k_i = 1,$$

$$w_i(e_{i*}) = 0, w_i(e_i^*) = 1,$$

$g'(a)$ étant compris entre 0 et 1.

Sous la forme (r.4.2.2), on voit que la PAMC additive revient :

- à trouver un codage de chaque critère et
- à appliquer un modèle de somme pondérée sur les codages des critères.

La somme pondérée en est donc un cas particulier où tous les codages sont des fonctions identité. En recourant à de tels codages, la PAMC additive permet de s'affranchir des hypothèses de proportionnalité et d'invariance par translation, sous-jacentes au modèle de la somme pondérée (cf. 3.1.5).

Notons que, comme dans le modèle de la somme pondérée, les coefficients k_i utilisés dans (r.4.2.2) dépendent de l'échelle du critère g_i . La comparaison de tels coefficients est donc, ici encore, dépourvue de signification pour apprécier l'importance relative de ces critères.

L'intérêt de la PAMC additive (r.4.2.1) ou (r.4.2.2) en aide à la décision tient à sa grande simplicité. Nous en avons tous eu une expérience intuitive, par exemple dans le cas particulier consistant à calculer une moyenne de notes obtenues à des examens. Cette PAMC est certainement la plus utilisée en aide multicritère à la décision, soit en tant que telle ou sous forme de somme pondérée, soit par le biais de calculs de distances ¹ ou en

¹ On peut par exemple montrer simplement que bâtir un s.r.p. en calculant une distance de Minskowski (de degré fini (cf. 7.2)) par rapport à un point de référence se ramène à un modèle du type (r.4.2.1) sous réserve que le point de référence soit situé de manière adéquate.

goal programming ¹, ... Cette PAMC ne va cependant pas sans inconvénients, tant pratiques que théoriques, comme nous le verrons par la suite. Elle appelle dès à présent quelques remarques.

a) Un premier examen de (r.4.2.1) révèle que, dans un s.r.p. (P, I) construit en utilisant un modèle d'agrégation additive :

- (P, I) est un préordre complet.
- Toute sous-famille de critères est indépendante au sens des préférences dans F^2 . On dira que les critères sont **mutuellement indépendants au sens des préférences**.

Tout s.r.p. (P, I) vérifiant ces deux hypothèses ne peut cependant pas être obtenu avec (r.4.2.1) comme le montre l'exemple numérique ³ du tableau 4.2.1.

Considérons un ordre complet rangeant les actions de la façon suivante : $a_1, a_4, a_2, a_3, a_5, a_7, a_8, a_6$ puis a_9 . Dans ce s.r.p., il est facile de vérifier que g_1 et g_2 sont indépendants au sens des préférences dans $F = \{g_1, g_2\}$ (ce sont donc bien des critères). Cependant, il est impossible qu'un tel s.r.p. ait pu être obtenu en utilisant une agrégation additive. En effet, si tel était le cas, on aurait :

$$a_3 P a_5 \Leftrightarrow v_1(3) + v_2(1) > v_1(2) + v_2(2),$$

$$a_5 P a_7 \Leftrightarrow v_1(2) + v_2(2) > v_1(1) + v_2(3),$$

$$a_8 P a_6 \Leftrightarrow v_1(1) + v_2(2) > v_1(2) + v_2(1),$$

¹ en goal programming classique et non en goal programming avec "poids préemptifs".

² Conformément à ce qui a été dit au 2.3.2 et pour rester cohérent avec une tradition bien établie, nous emploierons, dans ce chapitre traitant de l'agrégation en un critère unique de synthèse, l'expression "indépendance au sens des préférences" au lieu de "séparabilité".

³ Il est possible de bâtir de tels exemples pour un nombre de critères supérieur à deux mais leur taille nous empêche d'en reproduire un ici. Notons que, dans cet exemple, l'ensemble des vecteurs de performances des actions considérées a bien une structure de produit cartésien.

$$a_4 P a_2 \Leftrightarrow v_1(2) + v_2(3) > v_1(3) + v_2(2).$$

Tableau 4.2.1 : Exemple numérique

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
g_1	3	3	3	2	2	2	1	1	1
g_2	3	2	1	3	2	1	3	2	1

L'addition des deux premières inéquations donne :

$$v_1(3) + v_2(1) > v_1(1) + v_2(3)$$

alors que celle des deux dernières conduit à :

$$v_1(1) + v_2(3) > v_1(3) + v_2(1),$$

ce qui est contradictoire.

b) La PAMC additive conduit à trouver un codage v_i de chacun des critères g_i et à bâtir un s.r.p. (P, I) tel que :

$$a P b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i(g_i(a)) > \sum_{i=1}^n v_i(g_i(b)) \text{ et}$$

$$a I b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i(g_i(a)) = \sum_{i=1}^n v_i(g_i(b)).$$

Cette formulation, si elle est classique, ne doit cependant pas faire oublier qu'il est possible de présenter cette PAMC tout autrement.

Considérons, à titre d'exemple, le codage

$$g'(a) = \exp(g(a))$$

du critère $g(a)$ défini par (r.4.2.1). La fonction exponentielle étant strictement croissante, g' conduira au même s.r.p. (P, I) sur A que g . On peut alors reformuler le modèle en écrivant :

$$g'(a) = \exp\left(\sum_{i=1}^n v_i(g_i(a))\right) = \prod_{i=1}^n (\exp(v_i(g_i(a)))) = \prod_{i=1}^n v'_i(g_i(a))$$

où $v'_i(g_i(a)) = \exp(v_i(g_i(a)))$ est un codage de $g_i(a)$.

La PAMC additive peut donc également se concevoir comme une agrégation multiplicative^{1 2} (on pourrait d'ailleurs également faire apparaître d'autres opérations plus complexes). Le terme "additive" prête donc à confusion. Compte-tenu de ces remarques, nous le retiendrons néanmoins dans le souci de rester cohérent avec une terminologie déjà bien établie.

4.2.1.2 Analyse axiomatique

Rappelons que, dans tout ce qui suit, on supposera que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que tout vecteur de performances de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ correspond à l'évaluation d'une action³. Rares sont les résultats disponibles lorsque l'on raisonne sur un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ n'ayant pas une structure de produit cartésien. Précisons que cette hypothèse, qui revient à ajouter à A un grand nombre d'actions fictives, souvent irréalistes, ne va pas sans poser problème lorsqu'il est exclu que certaines combinaisons de performances puissent correspondre à des actions réalistes (cf. 2.4.3).

La forme additive (r.4.2.1) a donné lieu à d'innombrables publications dont la teneur est bien résumée dans les ouvrages

¹ Pour une agrégation multiplicative respectant l'indépendance au sens des préférences de chaque sous-ensemble de critères, l'inverse est également vrai.

² Mentionnons cependant que, si l'on peut montrer l'équivalence au niveau formel entre une agrégation multiplicative et une agrégation additive, cette dernière reste, en pratique, bien plus simple à faire comprendre et donc à mettre en œuvre. Sur ce point, voir Schärli (1985).

³ Ce qui importe, sur le plan théorique, c'est que l'ensemble des vecteurs de performances des actions jouisse d'une structure de produit cartésien. Dans tout ce qui suit, on pourrait donc remplacer $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ par $g_1(A) \times g_2(A) \times \dots \times g_n(A)$. Cependant, ceci conduirait à lier l'analyse à un ensemble A particulier.

mentionnés plus haut. On a déjà remarqué que, dans un s.r.p. (P, I) obtenu avec (r.4.2.1) :

- (P, I) était un préordre complet ;
- toute sous-famille de critères était indépendante au sens des préférences dans F .

Comme l'a montré l'exemple du tableau 4.2.1, ces deux conditions ne sont cependant pas suffisantes pour s'assurer qu'un s.r.p. puisse être obtenu avec (r.4.2.1). Dans le cas général, aucune condition simple ajoutée à elles deux ne permet d'obtenir un corps d'axiomes nécessaires et suffisants¹.

Lorsque $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est fini, on peut obtenir un corps d'axiomes nécessaires et suffisants pour la représentation (r.4.2.1). En effet, pour chaque paire d'actions (a, b) , le s.r.p. (P, I) définit une inéquation linéaire dont les inconnues sont les valeurs de $v_i(g_i(a))$ et $v_i(g_i(b))$. En considérant l'ensemble de toutes les paires d'actions, on obtient alors un ensemble fini d'inéquations linéaires. On peut alors faire appel à des résultats classiques d'algèbre linéaire pour caractériser les systèmes admettant une solution et donc les s.r.p. (P, I) représentables par un vrai-critère de synthèse vérifiant (r.4.2.1).

Nous donnons ci-après un résultat démontré par Fishburn (1970a) à la suite de Scott (1964). Dans ce résultat, $\underline{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ et $\underline{y}^k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$ désignent les éléments de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. On écrira que $\underline{x}^k P \underline{y}^k$ (resp. $\underline{x}^k I \underline{y}^k$) s'il existe deux actions (a, b) telles que $g(a) = \underline{x}^k$, $g(b) = \underline{y}^k$ et $a P b$ (resp. $a I b$).

RÉSULTAT 4.2.1 : Soit (P, I) un s.r.p. sur un ensemble fini $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

Il existe un vrai-critère de synthèse vérifiant (r.4.2.1) si et seulement si :

$$\forall p = 2, 3, \dots,$$

$$\forall \underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^p, \underline{y}^1, \underline{y}^2, \dots, \underline{y}^p \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \text{ tels que}$$

¹ Il ne s'agit pas là d'un problème ouvert mais d'une impossibilité logique (cf. Scott et Suppes (1958)).

$(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^p)$ est une permutation de $(y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^p)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$,
 $[\underline{x}^j P \underline{y}^j \text{ ou } \underline{x}^j I \underline{y}^j \text{ pour } j = 1, 2, \dots, p-1] \Leftrightarrow [\text{Non}(\underline{x}^p P \underline{y}^p)]$.

Le résultat 4.2.1 utilise en fait une infinité dénombrable d'axiomes puisque la condition énoncée doit être vérifiée pour tout entier $p \geq 2$. La nécessité de cette condition est facilement démontrée. De même, on peut prouver aisément qu'elle impose à (P, I) d'être un préordre complet vérifiant l'indépendance mutuelle au sens des préférences. Son interprétation est cependant loin d'être simple et un tel résultat illustre les difficultés que l'on peut rencontrer à utiliser des résultats d'ordre axiomatique en aide à la décision.

Ce type de résultat a été étendu (au prix d'une complexité plus grande) au cas d'un ensemble dénombrable et infini non dénombrable¹.

S'il existe un vrai critère g vérifiant (r.4.2.1), il est clair que tout critère g' défini par :

$$g'(a) = \sum_{i=1}^n v_i'(g_i(a)) \text{ et} \quad (\text{r.4.2.3})$$

$$v_i'(g_i(a)) = \alpha v_i(g_i(a)) + \beta_i \text{ avec } \alpha, \beta_i \in \mathbf{R} \text{ et } \alpha > 0$$

jouit également des mêmes propriétés.

On peut cependant montrer facilement que l'ensemble des vrai-critères vérifiant la forme additive (r.4.2.1) ne se déduit pas simplement d'un de ses éléments en appliquant la transformation (r.4.2.3).

Considérons l'exemple du tableau 4.2.2.

¹ Voir Tversky (1967) et Jaffray (1974).

Tableau 4.2.2 : Exemple numérique

	a_1	a_2	a_3	a_4
g_1	1	1	3	3
g_2	1	2	1	2

Le s.r.p. : $a_4 P a_3, a_4 P a_2, a_4 P a_1, a_3 P a_2, a_3 P a_1, a_2 P a_1$ peut se représenter à l'aide du vrai-critère $g(a) = g_1(a) + g_2(a)$. Mais on peut tout autant utiliser, pour le représenter, le vrai-critère $g(a) = \exp(g_1(a)) + \log(g_2(a))$ ¹.

On conçoit donc qu'il soit relativement difficile d'interpréter la forme des fonctions de codage v_i dans un tel cadre.

Dès lors que l'on s'autorise à raisonner "dans le continu" sur un ensemble d'actions infini et pourvu que le préordre complet (P, I) se comporte de manière "compatible" avec ce continu², la solution axiomatique au problème (r.4.2.1) devient beaucoup plus simple. Dans le cas $n \geq 3$ (le cas $n = 2$ étant plus complexe), cette

¹ On peut montrer (voir Krantz et al. (1971, ch. 9)) que, sur un ensemble fini, s'il existe un vrai-critère g vérifiant (r.4.2.1), alors il en existe une infinité d'autres ne se déduisant pas les uns des autres par application de la transformation (r.4.2.3). Toutes les transformations monotones strictement croissantes ne sont cependant pas admissibles (on pourra considérer pour s'en convaincre le critère $g(a) = g_1(a) + \exp(g_2(a))$ dans l'exemple du texte). On est donc en présence d'une structure intermédiaire entre l'"ordinal" et le "cardinal" qui a reçu le nom de "structure métrique ordonnée". Pour un algorithme permettant de caractériser l'ensemble des vrai-critères vérifiant (r.4.2.1), on pourra se reporter à McClelland et Coombs (1975). On pourra également se reporter à l'étude de Berhaut (1981).

² Ceci est réalisé en recourant à des hypothèses de solvabilité (cf. Krantz et al. (1971, ch. 6)) imposant à la structure manipulée d'être suffisamment riche. En plus d'hypothèses de non trivialité, il faut également exclure (à l'aide de conditions archimédiennes) l'occurrence de cas où le préordre (I, P) ne serait pas représentable par un vrai-critère, situation pouvant se produire sur des ensembles infinis. Notons que ces conditions peuvent se reformuler très économiquement mais au prix d'une interprétation particulièrement malaisée en termes topologiques (cf. Debreu (1960)).

immersion dans le continu comporte deux conséquences essentielles :

- le fait que (P, I) soit un préordre complet joint à l'indépendance mutuelle au sens des préférences sont des conditions non seulement nécessaires mais aussi suffisantes pour (r.4.2.1) ;
- l'ensemble des solutions à (r.4.2.1) est caractérisé par la transformation (r.4.2.3).

Dans ce cadre, les codages v_i deviennent uniques, à l'exception de leur origine (coefficients β_i) et de leur unité, celle-ci devant être raisonnée pour tous les codages à la fois. Le gain retiré de cette immersion dans le continu est donc considérable, tant du point de vue théorique que pratique, ces propriétés d'unicité donnant un "sens" à la forme des codages utilisés, ce qui rend possible la mise en œuvre de certaines procédures d'"estimation" pratiques. Ce gain est néanmoins réalisé au prix de l'obtention d'un système d'axiomes dont l'interprétation en aide à la décision est assez délicate (contrairement à d'autres domaines où l'introduction du "continu" va de soi) en conférant aux axiomes nécessaires une force accrue due aux structures particulières auxquelles ils s'appliquent.

Notons enfin que l'adoption d'une forme additive comporte une conséquence importante, très souvent utile en pratique. Un simple examen de (r.4.2.1) montre en effet que, dans une forme additive, le taux de substitution ¹ entre deux critères i et j , $r_{ij}(g, \delta_j)$ ne dépend pas des performances sur les critères autres que i et j . Sous des hypothèses techniques additionnelles ², on peut montrer que, réciproquement, toute PAMC produisant un s.r.p. tel que, pour tout i et j , les taux de substitution $r_{ij}(g, \delta_j)$ ne dépendent pas des performances sur les critères autres que i et j est équivalente à une forme additive de type (r.4.2.1). Ceci est, par exemple, le cas dans une PAMC de type multiplicatif vérifiant l'indépendance mutuelle au sens des préférences. Comme nous l'avons déjà mentionné au 4.2.1.1, une telle PAMC est équivalente à une PAMC additive.

¹ Cf. 3.1.5. Puisque l'on raisonne ici avec des vrai-critères, rien n'empêcherait de ne considérer que la limite du rapport $r_{ij}(g, \delta_j)/\delta_j$ lorsque δ_j tend vers 0, c'est-à-dire des taux marginaux de substitution.

² Le lecteur intéressé trouvera la démonstration formelle de ce résultat dans Ting (1971).

4.2.1.3 Mise en œuvre ¹

Chercher à construire un vrai-critère en utilisant une PAMC additive suppose que l'on a préalablement soit admis comme base de travail (démarche constructive), soit accepté au vu de tests (démarche descriptive) l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences. Nous reviendrons sur ce problème au 4.2.1.4 en admettant ici que tel est le cas. On a vu, au 4.2.1.1, pour quelles raisons il est intéressant d'introduire des fonctions de codage v_i . En pratique, il faut leur donner une forme explicite. Les techniques utilisées pour cela doivent être celles que les fonctions v_i ainsi bâties jouent précisément le rôle qu'on veut leur faire jouer. Ce problème n'est pas simple.

Fishburn (1967) mentionne 24 méthodes différentes pour bâtir les codages v_i . Ce nombre se réduit à 18 si l'on excepte les méthodes utilisant une technique probabiliste qui sont plus adaptées au cas de la théorie de l'utilité espérée (cf. 4.5). Toutes ces méthodes reviennent à donner une importance aux écarts $g_i(a) - g_i(b)$ sous la forme $v_i(g_i(a)) - v_i(g_i(b))$ en choisissant une unité de façon adéquate. Ceci peut être fait de multiples façons et nous renvoyons à Fishburn (1967) pour un aperçu des différentes méthodes envisageables. Nous nous contenterons ici d'en décrire une, figurant dans l'ouvrage de Keeney et Raiffa (1976, ch. 3), qui présente la particularité d'être uniquement fondée sur des jugements en termes de préférence et d'indifférence (à l'exclusion de jugements en termes d'intensité de préférence par exemple) et qui, donc, ne fait appel qu'à des notions utilisées dans l'analyse axiomatique du modèle (c'est là précisément une des vertus – possibles – d'une analyse axiomatique que de permettre la conception de méthodes de construction appropriées). Elle se justifie essentiellement dans une démarche descriptive.

¹ Dans cette section, nous ne ferons qu'évoquer les principes généraux de mise en œuvre. On laissera en particulier de côté tout ce qui a trait à la phase essentielle de l'analyse de robustesse qui relève de l'élaboration de la recommandation davantage que de la mise en œuvre d'une PAMC. On y reviendra au 4.6.

a) Fonctions v_i

On a vu que, dans les problèmes réels, le vrai-critère issu d'une agrégation additive pouvait toujours s'écrire sous la forme (r.4.2.2), c'est-à-dire ¹ :

$$g(a) = \sum_{i=1}^n k_i v_i(g_i(a)),$$

$$\sum_{i=1}^n k_i = 1,$$

$$v_i(e_i^*) = 1,$$

$$v_i(e_i^*) = 0.$$

}

(r.4.2.2 bis)

Considérons une action fictive a telle que :

$$g(a) = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_n).$$

Afin d'alléger la notation, on notera $(x_i; z^{-i})$ un tel vecteur de performances dans cette section.

Considérons alors deux actions a et b telles que :

$$g(a) = (x_i, y^{-i}) \text{ et}$$

$$g(b) = (x_i, z^{-i}).$$

Dans le modèle additif, la relation liant a à b ne dépend pas de la valeur x_i . On peut toujours trouver des valeurs y^{-i} et z^{-i} telles que l'on ait $a P b$.

Considérons à présent quatre actions a_1, a_2, a_3, a_4 telles que :

$$g(a_1) = (e_i^*; y^{-i}),$$

$$g(a_2) = (x_i; z^{-i}),$$

$$g(a_3) = (x_i; y^{-i}),$$

$$g(a_4) = (e_i^*; z^{-i}).$$

Si l'on parvient à trouver une performance x_i telle que :

$$a_1 I a_2 \text{ et } a_3 I a_4,$$

le modèle (r.4.2.2 bis) implique alors $v_i(x_i) = 1/2$.

¹ Rappelons que e_i^* et e_i^* désignent respectivement la pire et la meilleure valeur sur l'échelle E_i du critère g_i .

Remarquons ici que, pour qu'il soit possible de trouver une telle valeur x_i , il faut avoir choisi judicieusement les vecteurs de performances y^{-i} et z^{-i} afin que la différence d'évaluation sur le critère i puisse compenser la différence d'évaluation sur les autres critères. Notons que même si, d'un point de vue théorique, on peut vouloir utiliser une forme d'agrégation additive pour représenter des préférences lexicographiques où aucune compensation n'est tolérée, la mise en œuvre des méthodes de construction pratique fait appel à une telle notion de compensation. Précisons de plus qu'une telle méthode est inapplicable lorsque l'échelle des g_i est discrète¹.

Dans la pratique, la valeur de x_i recherchée sera le plus souvent obtenue à partir d'une série de questions visant à la cerner progressivement. Ce sera en fait toujours le cas lorsque nous nous intéresserons à la recherche d'une valeur assurant une indifférence entre deux actions.

La valeur x_i telle que $v_i(x_i) = 1/2$ ayant été obtenue, considérons quatre actions telles que :

$$\begin{aligned} g(b_1) &= (e_i, y^{-i}), \\ g(b_2) &= (x_i', z^{-i}), \\ g(b_3) &= (x_i', y^{-i}), \\ g(b_4) &= (x_i, z^{-i}). \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que précédemment, si l'on parvient à trouver une performance x_i' telle que :

$$b_1 \text{ I } b_2 \text{ et } b_3 \text{ I } b_4,$$

on pourra poser, compte-tenu de (r.4.2.2 bis), $v_i(x_i') = 1/4$.

De même, en considérant quatre actions telles que :

$$\begin{aligned} g(c_1) &= (x_i, y^{-i}), \\ g(c_2) &= (x_i'', z^{-i}), \\ g(c_3) &= (x_i'', y^{-i}), \\ g(c_4) &= (e_i, z^{-i}). \end{aligned}$$

$$\text{et } c_1 \text{ I } c_2, c_3 \text{ I } c_4,$$

$$\text{on aura } v_i(x_i'') = 3/4.$$

Supposons obtenues des valeurs x_i , x_i' et x_i'' telles que $v_i(x_i) = 1/2$, $v_i(x_i') = 1/4$ et $v_i(x_i'') = 3/4$. Considérons à présent quatre actions telles que :

¹ Dans ce cas, voir Fishburn (1967).

$$\begin{aligned} g(d_1) &= (x_1', y^{-1}), \\ g(d_2) &= (w_1, z^{-1}), \\ g(d_3) &= (w_1, y^{-1}), \\ g(d_4) &= (x_1'', z^{-1}). \end{aligned}$$

Si l'on parvient à trouver un niveau de performance w_1 tel que :

$$d_1 \text{ I } d_2 \text{ et } d_3 \text{ I } d_4,$$

on pourra poser $v_i(w_1) = 1/2$.

La cohérence avec le modèle requiert ici que w_1 soit égal à (ou très proche de) x_1 .

On peut ainsi obtenir autant de points que l'on désire pour donner une forme au codage v_i . Dans la pratique, il est bien entendu souhaitable de s'assurer d'une certaine cohérence des réponses avec le modèle et de discuter des éventuelles incohérences.

b) Coefficients k_i

Une fois obtenus les codages v_i , on peut donner une valeur aux coefficients k_i dans (r.4.2.2 bis) en procédant de la façon suivante. Premièrement, il est prudent, dans la pratique, de chercher à ordonner ces coefficients. Pour ce faire, on peut demander de classer, par ordre de préférence, des actions ayant la plus mauvaise évaluation possible sur tous les critères sauf sur un seul. Par exemple, si $(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, \dots, e_{n*})$ est préféré à $(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{j-1*}, e_j^*, e_{j+1*}, \dots, e_{n*})$, on pourra poser $k_i > k_j$. On peut de la même manière faire comparer des actions où plusieurs critères sont à leurs meilleures valeurs et ainsi obtenir des inégalités faisant intervenir plus de deux coefficients k_i . La répétition de ce processus amène à définir un polyèdre de k_i admissibles que l'on peut vouloir

chercher à explorer de façon systématique, sachant que $\sum_{i=1}^n k_i = 1$ ¹.

Si l'on tient à donner une valeur précise aux k_i , on peut chercher à obtenir des jugements d'indifférence entre des actions différant sur plus d'un critère. Chaque jugement donne lieu à une équation faisant intervenir les n inconnues $k_1, k_2, \dots, k_n$ puisque les fonctions v_i sont supposées connues à ce stade. Il suffit d'obtenir $n - 1$ jugements de ce type pour pouvoir résoudre le système d'équations compte-tenu du fait que la somme de ces coefficients est égale à 1. Comme le notent Keeney et Raiffa (1976), il est ici encore prudent de procéder

¹ On peut vouloir chercher à tirer directement parti de ces rangements (voir Kirkwood et Sarin (1985), Bana e Costa (1989)).

à des questions de contrôle et d'obtenir de l'information redondante pour s'assurer d'un minimum de cohérence des réponses obtenues avec le modèle.

A l'issue de cette procédure, s'il a été possible d'obtenir des réponses cohérentes avec le modèle aux questions posées, on peut bâtir le vrai-critère $g(a)$ en utilisant (r.4.2.2 bis). Il est important de noter que les actions introduites pour faire exprimer des préférences ou des indifférences font intervenir des actions fictives qui pourront apparaître, dans bien des cas, comme très irréalistes (en particulier lorsque ces actions ont la meilleure ou la pire des évaluations possibles sur un certain nombre de critères). De plus, pour donner une valeur aux k_i , on recourt à la comparaison d'actions dont les performances diffèrent sur plus d'un critère. La complexité de ces questions est donc assez importante. Ceci est dû au fait que la "cardinalité" introduite dans ce problème par le biais de l'additivité fait dépendre le codage v_i de tous les autres codages. C'est là certainement une des raisons pour lesquelles cette PAMC est rarement mise en œuvre telle quelle en pratique en utilisant ce type de méthodes de questionnement. Son importance est cependant grande car, comme on l'a dit, elle est souvent utilisée, d'une façon plus ou moins explicite, au sein d'un grand nombre de méthodes.

Mentionnons pour conclure ce paragraphe une procédure d'obtention des codages v_i de nature fort différente de celle dont il vient d'être question et qui est souvent utilisée tant en aide à la décision ¹ qu'en mercatique ² et sur laquelle nous reviendrons longuement au 7.4. Bien souvent, il est en effet possible d'obtenir, de la part d'un acteur Z , un certain nombre de jugements de préférences globaux sur des actions réelles (qu'il connaît bien) ou fictives (faciles à comparer). Au sein du modèle (r.4.2.1) ou (r.4.2.2), on peut associer, à chacun de ces jugements, une inéquation linéaire (ou équation dans le cas d'un jugement d'indifférence (cf. 4.2.1.2)). On peut alors chercher, en utilisant des techniques statistiques ou de programmation linéaire, à explorer le polyèdre ainsi défini (en ajoutant à chaque contrainte un, éventuellement deux, terme(s) d'erreur pour éviter de raisonner sur un polyèdre qui pourrait être vide) de manière à déterminer un ensemble de fonctions d'utilité additives le plus compatible possible avec l'information de départ. Faisons cependant observer que, même lorsque l'on cherche à déterminer plusieurs fonctions en explorant un polyèdre ³, on reste malgré tout tributaire du critère d'optimisation utilisé

¹ Voir Jacquet-Lagrèze et Siskos (1982).

² Voir Faivre et Pioche (1976).

³ Ce qui reste l'exception dans ce genre de méthode où l'on a souvent tendance à exhiber une seule fonction dite "optimale".

dans les calculs, critère qui comporte souvent une bonne part d'arbitraire ¹.

Signalons enfin qu'il est possible d'interpréter la **méthode d'analyse hiérarchique** (AHP) de Saaty (1981) comme une façon possible de mettre en œuvre une agrégation additive. Elle fait appel à des concepts qui lui sont très spécifiques et qui ont donné lieu à des débats (cf. par exemple Dyer (1990), Belton et Gear (1983)). Nous ne la développerons pas davantage dans ce livre. Mentionnons néanmoins qu'elle a donné lieu à de nombreuses applications pratiques (cf. la bibliographie de cas d'application en fin de volume).

4.2.1.4 Retour sur l'indépendance au sens des préférences

L'hypothèse de l'indépendance de toute sous-famille de critères dans F , c'est-à-dire l'"indépendance mutuelle au sens des préférences" (cf. 4.2.1.1), est à la base de la procédure d'agrégation additive. Il y est fait appel à plusieurs reprises dans la procédure de construction décrite brièvement au paragraphe précédent. Dans une démarche descriptive, il convient donc de tester cette hypothèse et, dans une démarche constructive, de l'admettre comme base de travail. Comme nous l'avons déjà souligné au 2.3.2 et au 2.4.2, le travail de l'homme d'étude se trouve singulièrement compliqué dans les cas imposant de ne pas accepter cette hypothèse. Dans ce paragraphe, nous passerons brièvement en revue un certain nombre de résultats permettant, dans l'approche du critère unique de synthèse, de mieux cerner le contenu de cette hypothèse d'indépendance et d'indiquer quelques voies possibles dans les cas où l'on estime ne pas devoir l'accepter.

Ici encore, on supposera que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions correspond à $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

Un premier résultat permet, dans le cas où l'on a bâti un vrai-critère de synthèse, de lier plusieurs hypothèses d'indépendance.

RÉSULTAT 4.2.2 : Considérons un vrai-critère g représentant un s.r.p. sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Sous certaines hypothèses de continuité, de dérivabilité et de non trivialité ², si I et J sont deux sous-familles de critères toutes deux indépendantes au sens des préférences dans F et telles que $I \cap J \neq \emptyset$, $\text{Non}(I \subset J)$, $\text{Non}(J \subset I)$ et $I \cup J \neq F$, alors les familles $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$, $J \setminus I$

¹ Voir Macquin (1980).

² Hypothèses qui sont généralement faites pour analyser axiomatiquement le modèle de l'utilité additive. On se reportera, pour la démonstration de ce résultat, à Gorman (1968) ou à Keeney et Raiffa (1976, p. 112 et ss.) pour une démonstration intuitive mais non rigoureuse.

et $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ sont indépendantes au sens des préférences dans F.

Ce résultat montre que, s'il est légitime de raisonner toutes choses égales par ailleurs relativement à n'importe quelle paire de critères, alors il devient légitime de le faire vis-à-vis de n'importe quelle sous-famille de plus de deux critères dès lors que l'on se situe dans le cadre d'un s.r.p. (P, I) ayant une structure de préordre complet (et pouvant se représenter numériquement). Tester l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences ou l'accepter comme base de travail peut donc, dans ce cadre, se raisonner en se limitant à certaines sous-familles de deux critères judicieusement choisis ¹.

On a vu, au 2.3.2 et au 2.4.2, que l'hypothèse d'indépendance au sens des préférences d'une sous-famille de critères était parfois fort restrictive dans certaines situations concrètes. Le résultat suivant, dû à Ting (1971), permet de simplifier la tâche de l'analyste dans cette situation.

RÉSULTAT 4.2.3 : Considérons un vrai-critère g représentant un s.r.p. (P, I) sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Sous certaines hypothèses de continuité, de dérivabilité et de non trivialité, si une sous-famille J non vide de critères est indépendante au sens des préférences dans F, alors le vrai-critère g peut s'écrire ² :

$$g(a) = V(v(g_j(a) : j \in J) ; g_k(a) : k \notin J),$$

$v(g_j(a) : j \in J)$ étant un vrai-critère ³ ayant pour support la réunion des supports des critères de J .

Sous les hypothèses du résultat 4.2.3 et si toute sous-famille de J est indépendante au sens des préférences dans J, alors on a :

¹ Sur la base du résultat 4.2.2, on peut montrer, par exemple, qu'il suffit que les paires de critères $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, ..., $\{n-1, n\}$ puissent être considérées comme indépendantes au sens des préférences dans F pour que l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences soit acceptable. Ce résultat illustre ce que l'on a coutume d'appeler un effet de "chaînage" de l'indépendance au sens des préférences.

² Les hypothèses de continuité et de dérivabilité que nous passons sous silence permettent de s'assurer que V est strictement croissante en v de telle sorte que l'implication inverse est également vraie. Sous ces mêmes hypothèses, l'indépendance au sens des préférences de J dans F est équivalente à l'hypothèse selon laquelle les taux (marginaux) de substitution entre les critères de J ne dépendent pas des évaluations sur les critères n'entrant pas dans J (cf. supra).

³ Les critères de J sont donc alors **contractables** (cf. 2.4.2).

$$v(g_j(a) : j \in J) = \sum_{j \in J} v_j(g_j(a)).$$

De même, si toute sous-famille de FJ est indépendante au sens des préférences dans FJ, alors on a :

$$g(a) = \chi_J(v(g_j(a) : j \in J) + \sum_{k \in J} v_k(g_k(a))$$

où χ_J est une fonction monotone croissante.

Dans le cas où l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences dans F n'est pas acceptable, on peut donc chercher à regrouper, en les contractant, certains critères et à appliquer ensuite une agrégation additive classique. La façon de définir $v(g_j(a) : j \in J)$, critère agrégeant les critères de J, peut cependant se révéler délicate. On peut songer pour ce faire à utiliser les procédures d'agrégation que nous verrons au 4.2.2 ou ¹ encore à cerner les surfaces d'indifférence entre les critères de J.

On trouvera dans Ting (1971) certaines techniques permettant de rechercher et d'isoler la (ou les) sous-famille(s) de critères "responsable(s)" de la non-indépendance mutuelle au sens des préférences.

4.2.2 Autres formes d'agrégation conduisant à un vrai-critère de synthèse

Comme nous l'avons vu au 4.2.1.1, l'agrégation additive recouvre un grand nombre de situations du fait que le vrai-critère que l'on cherche à bâtir n'est défini qu'à une transformation monotone strictement croissante près. Il est cependant des cas où d'autres formes d'agrégation peuvent sembler plus adéquates, par exemple parce que l'hypothèse d'indépendance mutuelle au sens des préférences ne paraît pas légitime et parce qu'il paraît difficile de recourir à l'idée de contraction.

On a déjà vu, au début du 4.2, que l'on pouvait, dans certains cas, définir la fonction d'agrégation V de manière explicite comme cela est fait dans la méthode des déclassements comparés. On peut vouloir également recourir à des formes analytiques de V plus complexes que (r.4.2.1). Ces formes analytiques, si elles ont un grand intérêt sur le plan théorique, se prêtent cependant assez

¹ Dans le même ordre d'idées, il se peut que l'indépendance mutuelle puisse être acceptable pour un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ sur lequel on peut alors bâtir un critère g en utilisant la forme additive (r.4.2.1).

difficilement à une élaboration pratique en raison du grand nombre de degrés de liberté qu'elles présentent. Nous nous contenterons donc ici d'en mentionner quelques unes, leur faible intérêt pratique en aide à la décision ne méritant pas que l'on s'y attarde longuement.

Un premier résultat, très général mais sans grandes applications pratiques, concerne la possibilité d'obtenir un vrai-critère de synthèse sous la forme :

$$g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)).$$

Il est clair que l'élaboration d'un tel critère suppose que le s.r.p. que l'on cherche à construire ou à représenter soit un préordre complet (pouvant se représenter numériquement). De plus, l'existence de chacun des critères g_i suppose la présence d'un axe de signification et d'une fonction garantissant la propriété d'isolabilité¹. On peut montrer (cf. Krantz et al. (1971, p. 318)) que ces deux conditions sont, en fait, suffisantes pour obtenir une fonction V strictement croissante dans chacun de ses arguments².

Il existe dans la littérature des formes d'agrégation conduisant à un vrai-critère et faisant l'économie de l'hypothèse d'isolabilité de chaque axe de signification³. Plus importantes sont cependant des procédures simples d'agrégation de plusieurs critères – recouvrant chacun un axe de signification isolable – en un vrai-critère de synthèse ne se ramenant pas à la forme additive. On peut par exemple envisager une PAMC du type (cf. Krantz et al. (1971, p. 339)) :

$$g(a) = (g_1(a) + g_2(a)) \cdot g_3(a) \text{ avec } g_1(a), g_2(a) \text{ et } g_3(a) > 0.$$

¹ $g(a)$ étant un vrai-critère, l'isolabilité de chaque critère est donc équivalente au fait que chacun d'entre eux est indépendant au sens des préférences dans F .

² Il existe des modèles d'agrégation conduisant à un vrai-critère et qui ne sont pas "décomposables", c'est-à-dire que le vrai-critère ainsi construit ne peut s'exprimer sous la forme $g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$. Par exemple, on peut vouloir bâtir $g(a) = v_1(g_1(a)) + v_2(g_2(a)) + v_1'(g_1(a)) + v_2'(g_2(a))$, les fonctions v_1, v_1', v_2, v_2' n'étant pas nécessairement monotones croissantes. Ce type de structure a un réel intérêt dans d'autres domaines que l'aide multicritère à la décision. Cependant, nous les passerons ici sous silence car il nous semble illusoire de vouloir fonder une étude d'aide à la décision sans recourir, au moins, à des axes de signification isolables.

³ Cf. Krantz et al. (1971, ch. 7) ; on a alors recours à des notions d'indépendance, plus sophistiquées que l'isolabilité, autorisant par exemple un renversement total de l'ordre de préférence sur chaque axe de signification.

Utilisons ce modèle sur l'exemple du tableau 4.2.3.

Tableau 4.2.3 : Exemple numérique

	g_1	g_2	g_3
a_1	3	1/2	10
a_2	1	1/2	20
a_3	3	10	10
a_4	1	10	20

On a : $g(a_1) = 35 > g(a_2) = 20$ et $g(a_3) = 130 < g(a_4) = 220$, ce qui viole l'indépendance au sens des préférences de $\{g_1, g_3\}$ dans F. Ce modèle ne peut donc se ramener à une forme additive.

On pourrait bâtir un même exemple en utilisant une PAMC :

$$g(a) = g_1(a) \cdot g_2(a) + g_3(a).$$

On trouvera dans Krantz et al. (1971, ch. 7 et 9) l'énoncé de conditions suffisantes (dans le cas "continu") pour obtenir ce type de fonctions d'agrégation ainsi qu'un certain nombre de tests permettant de choisir telle ou telle forme fonctionnelle. Ce type de modèles d'agrégation, complétant la forme additive par des termes produits judicieusement choisis, constitue une des façons les plus simples pour modéliser en pratique des phénomènes de dépendance entre critères.

4.3 AGRÉGATION CONDUISANT À UN QUASI, PRÉ OU PSEUDO-CRITÈRE

Les PAMC qui font l'objet de cette section cherchent à bâtir un critère unique de synthèse dont le pouvoir discriminant soit plus faible que celui d'un vrai-critère. Elles présentent un grand intérêt conceptuel, en particulier lorsque l'on travaille sur une famille cohérente de critères ne contenant pas que des vrai-critères. Ce type de PAMC a déjà été évoqué au 3.1.5 et au 3.2.2 d) à propos de la somme pondérée.

En dépit de leur réel intérêt, ces PAMC n'ont fait l'objet que de peu de travaux, ce désintérêt s'expliquant peut-être par de réelles difficultés de mise en œuvre comme on le verra ci-après.

4.3.1 Quasi-critère de synthèse

Ce type de PAMC vise à construire un critère de synthèse g muni d'un seuil q tel que, $\forall a, b \in A$, $g(a) = V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$:

$$g(a) \geq g(b) \Rightarrow \begin{cases} a P b \text{ si } g(a) > g(b) + q(g(b)) \\ a I b \text{ sinon} \end{cases}$$

avec

$$\frac{q(g(a)) - q(g(b))}{g(a) - g(b)} \geq -1.$$

Rappelons que le seuil $q(g(a))$ peut toujours ¹ être rendu constant, moyennant un codage approprié de g .

Le lecteur intéressé trouvera, dans Luce (1973), Krantz (1967) et Suppes et al. (1989), des systèmes d'axiomes suffisants pour obtenir un quasi-critère g à seuil constant s'obtenant de façon additive dans le cas "continu". Dans le cas fini, les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un quasi-critère s'obtenant de façon additive sont données par Fishburn (1970b). Ces conditions sont cependant aussi peu attrayantes que celles du résultat 4.2.1.

Il est important de noter que l'abandon de la transitivité de l'indifférence rend ici inapplicable le type de méthodes présentées au 4.2.1.3 pour mettre en œuvre le modèle d'agrégation additif. C'est probablement pourquoi ce modèle d'agrégation, bien qu'attrayant sur le plan conceptuel puisque permettant de concilier la simplicité de l'agrégation additive avec l'obtention d'un critère de synthèse au pouvoir discriminant nuancé, n'a fait l'objet que de peu d'études. Il y a là un champ de recherche important. Parmi les questions dignes d'intérêt, mentionnons :

– la façon d'obtenir les codages v_i sachant que l'indifférence n'est plus transitive ;

¹ dans les problèmes réels (cf. 1.4). Cette affirmation mériterait d'être nuancée dans le cas d'ensembles infinis. La représentation numérique des quasi-ordres, dans ce cas, pose d'ailleurs des problèmes assez délicats (cf. Roberts (1979, ch. 6) ou Suppes et al. (1989)).

- les liens unissant les seuils q_i au seuil q ;
- les techniques à appliquer lorsque certains critères sont des vrai-critères.

4.3.2 Autres cas

A notre connaissance, aucun résultat théorique n'est disponible concernant des pré ou pseudo-critères de synthèse obtenus à l'aide d'une fonction d'agrégation additive. Rien ne s'opposerait cependant à la formulation de conditions similaires à celles mentionnées pour les quasi-critères. Les difficultés rencontrées ici sont du même type que celles mentionnées au paragraphe précédent. Signalons pour terminer que l'on trouvera, dans Fishburn (1970b) et dans Adams (1965), les conditions nécessaires et suffisantes, dans le cas fini, permettant d'obtenir, de façon additive, un critère de synthèse dont le pouvoir discriminant n'est pas précisé.

4.4 CAS OÙ L'ON CHERCHE À BÂTIR UNE GRADUATION OU UNE MESURE

4.4.1 Généralités

Il sera question, dans cette section, de PAMC cherchant à bâtir un critère g tel que :

$$\begin{aligned} g(a) &= V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a)) \\ g(a) \geq g(b) &\Rightarrow a \text{ S } b \\ g(a) - g(b) \geq g(c) - g(d) &\Rightarrow (a \ominus b) \text{ S}^* (c \ominus d) \end{aligned} \tag{r.4.1.1}$$

où S^* désigne une relation de surclassement sur $A \times A$ au contenu sémantique "est un écart de préférence au moins aussi important que" (rappelons ¹ que $(a \ominus b)$ désigne un écart entre deux actions qui peut s'interpréter comme une mutation $b \rightarrow a$).

L'intérêt de faire intervenir dans F des critères étant des graduations ou des mesures a déjà été discuté au 1.6.4 ². Indiquons ici seulement que le fait de bâtir un critère de synthèse qui soit une graduation ou une mesure peut présenter un réel intérêt en aide à la décision. Si l'on a pu bâtir un critère satisfaisant à (r.4.4.1), on pourra fonder sa prescription non seulement sur le

¹ Cf. 1.4 et 1.6.

² Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons à MMCAD, 9.4.

classement de synthèse défini par S mais également en ayant recours à l'idée d'écart de préférence. Dans le cadre d'une problématique α , on pourra ainsi apprécier la plus ou moins grande proximité des "brillants seconds" par rapport à l'action "optimale". De même, dans le cadre d'une problématique β , le tri à effectuer pourra prendre appui sur les valeurs de g , ce qui permet de faire ressortir clairement les actions dont l'affectation pose problème. Dans une problématique γ , une information en termes d'écart de préférence permet de cerner rapidement les actions manifestement inadéquates et de concentrer son attention sur un sous-ensemble restreint.

Compte-tenu des difficultés évoquées au 4.3, nous nous limiterons, dans cette section, à des PAMC faisant de S et de S^* des préordres complets. C'est dire que les critères de synthèse g dont il sera question dans cette section seront tels que :

$$\begin{aligned} g(a) &= V(g_1(a), \dots, g_n(a)) \\ a P b &\Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ a I b &\Leftrightarrow g(a) = g(b) \\ (a \ominus b) P^* (c \ominus d) &\Leftrightarrow g(a) - g(b) > g(c) - g(d) \\ (a \ominus b) I^* (c \ominus d) &\Leftrightarrow g(a) - g(b) = g(c) - g(d), \end{aligned} \quad (r.4.4.2)$$

ce qui correspond au cas où g est une "mesure" ¹.

De plus, conformément à ce qui a été fait au 4.2, on n'envisagera ici que des PAMC opérant sur la base d'une famille cohérente de vrai-critères.

Les conditions sur (P^*, I^*) permettant la construction d'un tel critère g sont bien connues. Dans le cas d'un ensemble fini, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante (cf. Fishburn (1970a, ch. 6)). Tout comme dans le cas de la forme d'agrégation additive, cette condition n'entraîne pas que g soit défini à une transformation affine près. Le "passage au continu" permet – moyennant certaines hypothèses structurelles – d'obtenir des conditions plus

¹ Cf. 1.6.4.

simples¹ (cf. Krantz et al. (1971, ch. 4)). Dès lors que l'on se situe dans un tel cadre, g est défini à une transformation affine positive près², contrairement à la situation du 4.2, ce qui implique de s'intéresser à un nombre plus grand de formes fonctionnelles possibles pour la fonction d'agrégation V .

4.4.2 Procédures d'agrégation additive et multiplicative³

Dès lors que l'on cherche à modéliser des écarts de préférences, des notions d'indépendance plus générales que celles étudiées au 2.3.2 peuvent être envisagées. On dira qu'une sous-famille de critères J est indépendante au sens des différences de préférence dans F si les jugements en termes d'écart de préférence sur des actions ne se différenciant que sur les critères de J ne dépendent pas des valeurs fixées sur les critères de $F \setminus J$.

Considérons quatre actions a_1, a_2, a_3, a_4 ayant toutes des évaluations identiques sur les critères de $F \setminus J$. On dira que la sous-famille J est indépendante au sens des différences de préférence dans F si

$$a_1 \ominus a_2 P^* a_3 \ominus a_4 \text{ (resp. } I^*)$$

implique

$$b_1 \ominus b_2 P^* b_3 \ominus b_4 \text{ (resp. } I^*)$$

où b_1, b_2, b_3, b_4 sont des actions ayant des évaluations identiques sur les critères de $F \setminus J$ et ayant respectivement les mêmes évaluations

¹ Pour une approche alternative n'utilisant pas d'hypothèses structurelles mais faisant intervenir un nombre infini de relations, nous renvoyons à Vansnick (1984).

² c'est-à-dire que tout critère g' vérifiant (r.4.4.2) est lié à g par une transformation du type : $g' = \alpha \cdot g + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

³ Nous nous limiterons, dans cette section, à l'étude de ces deux cas. Bien d'autres procédures d'agrégation sont envisageables mais elles nous semblent offrir peu d'intérêt en aide à la décision. En fait, la plupart des procédures d'agrégation que nous passerons en revue au 4.5 à propos de l'utilité espérée pourraient être également formalisées dans cette section.

tions que a_1, a_2, a_3 et a_4 sur les critères de J.

Dans tout ce qui suit, on supposera :

– que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche pour que l'on puisse considérer que tout vecteur de performances de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ correspond à l'évaluation d'une action ;

– que, pour tout $i \in F$, l'échelle E_i est bornée inférieurement par e_{i*} et supérieurement ¹ par e_i^* ($e_{i*} \neq e_i^*$).

Le résultat suivant, démontré par Dyer et Sarin (1979b), est fondamental dans les applications pratiques. Il est inspiré d'un résultat tout-à-fait similaire que nous rencontrerons au 4.5 à propos de la théorie de l'utilité espérée.

RÉSULTAT 4.4.1 : Considérons une fonction g vérifiant (r.4.4.2). Si les critères sont mutuellement indépendants au sens des préférences, si l'un des critères est indépendant au sens des différences de préférence dans F et ² si $n \geq 3$, alors :

$$\text{soit } g(a) = \sum_{j=1}^n k_j v_j(a) \text{ si } \sum_{j=1}^n k_j = 1 \text{ (forme additive),} \quad (\text{r.4.4.3})$$

$$\text{soit } g(a) = \frac{1}{k} \left[\prod_{j=1}^n (1 + k \cdot k_j v_j(g_j(a))) - 1 \right] \text{ si } \sum_{j=1}^n k_j \neq 1 \quad (\text{r.4.4.4})$$

(forme multiplicative),

où, $\forall i \in F$:

$$v_i(e_i^*) = 1, v_i(e_{i*}) = 0,$$

$$g(\tilde{a}) = 1, g(a) = 0,$$

$$k_i \in [0 ; 1],$$

$$k > -1 \text{ et } k \neq 0,$$

¹ On notera respectivement $\tilde{a}$ et a les actions ayant pour vecteur de performances $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ et $(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{n*})$.

² Comme précédemment, le cas $n = 2$ impose de recourir à des conditions légèrement différentes.

k étant solution de l'équation $1 + k = \prod_{j=1}^n (1 + k \cdot k_j)$.

Ce résultat appelle un certain nombre de remarques.

a) Il fonde le choix entre la forme additive (r.4.4.3) et la forme multiplicative (r.4.4.4) sur la somme des coefficients ¹ k_j . En pratique, cependant, ce critère de choix impliquerait de disposer de valeurs extrêmement précises des k_j , ce qui est rarement le cas. Pour tourner cette difficulté, Dyer et Sarin (1979b) montrent que, si l'on peut trouver quatre actions a, b, c et d ayant des performances identiques sur $F \setminus \{i, j\}$ dont les performances sur le couple de critères (i, j) valent respectivement

$$(x_i, y_j), (z_i, w_j), (x_i, w_j) \text{ et } (z_i, y_j)$$

et telles que $a \ominus b \succ^* c \ominus d$, alors la forme additive s'impose ².

b) Au contraire de ce qui a été dit au 4.2.1.1 à propos de l'agrégation additive simple ³ (r.4.2.1), on constate ici que l'agrégation additive (r.4.4.3) n'est pas équivalente à l'agrégation multiplicative (r.4.4.4). Ceci est dû au fait que g étant une mesure, les seuls codages possibles de g préservant (r.4.4.2) sont des transformations affines positives. En considérant le logarithme de l'expression (r.4.4.4), on obtiendrait un critère de synthèse respectant la forme additive simple (r.4.2.1) mais qui ne respecterait pas (r.4.4.2), ne mesurant plus les différences de préférences.

¹ Notons que ce critère de séparation n'est pertinent qu'en raison des hypothèses de normalisation faites sur g et les fonctions v_i .

² Cette condition n'a pas reçu, à notre connaissance, de nom dans la littérature. Il est facile de montrer que la forme additive l'implique pour toute évaluation et que donc le fait de trouver des évaluations la mettant en défaut impose d'adopter la forme multiplicative.

³ Nous précisons ici "simple" pour éviter tout risque de confusion entre la PAMC additive qui a fait l'objet du 4.2.1 et la PAMC additive conduisant à une mesure.

c) On a vu que, s'il existait une mesure respectant (r.4.4.3) ou (r.4.4.4), alors il existait également un critère de synthèse s'exprimant à l'aide de la forme additive (r.4.2.1). Du fait de la forme fonctionnelle très particulière de ces différents critères de synthèse, on conçoit intuitivement que, s'il existe un critère respectant (r.4.2.1) ¹ et une mesure respectant (r.4.4.3) ou (r.4.4.4), ces critères ne sont pas sans lien. Dyer et Sarin (1979b) et Baron et al. (1984) ont prouvé un certain nombre de résultats à cet égard. En particulier, on peut montrer que, s'il existe un critère g vérifiant (r.4.2.1) et une mesure g' vérifiant (r.4.4.3), alors g et g' sont identiques moyennant une transformation affine positive près (ce qui implique qu'il en va de même pour les codages v_j et v'_j).

4.4.3 Mise en œuvre

On a vu, au 4.2.1.3, la difficulté d'élaborer les codages v_j dans une forme additive simple. Dans ce cas, en effet, il est nécessaire de travailler sur plusieurs critères à la fois, ce qui complique singulièrement les méthodes d'estimation ou de construction. Un des avantages de raisonner en termes de mesures est qu'il devient possible de bâtir les codages v_j indépendamment les uns des autres. En effet, la "cardinalité" ne provient plus ici de l'additivité mais de l'idée de mesurer des différences de préférences. Faisons auparavant observer qu'il conviendrait, en toute rigueur, de tester (démarche descriptive) ou d'admettre comme base de travail (démarche constructive) les hypothèses d'indépendance à la base du résultat 4.4.1 avant de vouloir bâtir les codages v_j . Le problème de l'indépendance mutuelle au sens des préférences a déjà été évoqué au 2.4 et au 4.2.1.4. Compte-tenu de la complexité de la notion d'indépendance au sens des différences de préférences, on conçoit qu'il soit délicat de vouloir vérifier qu'elle convient, même dans une démarche purement descriptive ². Il s'agira donc ici, avant tout, de l'accepter de façon volontariste comme hypothèse conduisant à un modèle simple lorsque ceci semble "raisonnable".

¹ Dans le cas "continu" où les critères satisfaisant (r.4.2.1) se déduisent les uns des autres par application de la transformation (r.4.2.3).

² On trouvera dans MMCAD, 7.2.4 et 9.4 de nombreux exemples montrant pourquoi cette hypothèse peut être mise en défaut.

Fishburn (1967) présente trois méthodes différentes pour élaborer les codages v_j en faisant appel à l'idée de différence de préférence :

- évaluation directe sur une échelle ("direct rating") ;
- évaluation fondée sur l'idée de bisection (au sens des différences de préférences) d'un intervalle ¹ ;
- rangement des mutations par ordre croissant des différences de préférences et exploitation des inégalités ainsi mises à jour.

Mentionnons également la méthode dite des "mondes parallèles" mise au point par Vansnick (1984) à la suite de Camacho (1982) interprétant l'idée de mutation en considérant différentes situations possibles dans des "mondes" parallèles, identiques et sans connexion (on pourra se reporter également à Wakker (1986)).

La difficulté de la construction des codages v_j tient cependant à la difficulté de donner un contenu opérationnel clair à la notion de différence de préférences. L'attrait intuitif de cette notion ne doit pas faire oublier qu'il est extrêmement difficile de formuler des questions y ayant trait. On peut avoir recours :

- à la pure introspection,
- à la technique des mondes parallèles,
- à la notion d'échange ou
- à un critère extérieur au problème

sans qu'aucune de ces interprétations ne présente, à notre sens, d'avantages déterminants (pour plus de précisions, on pourra se reporter à Von Winterfeld et Edwards (1986)).

Les codages v_j étant construits, la mesure g sera parfaitement définie une fois obtenus les coefficients k_j (et le coefficient k dans la forme multiplicative). Comme cela était le cas pour la forme additive simple, chaque jugement en termes de préférence ou

¹ C'est ce type de méthodes qui a été utilisé par Allais dans sa célèbre expérience de 1952 pour estimer ses "fonctions d'utilité cardinales".

d'indifférence donne lieu à une inégalité sur les coefficients k_j . On peut obtenir de la sorte un ensemble d'inégalités.

Dans le cas où le test mentionné à la remarque a) du 4.4.2 impose de recourir à la forme additive, il suffit alors de résoudre un système de $n - 1$ inéquations en tenant compte de la contrainte

$$\sum_{j=1}^n k_j = 1 \quad \text{pour donner un ordre de grandeur aux } k_j.$$

Dans le cas où la forme multiplicative s'impose, le problème est un peu plus complexe dans la mesure où l'on n'a plus affaire à des inégalités linéaires. On peut alors considérer un système de n inéquations en $k \cdot k_j$, le résoudre pour trouver la valeur des inconnues $k \cdot k_j$ et ensuite obtenir la valeur de k qui n'est autre que $\prod_{j=1}^n (1 + k \cdot k_j) - 1$.

4.5 CAS PARTICULIER DE LA THÉORIE DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

4.5.1 Généralités

Les PAMC que nous avons envisagées jusqu'à présent prenaient appui sur un tableau de performances, c'est-à-dire sur les évaluations des actions potentielles sur différents critères constituant une famille cohérente. Rappelons (cf. 1.6) qu'un critère est une fonction visant à résumer, à l'aide d'un chiffre unique, les évaluations d'une action sur diverses conséquences se rattachant à un même "axe de signification" concret. Avant la construction de la famille de critères, on peut représenter le plus souvent¹ l'évaluation d'une action potentielle a sous la forme d'une distribution de vraisemblance sur les échelles associées aux diverses conséquences, c'est-à-dire par le modèle $\Gamma(a)$ défini au 1.5.

¹ Cf. MMCAD, ch. 8.

La théorie de l'utilité espérée s'attache au cas où la distribution de vraisemblance dont il vient d'être question est une distribution de probabilités. Elle vise à bâtir un vrai-critère de synthèse directement sur la base de ces évaluations sans nécessairement recourir à une phase préalable de construction d'un tableau de performances.

Dans le cadre le plus général, l'évaluation d'une action se présente donc ici sous la forme d'une distribution de probabilités δ^a sur l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\bar{n}}$ produit cartésien des échelles associées aux $\bar{n}$ conséquences retenues. Les échelles E_i associées aux dimensions sont de même nature que celles associées aux critères dont il a été question dans les sections précédentes (cf. 1.6.2). La notation $\bar{n}$ a été introduite pour souligner le fait qu'il n'y a pas nécessairement égalité entre le nombre de dimensions et le nombre de critères (cf. 1.6). On se limitera, dans cette section, au cas où les échelles E_i sont toutes finies. Ce qui y est dit se généralise naturellement au cas d'échelles infinies.

On cherche donc ici à bâtir une fonction d'évaluation du type :

$$g(a) = V(\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) ; (e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) \in (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\bar{n}})),$$

$\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$ étant la probabilité de l'élément $(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$ de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\bar{n}}$ si l'action a est mise à exécution.

Dans la plupart des problèmes réels, on fait souvent l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que les distributions de probabilités sur chacune des dimensions sont stochastiquement indépendantes. On a alors :

$$\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) = \prod_{i=1}^{\bar{n}} \delta_i^a(e_i).$$

Dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, le vrai-critère de synthèse est du type ¹ :

$$\left. \begin{array}{l} a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{array} \right\} \quad (r.4.5.1)$$

avec :

$$g(a) = \sum_{e_1 \in E_1} \sum_{e_2 \in E_2} \dots \sum_{e_n \in E_n} u(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \delta^a(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

qui revient à associer, à chaque vecteur $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, un coefficient $u(e_1, e_2, \dots, e_n)$ généralement appelé "utilité" et à faire ensuite la somme de ces coefficients pondérée par les probabilités $\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_n)$, d'où l'appellation "utilité espérée". On verra au 4.5.2 que l'hypothèse d'indépendance stochastique simplifie l'utilisation de (r.4.5.1).

Le critère (r.4.5.1) ne fait que généraliser, au cas où l'on considère l'ensemble des $\bar{n}$ dimensions, un critère de ponctualisation que nous avons déjà rencontré au 2.4.1.

Soulignons que la fonction d'utilité u (qu'elle fasse intervenir une ou plusieurs dimensions) intègre, de façon non dissociable,

¹ Il est bien entendu possible d'envisager d'autres formes fonctionnelles. Il y a là un vaste débat concernant le problème de la "rationalité" dans l'incertain. Du point de vue de l'aide à la décision, si l'on souhaite bâtir un vrai-critère, la simplicité de la forme fonctionnelle utilisée en théorie de l'utilité espérée nous semble être un avantage déterminant. Notons cependant que, depuis quelques années, on assiste à une remise en cause profonde de cette théorie, tant en ce qui concerne ses possibilités de décrire le comportement observé en laboratoire d'un grand nombre d'individus (cf., entre autres, les résultats des expériences présentés et commentés dans les recueils de Allais et Hagen (1979), Stigum et Wenstøp (1983), Hagen et Wenstøp (1984) et Munier (1988), l'article classique de Kahneman et Tversky (1979) et la synthèse de Jaffray (1989)) que son attrait normatif (cf., sur un plan théorique, Allais (1953, 1979, 1986), Dekel (1986), Fishburn (1982, 1983, 1988), Jaffray (1988), Machina (1982, 1988), Quiggin (1982), Schmeidler (1984) ou Yaari (1987) ou les synthèses de Munier (1989 a et b).

deux aspects des préférences ¹. Ceux-ci ont trait respectivement :

- aux comparaisons d'écarts de préférences résultant de variations certaines des conséquences (attitude face au passage d'un échelon à un autre) ;
- aux jugements de préférences résultant de variations dans l'appréciation probabiliste des conséquences (attitude face au risque) ².

Sous des conditions très fréquemment retenues en pratique, le critère de l'utilité espérée relatif à $\bar{n}$ dimensions (défini par (r.4.5.1)) se présente comme une PAMC agrégeant $\bar{n}$ (éventuellement un nombre plus réduit) de critères définis eux-mêmes selon un principe identique sur une (éventuellement plusieurs) dimensions. Lorsque ces hypothèses (dont il sera question au 4.5.2.2) ne sont pas remplies, on ne peut plus, en toute rigueur, parler d'une PAMC à propos de (r.4.5.1).

Considérons un s.r.p. de type (P, I) ayant les propriétés d'un préordre complet sur un ensemble d'actions évaluées au travers d'une distribution de probabilités sur un ensemble de $\bar{n}$ conséquences. On connaît, depuis l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern (1947), les conditions permettant de représenter ce s.r.p. par un vrai-critère bâti selon la formulation de l'utilité espérée (r.4.5.1) ³. Précisons ici qu'un critère vérifiant (r.4.5.1) est défini à une transformation affine positive près.

Pour bâtir un tel critère, il faut donc pouvoir évaluer la fonction $u(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$. Lorsque la fonction u ne fait intervenir qu'une seule dimension, il existe (cf. infra et Keeney et Raiffa

¹ Cf. Bouyssou et Vansnick (1988, 1990).

² D'autres modèles ont été proposés pour séparer ces deux concepts. Mentionnons en particulier le modèle EURDP, cf. Quiggin (1982), Schmeidler (1984), Allais (1986), Yaari (1987).

³ Pour un énoncé de ces conditions, nous renvoyons à Fishburn (1970a) ou à MMCAD, 9.4.4.1.

(1976)) un certain nombre de techniques de questionnement permettant de lui donner une forme précise. On pourrait songer à appliquer ces mêmes techniques dans le cas où u fait intervenir plusieurs dimensions ¹. Comme nous le verrons ci-après, cette façon de faire se heurte, en général, à des difficultés insurmontables. C'est pourquoi on cherche d'abord à décomposer la fonction $u(e_1, e_2, \dots, e_n)$ en utilisant une forme fonctionnelle simple avant de procéder à une évaluation.

Avant d'aborder ce problème, mentionnons qu'il est possible d'utiliser la théorie de l'utilité espérée dans une étude d'aide à la décision dans une optique toute différente de celle abordée dans cette section ². On peut en effet vouloir bâtir, en utilisant la théorie de l'utilité espérée, non pas un critère de synthèse mais un critère parmi d'autres en appliquant la formule (r.4.5.1) à un sous-ensemble de dimensions appartenant au support d'un critère. C'est là une technique classique de ponctualisation. Y avoir recours ne préjuge en rien de la PAMC qui sera utilisée par la suite.

4.5.2 Procédures d'agrégation utilisées en théorie de l'utilité espérée

4.5.2.1 Compléments sur les notions d'indépendance

Le concept d'indépendance au sens des préférences introduit jusqu'à présent sur la base d'une famille de critères se transpose de façon immédiate au cas d'une famille de dimensions. On dira qu'une sous-famille de dimensions $J \subset D = \{1, 2, \dots, n\}$ est indépendante au sens des préférences dans D si les jugements de

¹ Rien ne s'opposerait non plus à bâtir une fonction d'évaluation agrégeant les n dimensions "dans le certain" et à ensuite bâtir une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern sur cette fonction. Sur ce point, comme sur tous ceux abordés dans cette section que le lecteur souhaiterait approfondir, nous renvoyons à l'ouvrage de Keeney et Raiffa (1976) où l'on trouvera, entre autres, un excellent rappel des principes et techniques de base en théorie de l'utilité espérée.

² Cf. 1.6.2.

préférence pour des actions ne différant que sur les dimensions de J ne dépendent pas des valeurs fixées sur DVJ. Autrement dit, considérons quatre actions a, b, c, d évaluées de façon ponctuelle sur les $\bar{n}$ dimensions de D et telles que :

$$\begin{aligned}\gamma_j(a) &= \gamma_j(c), \forall j \in J, \\ \gamma_j(b) &= \gamma_j(d), \forall j \in J, \\ \gamma_i(a) &= \gamma_i(b), \forall i \notin DVJ, \\ \gamma_i(c) &= \gamma_i(d), \forall i \notin DVJ\end{aligned}$$

où $\gamma_i(a)$ désigne l'évaluation ponctuelle de l'action a sur la dimension i.

L'indépendance au sens des préférences de J dans D implique alors que :

$$a P b \text{ (resp. } a I b) \Rightarrow c P d \text{ (resp. } c I d).$$

Lorsque les évaluations des actions font intervenir des distributions de probabilités, il est commode d'assimiler de telles actions idéales à des **loteries**. Toute action a caractérisée par une distribution de probabilités δ^a sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\bar{n}}$ peut en effet être vue comme une "loterie" dont les "lots" sont les différents $\bar{n}$ -uplets $(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$, chaque lot étant affecté de sa probabilité d'occurrence $\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$. Il est alors naturel de s'intéresser à d'autres formes d'indépendance qui concernent un cas particulier de l'indépendance au sens des dispersions définie au 2.4.1. On dira qu'une sous-famille J de dimensions est **indépendante au sens des utilités** dans D si les préférences, pour des loteries ne différant que sur les dimensions de J, ne dépendent pas des évaluations certaines sur les dimensions de DVJ. Considérons quatre actions a, b, c, d évaluées de façon ponctuelle sur les dimensions de DVJ telles que :

$$\begin{aligned}\delta^a(e_j)_{j \in J} &= \delta^c(e_j)_{j \in J}, \\ \delta^b(e_j)_{j \in J} &= \delta^d(e_j)_{j \in J}, \\ \gamma_i(a) &= \gamma_i(b), \forall i \notin DVJ, \\ \gamma_i(c) &= \gamma_i(d), \forall i \notin DVJ,\end{aligned}$$

$\delta^a(e_j)_{j \in J}$ désignant la distribution de probabilités sur $\prod_{j \in J} E_j$ résultant de la mise à exécution de a .

L'indépendance au sens des utilités de J dans D implique alors que :

$$a P b \text{ (resp. } a I b) \Rightarrow c P d \text{ (resp. } c I d).$$

4.5.2.2 Agrégations additive et multiplicative

Ces deux formes d'agrégation sont les plus simples et sont celles qui sont employées dans la plupart des applications pratiques. De façon quelque peu simplifiée, elles concernent les cas où le critère unique de synthèse $g(a)$ peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$g(a) = \sum_{i=1}^{\pi} k_i \cdot g_i(a) \quad (r.4.5.2)$$

$$k_i > 0, \sum_{i=1}^{\pi} k_i = 1$$

$$g(a) = \left[\prod_{i=1}^{\pi} (1 + k \cdot k_i \cdot g_i(a)) - 1 \right] \frac{1}{k} \quad (r.4.5.3)$$

$$k > -1, k \neq 0, k_i > 0, \sum_{i=1}^{\pi} k_i \neq 1$$

où les g_i sont des critères définis comme l'espérance mathématique de fonctions d'utilité partielles u_i faisant intervenir normalement une seule dimension (éventuellement plusieurs dimensions).

Dans tout le reste de cette section, on supposera que :

- l'on raisonne sur un ensemble d'actions idéales suffisamment riche pour que l'on puisse considérer toute distribution de probabilités sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\pi}$ comme correspondant à l'évaluation d'une action ;

- chaque échelle E_i est bornée inférieurement par e_{i*} et supérieurement par e_i^* ($e_{i*} \neq e_i^*$).

Le résultat fondamental suivant est dû à Keeney (1974) :

RÉSULTAT 4.5.1 : Considérons un vrai-critère g vérifiant la forme d'utilité espérée (r.4.5.1). Si toute sous-famille de dimensions est indépendante au sens des utilités dans D (indépendance mutuelle au sens des utilités), alors, si $\bar{n} \geq 3$ ¹ :

$$\text{soit } u(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i u_i(e_i) \quad (\text{r.4.5.2 bis})$$

(forme additive)

$$\text{si } \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i = 1,$$

$$\text{soit } u(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) = \left(\prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i u_i(e_i)) - 1 \right) \frac{1}{k} \quad (\text{r.4.5.3 bis})$$

(forme multiplicative)

$$\text{si } \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \neq 1$$

avec

$$k_i \in [0, 1],$$

$$u_i(e_i^*) = 1, u(e_{i*}) = 0,$$

$$u(e_1^*, e_2^*, \dots, e_{\bar{n}}^*) = 1, u(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{\bar{n}*}) = 0,$$

$k > -1$ et $k \neq 0$ solution de l'équation

$$1 + k = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i)$$

Ce résultat fondamental appelle les commentaires suivants.

a) Ces deux formes peuvent s'écrire en une seule faisant apparaître la forme additive comme un cas limite de la forme multiplicative pour $k = 0$ en posant :

¹ Le cas $\bar{n} = 2$ imposant une fois de plus de recourir à des conditions spécifiques.

$$\begin{aligned}
u(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \sum_{i=1}^n k_i \cdot u_i(e_i) + k \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>1}^n k_i \cdot k_j \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \\
&+ k^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j>1}^n \sum_{k>j}^n k_i \cdot k_j \cdot k_k \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \cdot u_k(e_k) \\
&+ \dots + k^{n-1} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n \cdot u_1(e_1) \cdot u_2(e_2) \cdot \dots \cdot u_n(e_n).
\end{aligned}$$

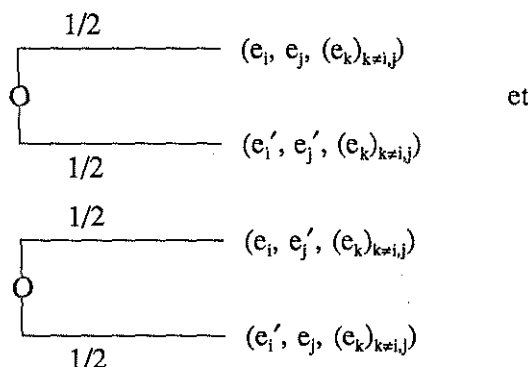
b) Au vu de ce résultat, supposons que l'on retienne pour la fonction d'utilité une forme additive (r.4.5.2 bis). Un calcul simple permet alors de montrer que le critère de synthèse qui en résulte est du type (r.4.5.2), les critères $g_i(a)$ étant bâtis en calculant l'espérance mathématique de l'utilité partielle u_i par rapport à la distribution de probabilités marginale de l'action a sur l'échelle E_i .

On retrouve une équivalence similaire entre (r.4.5.3 bis) et (r.4.5.3) dès lors que l'on admet (hypothèse souvent réaliste en pratique) que les évaluations des actions sous forme de distributions de probabilités sur les différentes dimensions sont stochastiquement indépendantes, c'est-à-dire que :

$$\delta^a(e_1, e_2, \dots, e_n) = \delta_1^a(e_1) \cdot \delta_2^a(e_2) \cdot \dots \cdot \delta_n^a(e_n).$$

c) La condition d'indépendance mutuelle au sens des utilités est équivalente à la condition d'indépendance mutuelle au sens des préférences jointe à l'indépendance au sens des utilités d'une dimension dans D . On notera alors la parenté flagrante de ce résultat avec le résultat 4.4.1 (qui est postérieur), l'indépendance au sens des différences de préférences jouant le rôle de l'indépendance au sens des utilités.

d) De même qu'au 4.4.2, le critère permettant de choisir entre les deux décompositions sur la base de la somme des k_i est parfois sujet à caution en pratique. On trouvera, dans Keeney et Raiffa (1976), un résultat classique imposant de recourir à la forme additive dès lors qu'il existe deux actions a et b respectivement assimilables aux loteries :



et qui sont indifférentes ¹.

e) De même qu'au 4.4.2, l'équation en k de degré $\bar{n}$

$$1 + k = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + k \cdot k_i)$$

admet, en général, une seule racine réelle supérieure à -1 et différente de 0 .

f) S'il existe une décomposition additive (r.4.5.2) ou une décomposition multiplicative (r.4.5.3), il existe aussi une décomposition additive simple sur l'ensemble des dimensions de type (r.4.2.1). Bien entendu, ces décompositions ne sont pas sans liens. En particulier, s'il existe (dans le cas "continu") une décomposition additive simple (r.4.2.1) et une décomposition additive (r.4.5.2), on peut montrer qu'elles sont identiques à une transformation affine positive près (les liens existant entre (r.4.2.1) et la décomposition multiplicative (r.4.5.3) font intervenir une transformation de type logarithmique). On peut de même établir des liens de même nature entre les décompositions étudiées ici et les décompositions additives et multiplicatives d'une mesure (lorsqu'elle existe) sur l'ensemble des dimensions.

¹ La généralisation de cette condition implique que les préférences entre des loteries ne dépendent que de leurs distributions marginales sur chacune des dimensions. On peut montrer (cf. Fishburn (1970a)) que c'est là une condition nécessaire et suffisante pour parvenir à une décomposition additive.

4.5.2.3 Autres procédures d'agrégation

Dans ce paragraphe, nous passerons brièvement en revue d'autres décompositions possibles de la fonction $u(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}})$. Leur intérêt est avant tout conceptuel dans la mesure où leur élaboration en pratique requiert un travail très lourd¹ et ne sont donc utilisées que dans des cas très particuliers.

Un premier résultat concerne le cas où chaque dimension est indépendante au sens des utilités dans D, hypothèse plus faible que l'indépendance mutuelle au sens des utilités, et aboutit à une **décomposition** dite "**multilinéaire**".

RÉSULTAT 4.5.2 : Considérons une fonction g vérifiant (r.4.5.1). Si chaque dimension est indépendante au sens des utilités dans D, alors :

$$\begin{aligned} u(e_1, e_2, \dots, e_{\bar{n}}) = & \sum_{i=1}^{\bar{n}} k_i \cdot u_i(e_i) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j>1}^{\bar{n}} k_{ij} \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \\ & + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \sum_{j>i}^{\bar{n}} \sum_{k>j}^{\bar{n}} k_{ijk} \cdot u_i(e_i) \cdot u_j(e_j) \cdot u_k(e_k) + \dots + \\ & k_{123\dots\bar{n}} \cdot u_1(e_1) \cdot u_2(e_2) \cdot u_3(e_3) \dots u_{\bar{n}}(e_{\bar{n}}) \end{aligned}$$

avec

$$u_i(e_i^*) = 1, u_i(e_{i*}) = 0$$

$$u(e_1^*, e_2^*, \dots, e_{\bar{n}}^*) = 1, u(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{\bar{n}*}) = 0.$$

Utiliser une telle décomposition pour bâtir un critère de synthèse imposerait d'élaborer $\bar{n}$ fonctions d'utilité partielles $u_i(e_i)$ et d'attribuer une valeur à $2^{\bar{n}} - 1$ coefficients².

De nombreux autres résultats sont disponibles dans la littérature. Ils font apparaître des fonctions d'utilité partielles ayant plus d'un argument ou plusieurs fonctions ayant les mêmes arguments.

A titre d'exemple, citons :

¹ Pour plus de précisions sur les décompositions abordées dans ce paragraphe, nous renvoyons à Keeney et Raiffa (1976) et à Farquhar (1980, 1983).

² En fait, il faut élaborer $2^{\bar{n}} - 2$ valeurs sachant que la somme des coefficients vaut 1 puisque $u(e_1^*, e_2^*, \dots, e_{\bar{n}}^*) = 1$.

– la décomposition "bilatérale" ¹

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1 u_1(e_1) + k_2 u_2(e_2) + k_3 u_3(e_3) \\ + k_{12} f_1(e_1) f_2(e_2) + k_{13} f_1(e_1) f_3(e_3) \\ + k_{23} f_2(e_2) f_3(e_3) + k_{123} f_1(e_1) f_2(e_2) f_3(e_3) ;$$

– les décompositions "cubiques" et "pyramidales" ² avec par exemple

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1 u_1(e_1) + k_2 u_2(e_2) + k_3 u_3(e_3) + k_{12} u_{12}(e_1, e_2) + \\ k_{13} u_{13}(e_1, e_3) + k_{23} u_{23}(e_2, e_3) + k_{123} u_1(e_1) u_2(e_2) u_3(e_3)$$

ou

$$u(e_1, e_2, e_3) = k_1 u_1(e_1) + k_2 u_2(e_2) + k_3 u_3(e_3) + k_{12} u_{12}(e_1, e_2) + \\ k_{13} u_{13}(e_1, e_3) + k_{23} u_{23}(e_2, e_3) + k_{123} f_1(e_1) f_2(e_2) f_3(e_3) ;$$

– l'approche des structures de préférences "multivalentes" ³ cherchant à exploiter des propriétés d'indépendance vérifiées seulement sur des sous-ensembles d'échelons associés à une dimension ;

– l'approche du "balisage" par l'indifférence conditionnelle ⁴ faisant ressortir des propriétés d'indépendance généralisées au sens des utilités dites de "degré n".

4.5.3 Mise en œuvre ⁵

4.5.3.1 Compléments sur les hypothèses d'indépendance

Avant de s'intéresser à l'attribution de valeurs aux paramètres de la fonction d'utilité, une étape préalable consiste à chercher à cerner quelles sont les hypothèses d'indépendance qui sont vérifiées (démarche descriptive) ou qu'il est raisonnable d'accepter (démarche constructive) afin d'obtenir une forme fonctionnelle précise pour $u(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Les décompositions additives et multiplicatives étudiées précédemment impliquent l'indépendance mutuelle au sens des utilités de l'ensemble des dimensions. On a vu, au 2.4.1, quels types de difficultés on pouvait rencontrer pour savoir s'il convient ou non d'accepter l'indépendance au sens des utilités d'une dimension. Ces difficultés

¹ Voir Fishburn (1977c). Nous nous restreignons ici à trois dimensions pour ne pas alourdir inutilement les expressions.

² Voir Farquhar (1975).

³ Voir Farquhar et Fishburn (1981).

⁴ Voir Farquhar et Fishburn (1983).

⁵ On trouvera un exemple réel de mise en œuvre de ces concepts et résultats au 9.2.

sont de même nature avec plusieurs dimensions. Nous nous contenterons ici d'énoncer deux résultats classiques qui sont très utiles en pratique pour raisonner cette question.

Par analogie avec le résultat 4.2.2, on a :

RÉSULTAT 4.5.3 : Considérons une fonction g vérifiant la formulation d'utilité espérée (r.4.5.1)¹. Si deux sous-familles de dimensions I et J sont toutes deux indépendantes au sens des utilités dans D et sont telles que $I \cap J \neq \emptyset$, $\text{Non}(I \subset J)$, $\text{Non}(J \subset I)$, alors les sous-familles $I \cup J$, $I \cap J$, $I \setminus J$, $J \setminus I$, $(I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ sont indépendantes au sens des utilités dans D .

On a également :

RÉSULTAT 4.5.4 : Considérons une fonction g vérifiant la formulation de l'utilité espérée (r.4.5.1). Les trois propositions suivantes sont alors équivalentes dès lors que $\bar{n} \geq 3$:

- les dimensions sont mutuellement indépendantes au sens des utilités ;
- les sous-familles de dimensions $\{i, i + 1\}$ pour $i = 1, 2, \dots, \bar{n} - 1$ sont indépendantes au sens des utilités dans D ;
- $\exists j \in D$ tel que la dimension j est indépendante au sens des utilités dans D et les sous-familles $\{j, i\}$ pour $i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, \bar{n}$ sont indépendantes au sens des préférences dans D .

Admettre comme base de travail l'indépendance mutuelle au sens des utilités peut donc, dans cette situation, se raisonner en ne considérant que des paires de dimensions judicieusement choisies ou en utilisant une combinaison d'hypothèses d'indépendance au sens des préférences et des utilités.

4.5.3.2 Elaboration des fonctions d'utilité partielles

Que ce soit dans les décompositions additives ou multiplicatives, une étape importante de la mise en œuvre de la théorie de l'utilité espérée consiste dans l'élaboration des fonctions d'utilités partielles $u_i(e_i)$. C'est le rôle des hypothèses d'indépendance utilisées au résultat 4.5.1 que de permettre de raisonner les fonctions d'utilités partielles $u_i(e_i)$ sans se préoccuper des autres dimensions. Rejeter ces hypothèses implique de s'intéresser à des fonctions d'utilité partielles conditionnelles à une évaluation fixée sur les autres dimensions. Travailler avec de telles fonctions

¹ La démonstration de cette proposition (voir par exemple Keeney et Raiffa (1976)) fait largement appel à la transitivité de P et I .

conditionnelles est rarement réaliste en pratique.

Relativement simple d'un point de vue conceptuel, l'élaboration de telles fonctions requiert une expérience certaine et se heurte souvent à bien des difficultés. Nous ne pouvons, dans le cadre de ce livre, étudier en détail toutes les procédures et techniques permettant d'élaborer ces fonctions ¹. Nous renvoyons pour cela aux ouvrages de Raiffa (1970), Keeney et Raiffa (1976) et à l'article de synthèse de Farquhar (1984).

Une étape préalable essentielle à l'élaboration des $u_i(e_i)$ consiste dans une définition claire de la dimension, de ses échelons, des unités utilisées, etc. Avant de procéder à une élaboration quantitative, il est également prudent de chercher à identifier et/ou à établir les "attitudes vis-à-vis du risque" sur cette dimension. On sait en effet ² que certaines attitudes raisonnables vis-à-vis du risque conduisent à des formes fonctionnelles très précises pour les fonctions $u_i(e_i)$ (formes exponentielles, puissance, logarithmique, etc.).

Pour obtenir des valeurs de la fonction $u_i(e_i)$, on peut recourir à de nombreuses techniques. Tant dans la forme additive que multiplicative, on a :

$$u_i(e_{i*}) = 0 \text{ et } u_i(e_i^*) = 1.$$

De plus, ces préférences pour des loteries sur la dimension i ne dépendent pas des valeurs fixées sur les autres dimensions. Dès lors, si l'on peut trouver un échelon ³ e_i' tel que le fait de subir

¹ Beaucoup parlent, à propos de cette élaboration, d'un véritable "art". Pour ceux désirant approfondir ce sujet, rien ne remplace les enseignements que l'on peut tirer d'un véritable dialogue. On trouvera dans Keeney (1977) la transcription détaillée d'un dialogue réel visant à l'élaboration de fonctions d'utilité.

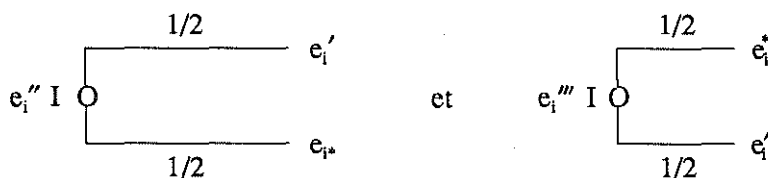
² Il existe une littérature abondante à ce sujet dont on trouvera un bon aperçu dans Keeney et Raiffa (1976). L'article de base en la matière est Pratt (1964).

³ Rappelons une fois de plus que la recherche de e_i' s'opère par un resserrement progressif d'un intervalle comprenant cette valeur.

une conséquence certaine e_i' soit jugé équivalent à celui de courir le risque de recevoir soit e_{i*} , soit e_i^* avec des probabilités identiques, (r.4.5.1) permet, combinée à (r.4.5.2) ou (r.4.5.3), de poser :

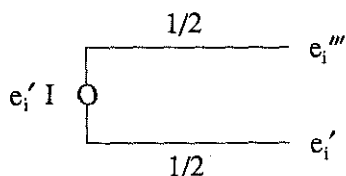
$$u_i(e_i') = 1/2 \cdot u_i(e_{i*}) + 1/2 \cdot u_i(e_i^*) = 1/2.$$

On peut obtenir d'autres points sur la fonction d'utilité, par exemple en s'intéressant aux valeurs e_i'' et e_i''' telles que :

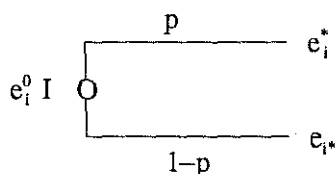


On posera alors $u_i(e_i'') = 1/4$ $u_i(e_i''') = 3/4$. On peut itérer à loisir cette technique, dite de la "conséquence variable" (ou de la loterie 50-50), pour obtenir autant de points que l'on souhaite sur la fonction d'utilité¹. Le plus souvent, en pratique, on se contentera d'un nombre restreint de points traçant ensuite, à main levée, une fonction ou utilisant ces points pour calibrer les paramètres d'une forme fonctionnelle précise impliquée par des considérations qualitatives sur le goût ou l'aversion pour le risque. Pour s'assurer d'une certaine cohérence dans les valeurs attribuées, il est prudent de poser quelques questions de contrôle. On devrait avoir par exemple :

¹ La nature de ces questions explique qu'il soit extrêmement difficile de mettre en œuvre une élaboration directe de $u(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Une telle façon de faire supposerait un nombre très élevé de questions particulièrement complexes. Il est important également que l'interrogé perçoive clairement la dimension et puisse la rattacher à son expérience concrète. Ceci explique qu'il soit, en général, difficile de vouloir bâtir une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern sur un critère de synthèse agrégeant (dans le "certain") les dimensions de D. En effet, un tel critère ne s'exprime généralement dans aucune unité concrète claire.



Une autre technique, dite de la "probabilité variable" (qui est adaptée au cas d'échelles discrètes, contrairement à la précédente), consiste à faire porter les questions non sur des échelons mais sur des probabilités. Fixons un échelon e_i^0 . Si l'on parvient à trouver la probabilité p telle que



on pourra alors poser $u_i(e_i^0) = p \cdot u_i(e_i^*) + (1 - p) \cdot u_i(e_i^*) = p$. D'autres techniques peuvent également être envisagées, par exemple en faisant varier un des lots de la loterie ou en faisant comparer deux loteries entre elles ¹.

Il est clair que, dans une démarche purement descriptive, toutes ces techniques devraient conduire à des fonctions $u_i(e_i)$ identiques, à un aléa expérimental près. Il n'en va pas de même dans une démarche constructive où il est tout à fait concevable que la façon de présenter le problème, de poser les questions et de les enchaîner puisse avoir une influence non négligeable sur le résultat du dialogue.

De très nombreuses études laissent à penser qu'adopter une attitude purement descriptive pour mettre en œuvre ce genre de questionnement est fortement sujet à caution ². On constate en

¹ Sur cette dernière technique, voir McCord et de Neufville (1986).

² Voir les synthèses de Bouyssou (1984) ou Jaffray (1989).

effet que :

- les probabilités présentes dans les loteries sont souvent mal perçues et déformées, en particulier aux environs de la certitude ¹,

- la façon de formuler les questions influence grandement les réponses en termes de préférences ²,

- le domaine sur lequel est estimée la fonction d'utilité influence significativement sa forme ³,

qu'enfin et surtout

- les diverses méthodes d'estimation produisent des résultats différents, ces différences étant importantes, systématiques et prévisibles ⁴.

Il serait cependant vain de chercher à nier l'intérêt de cette approche en aide à la décision. Le très grand nombre d'études ayant été réalisées en l'utilisant est là pour en témoigner ⁵. Mais il est essentiel de reconnaître que l'intérêt de cette approche réside avant tout dans la puissance des conventions qu'elle propose au décideur pour structurer et raisonner ses préférences.

¹ Voir le recueil de Kahneman et al. (1981) où on trouvera une étude exhaustive de ce problème.

² En particulier, citons :

- Le phénomène du renversement de préférences (voir Lichtenstein et Slovic (1971)).

- Les effets de "référence" et du "contexte" (reference and context effects). Voir, par exemple, Hershey et Schoemaker (1980), Tversky (1977) ou encore Kahneman et Tversky (1979).

³ Voir, par exemple, Hershey et al. (1980) ou Jaffray et Cohen (1982).

⁴ Voir, outre l'article de Hershey et al. (1980), les travaux de McCord et de Neufville (1982), les résultats de l'étude de 1952 de Allais reproduits dans Allais (1979), Jonhson et Schkade (1989), Loomes (1988).

⁵ Voir la bibliographie de Keeney (1982).

Mentionnons en dernier lieu qu'il est possible de construire les fonctions $u_i(e_i)$ en recourant à des techniques de programmation linéaire tout à fait comparables à celles qui ont déjà été mentionnées au 4.2.1.3¹.

4.5.3.3 Attribution de valeurs aux coefficients k_i

L'attribution d'une valeur aux coefficients k_i dans les formes additives et multiplicatives (r.4.5.2) et (r.4.5.3) s'opère suivant les mêmes principes que ceux qui ont déjà été évoqués au 4.2.1.3 à propos de la forme additive simple et au 4.4.3 à propos des mesures.

Il est prudent, dans tous les cas, de chercher à ordonner les k_i avant de procéder à des questions plus complexes. Ceci se fait de manière simple sachant que :

$$(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, \dots, e_{n*}) P (e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{j-1*}, e_j^*, e_{j+1*}, e_{n*}) \\ \Rightarrow k_i > k_j$$

dans la forme additive aussi bien que dans la forme multiplicative.

Pour donner une valeur aux k_i dans la forme additive, il suffit, sachant que $\sum_{i=1}^n k_i = 1$, d'obtenir $\bar{n} - 1$ jugements de préférences sur des actions différant sur plusieurs dimensions. Ceci peut se faire simplement en évaluant des taux de substitution entre différentes dimensions. On obtient alors un polyèdre que l'on peut chercher à explorer de façon systématique. Si l'on souhaite attribuer une valeur unique aux k_i , on pourra chercher à obtenir des jugements en termes d'indifférence ou encore à attribuer directement une valeur aux k_i en cherchant à définir la probabilité p telle que :

¹ Voir sur ce point Siskos (1983).

$$(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{i-1*}, e_i^*, e_{i+1*}, \dots, e_{n*}) \quad I \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{p} (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \\ \xleftarrow{1-p} (e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{n*}) \end{array}$$

On a alors, tant dans la forme additive que multiplicative, $k_i = p$.

Pour donner une valeur aux k_i dans la forme multiplicative, on peut recourir à la technique évoquée au 4.4.3 en raisonnant sur les coefficients $k \cdot k_i$, soit obtenir $n - 1$ équations (ou inéquations) et attribuer une valeur à l'un des k_i en recourant à la technique de loterie que nous venons d'évoquer. La valeur de k se déduit alors aisément, de façon numérique, en résolvant l'équation :

$$1 + k = \prod_{i=1}^n (1 + k \cdot k_i).$$

On verra au 9.2 un exemple de mise en œuvre de ces techniques.

4.6 CONCLUSION

En matière d'aide multicritère à la décision, l'approche opérationnelle qui repose sur la construction d'un critère unique de synthèse apparaît, aux yeux de beaucoup, comme la plus naturelle. On la croit généralement aisée parce que simple. La complexité des résultats théoriques rappelés dans ce chapitre, jointe à la pauvreté des résultats concernant divers problèmes importants auxquels se trouve confronté le praticien, nous invitent à souligner le caractère trompeur de cette apparente facilité.

Bâtir un critère unique de synthèse implique des réponses à trois types de problèmes :

– **Un problème structurel** : quelle est la classe de fonctions V au sein de laquelle on cherche le critère de synthèse ? Autrement dit, quelles sont les formes analytiques a priori possibles (et seules possibles) pour cette fonction V (somme pondérée, forme additive plus générale, forme multiplicative, ...) ?

– **Un problème paramétrique** : la classe de fonctions V envisagée fait intervenir un certain nombre de paramètres qui renvoient, le plus souvent, à ce que nous avons appelé des informations inter-critères ; quelle interprétation donner à de tels paramètres, sur quelles bases, selon quelle démarche peut-on leur attribuer une valeur numérique ?

– **Un problème de qualité** : compte-tenu de la part d'arbitraire que recèle le choix de la fonction V , les valeurs numériques attribuées aux paramètres qu'elle renferme et l'évaluation d'une action à quelconque (performance selon n critères ou modèles plus complexes), comment apprécier le pouvoir discriminant du critère de synthèse ; de façon plus précise, puisque, sauf exception, il est peu réaliste de traiter ce critère comme un vrai-critère, comment peut-on donner des valeurs numériques à des seuils d'indifférence et/ou de préférence ?

Dans ce chapitre, nous avons cherché à rassembler l'essentiel des résultats aujourd'hui disponibles pour aider le praticien à faire face à ces trois problèmes. Force est de constater la pauvreté de cette aide concernant le troisième (cf. 4.3). Cela tient certes à la difficulté du problème mais aussi au fait que, jusqu'à ce jour, la plupart des théoriciens ont regardé, a priori, le critère unique de synthèse comme un vrai-critère. Or, fréquemment, en pratique :

- la forme analytique retenue pour la fonction V n'est qu'une hypothèse de travail parmi d'autres ;
- la signification concrète des paramètres qu'elle renferme est quelque peu confuse et les valeurs numériques qui leur ont été attribuées discutables au sein d'intervalles plus ou moins grands ;
- enfin, les performances qu'il s'agit d'agréger renvoient à des critères qui ne sont pas, eux-mêmes, de vrai-critères.

Chacune des trois raisons qui viennent d'être évoquées vient donc contredire l'hypothèse d'un critère unique de synthèse qui soit un vrai-critère. Il importe de ce fait, à la lumière des particularités de chaque cas concret où cette approche opération-

nelle est retenue, de discuter du pouvoir discriminant¹ du critère unique de synthèse afin d'éviter de travailler avec des seuils de préférence et/ou d'indifférence nuls sous le seul prétexte qu'on est embarrassé pour leur donner une valeur non nulle.

Relativement au problème paramétrique, on a vu (cf. notamment 4.2.1.3, 4.4.3, 4.5.3) que, sous des hypothèses bien définies, on pouvait prendre appui sur une technique précise de questionnement pour "estimer" (ou ajuster) la valeur des divers paramètres. Pour parler d'estimation (ou d'ajustement), il faut bien évidemment supposer que le système relationnel de préférences que le critère unique de synthèse décrit existe "quelque part" et puisse être questionné tout en demeurant inchangé par ce questionnement. C'est dire que les fondements théoriques de telles techniques se situent inévitablement dans le cadre d'une démarche descriptive. Cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit dépourvue d'intérêt dans le cadre d'une démarche constructive. Certes, on ne peut plus alors parler d'"estimation" (ni d'ajustement) et encore moins de "biais" ou d'"erreur". On peut malgré tout, grâce à de telles techniques, clarifier la signification concrète des valeurs numériques attribuées et tester l'acceptabilité de l'hypothèse de travail qu'elles constituent.

Pour le problème structurel enfin, il existe, comme l'illustrent les résultats 4.2.1, 4.4.3, 4.4.4, 4.5.2, 4.5.3, un certain nombre de travaux qui permettent de justifier les formes analytiques les plus simples. Dans une démarche descriptive, ces résultats doivent permettre d'apprécier si la forme analytique retenue est ou non apte à représenter le système relationnel de préférences supposé pré-existant. Dans une démarche constructive, ils permettent de mettre à jour le type d'hypothèses structurelles qu'il est nécessaire et/ou suffisant d'accepter comme hypothèses de travail pour que la forme analytique considérée puisse être retenue. Ces résultats ont pu paraître un peu compliqués et trop limités à des propriétés d'indépendance. On peut regretter l'absence de résultats utilisables concernant des formes de dépendance susceptibles d'être typées sur des bases relativement simples.

¹ Cf. 1.6.3.

Les concepts, résultats et commentaires du présent chapitre sont susceptibles, dans bien des cas, d'aider à l'élaboration d'un critère unique de synthèse. Il n'en demeure pas moins qu'ils sont complexes et incomplets. Il ne nous paraît pas possible d'en dégager un guide de portée générale auquel l'homme d'étude pourrait se fier lorsqu'il a choisi l'approche opérationnelle du critère unique de synthèse. Quelle que soit la façon de s'y prendre, il importe à notre avis de bien noter, chemin faisant, les principaux facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination qui affectent les options retenues dans chacun des trois problèmes discutés dans cette conclusion. De tels repères sont nécessaires pour que l'homme d'étude puisse effectuer ce que nous appellerons une analyse de robustesse, laquelle est généralement indispensable pour asseoir correctement une recommandation.

Ce que nous entendons précisément par analyse de robustesse sera précisé au 5.4.4. Bornons-nous à préciser que, par là, nous désignons l'ensemble des attendus, calculs et examens critiques qui ont pour objet de mettre en évidence la plus ou moins grande solidité (eu égard à ces facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination) des conclusions dégagées. Elle consiste en particulier à conduire des calculs destinés à mettre à l'épreuve ces conclusions lorsqu'on répercute, sur le critère unique de synthèse, l'impact de variations d'amplitude raisonnable provoqué par l'analyse de tels facteurs. Contrairement à ce qui est pratiqué couramment dans ce qu'on appelle une "analyse de sensibilité", il importe de ne pas seulement faire varier l'un après l'autre et isolément chacun de ces facteurs. Il est indispensable de combiner, de manière suffisamment riche et représentative (mais sans doute pas de toutes les façons possibles), l'impact des différentes sources de variation. On peut ainsi examiner dans quelle mesure, selon que l'on adopte un critère unique de synthèse défini d'une manière ou d'une autre, les résultats obtenus (c'est-à-dire, selon les cas, la meilleure action, les actions situées en tête de classement, le rangement complet des actions ou l'affectation de ces actions à des catégories) s'avèrent relativement stables ou, au contraire, sont modifiés de façon significative. A titre d'illustration, imaginons que l'étude prenne appui sur la théorie de l'utilité espérée et, plus précisément, sur le résultat 4.5.1. Il faudra au

minimum combiner trois types de facteurs :

- la valeur de certaines caractéristiques et peut-être même de la forme analytique des distributions de probabilités car celles-ci découlent plus souvent d'hypothèses ad hoc (destinées à faciliter les calculs ou à se contenter de médiocres informations sur le caractère aléatoire de l'attribut en question) que de considérations objectives ;

- la valeur des caractéristiques et peut-être même les formes analytiques des fonctions d'utilité partielles (mêmes raisons que ci-dessus) ;

- les valeurs attribuées aux coefficients k_i (et au coefficient k qui en découle).

Il faut bien reconnaître qu'une telle analyse de robustesse est souvent lourde et coûteuse. C'est pourquoi on y renonce souvent en pratique ¹. Pourtant, ce n'est qu'au prix de ce genre d'analyse que l'élaboration d'un critère unique de synthèse peut véritablement aider à construire, transformer, justifier des préférences et servir de base de discussion critique pour asseoir une recommandation.

¹ Cf. Roy et Bouyssou (1986).

Chapitre 5

PROCÉDURES D'AGRÉGATION MULTICRITÈRE NON FONDÉES SUR UN CRITÈRE UNIQUE DE SYNTHÈSE (PAMC DE TYPE ELECTRE)

RÉSUMÉ

5.1 Les PAMC dont il est question dans ce chapitre aboutissent à un ou plusieurs systèmes relationnels de préférences pouvant faire intervenir l'incomparabilité et la non transitivité des relations I, S ou P. On examine tout d'abord en quoi ces PAMC (dites de type II) diffèrent de celles étudiées au chapitre précédent (type I) et on explique leur raison d'être.

Les principaux types de modèles de préférences auxquels conduisent les PAMC de type II sont inventoriés au 5.1.1. La diversité de telles procédures est expliquée au 5.1.2 ainsi que les principales raisons qui peuvent amener à opter pour une procédure de type II plutôt que pour une procédure de type I.

5.2 Cette section est consacrée à une présentation des principales PAMC aboutissant à un unique système relationnel de préférences pouvant prendre l'une des formes suivantes : (S, R) , (P, I, R) , $(P, \sim)$, $(P, \sim, R)$. Les trois principales procédures étudiées sont ELECTRE I, ELECTRE IS et TACTIC. Pour chacune d'elles, dans un souci d'opérationnalité, on a séparé la présentation des formules (accompagnées du minimum d'explications nécessaires pour pouvoir les appliquer) des commentaires qui permettront au lecteur de comprendre leur raison d'être. Pour d'autres procédures simplement évoquées, le lecteur trouvera les indications bibliographiques nécessaires à leur approfondissement.

5.3 Dans cette section, on traite, avec le même souci d'opérationnalité que dans la section précédente, des PAMC qui aboutissent à plusieurs systèmes relationnels de préférences. Il s'agit de systèmes emboîtés qui font référence à une hiérarchie de crédibilité. Les divers niveaux qui caractérisent cette hiérarchie peuvent être imposés a priori (le nombre des s.r.p. est alors déterminé, cf. 5.3.1) ou appréciés sur une échelle allant de 0 à 1 (le nombre des s.r.p. est alors indéterminé, cf. 5.3.2).

Les principales procédures étudiées concernent :

- au 5.3.1, ELECTRE II et ELECTRE IV ;
- au 5.3.2, PROMETHEE, ELECTRE III et les procédures par compensation probante.

5.4 La construction effective, en vue d'une aide à la décision, de systèmes relationnels du type de ceux dont il est question dans les précédentes sections pose, à l'homme d'étude, un certain nombre de problèmes pratiques auxquelles on s'efforce de répondre dans cette section. Un paragraphe de généralités situe les problèmes. Les deux paragraphes suivants sont respectivement consacrés à la manière dont on peut attribuer des valeurs numériques aux coefficients d'importance et aux seuils de veto. Le dernier paragraphe introduit un concept fondamental en matière d'aide à la décision : celui d'analyse de robustesse. Un schéma pour conduire une telle analyse de robustesse est décrit.

5.5 Cette section aborde un certain nombre de questions théoriques à propos des PAMC présentées dans ce chapitre. On s'y demandera :

- si ces PAMC confèrent certaines "propriétés structurelles" aux systèmes de préférences construits ;
- à quelles conditions ces PAMC peuvent conduire à des systèmes de préférences ayant des propriétés remarquables de transitivité et/ou de complétude ;
- si l'on peut axiomatiser ces PAMC.

5.1 GÉNÉRALITÉS

L'aide à la décision peut prendre appui sur des modèles de préférences globales directement issus d'un critère unique de synthèse. Les techniques de construction de tels modèles, de même que leurs propriétés et leur portée pratique, ont été étudiées au chapitre précédent. Leur origine (critère unique de synthèse) confère à ces modèles de préférence deux particularités :

- ils excluent toute incomparabilité ;
- ils jouissent de ce que nous avons appelé des propriétés remarquables de transitivité.

Ce sont là des qualités qu'il est légitime de rechercher sauf si, pour en jouir, le modèle est exposé à d'autres défauts qui en sont

la contre-partie. L'imprécision, l'incertitude, l'indétermination qui affectent les performances et les informations inter-critères, jointes à la part d'arbitraire inévitable que comportent certaines options ayant trait à la logique d'agrégation, au choix des informations inter-critères, ..., font que le résultat de la comparaison d'une action b à une action a apparaît, selon les cas, comme plus ou moins discutable, plus ou moins fragile. Ce résultat, lorsqu'on a recours à un unique critère de synthèse g , est fondé sur la seule comparaison des deux nombres $g(b)$ et $g(a)$. Quelle que soit la manière dont ces nombres sont établis, cette façon de faire rend toujours possible l'énoncé du résultat en termes de préférence (stricte ou faible) ou d'indifférence (sans jamais avoir à recourir à l'incomparabilité) et cela en respectant automatiquement des propriétés remarquables de transitivité. Il peut de ce fait y avoir une contre-partie négative à cette façon de procéder. On s'expose en effet à masquer la fragilité, voire l'arbitraire, de certains des résultats obtenus. Les préférences et indifférences que le critère unique de synthèse installe de façon nette, même là où il y a ambiguïté et conflit, ne sont-elles pas, dans certains cas tout au moins, davantage le pur produit d'une règle qui, grâce à un mécanisme de transitivité, est apte à combler toute lacune plutôt que le reflet de préférences convenablement raisonnées ?

L'aide à la décision peut également prendre appui sur des modèles de préférences globales conçus, à l'opposé des précédents, de façon à mettre en évidence le caractère plus ou moins solide des jugements de préférence et d'indifférence qu'ils comportent. Ces jugements doivent alors être fondés sur une comparaison qui ne peut être réduite à celle de deux nombres. Pour éviter d'avoir à formuler des jugements trop fragiles, il est indispensable que de tels modèles acceptent les situations d'incomparabilité. Il convient également de ne pas leur imposer d'obligations de transitivité (sous quelque forme que ce soit) afin d'éviter de fabriquer, par enchaînement de résultats isolément acceptables bien que discutables, des jugements d'indifférence ou de préférence réellement mal fondés. De tels modèles ne peuvent évidemment être issus d'un unique critère de synthèse. Le système relationnel de préférences doit être établi directement. C'est pourquoi nous dirons qu'il est issu d'une ou plusieurs relations de synthèse.

Ce sont ces modèles que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous mettrons l'accent sur les principales procédures actuellement en usage pour les construire. Nous allons auparavant préciser, en premier lieu, en quoi consistent ces modèles, autrement dit les formes sous lesquelles ils se présentent et, en second lieu, leur domaine d'intérêt de même que les principales raisons de leur diversité.

Dès à présent, il nous faut à nouveau attirer l'attention du lecteur sur une différence importante quant à la manière d'exploiter, pour l'aide à la décision, les deux types de modèles dont il vient d'être question. Lorsque le modèle de préférences globales est issu d'un critère unique de synthèse, la voie pour élaborer une prescription (qu'il s'agisse de choisir, de trier, de ranger) est toute tracée (cf. 3.2.1 d). Nous reviendrons sur ce point au 6.1.). En revanche, lorsque le modèle présente des incomparabilités et/ou certaines formes d'intransitivité, son utilisation en vue de l'aide à la décision nécessite de recourir à certains types de raisonnements, voire, le plus souvent, à des procédures additionnelles. Le chapitre 6 leur sera consacré.

Les procédures d'agrégation multicritère (cf. 3.2.1) auxquelles nous consacrons le présent chapitre s'inscrivent dans le cadre esquissé ci-dessus en vue de fonder le modèle de préférences globales sur des **relations de synthèse**. Nous parlerons à leur sujet de **PAMC de type II**. Nous nous référerons à celles fondées sur un critère unique de synthèse en parlant de **PAMC de type I**.

Soulignons que l'aide à la décision, selon qu'elle est conçue sur une PAMC de type I ou de type II, correspond très exactement à ce que nous avons appelé, au 1.7, une approche opérationnelle AO1 ou AO2. Rappelons que l'aide à la décision peut cependant se concevoir en dehors de toute procédure d'agrégation multicritère explicite et même de tout modèle de préférences globales défini sur A. Cette troisième façon d'envisager l'aide à la décision (approche opérationnelle AO3) sera étudiée au chapitre 7.

Précisons que, dans le cadre de AO2, il n'est pas obligatoire, ni forcément souhaitable, de dissocier, aussi clairement que nous

le faisons avec ce chapitre et le suivant, une première étape constituée par une PAMC suivie d'une seconde destinée à en exploiter le résultat en fonction de la problématique retenue. Certaines méthodes (telles QUALIFLEX, cf. Paelinck (1978) et Ancot (1988)), conçues pour la problématique γ , visent d'emblée à l'explicitation d'un préordre.

Signalons encore que le type de modèles de préférences globales qui caractérisent AO2 (acceptation d'incomparabilités et d'intransitivités) peut fort bien être construit en prenant pour point de départ non pas une famille F de n critères (cas étudié dans le présent chapitre) mais un modèle d'évaluation plus général, moins synthétique, $\Gamma(A)$ ¹. C'est notamment le cas des méthodes proposées par Martel et al. (1986) et D'Avignon et Vincke (1988).

Soulignons enfin qu'une compréhension en profondeur des sections qui suivent nécessite une bonne connaissance des notations et définitions du 3.1.

5.1.1 Objectif des procédures étudiées

Le modèle de préférences globales issu d'une PAMC de type II peut prendre des formes variées. Il peut se réduire à un unique s.r.p.² (cf. 5.2) ou en comporter plusieurs (cf. 5.3). Dans ce dernier cas, on peut aisément prendre en compte le fait que la comparaison de deux actions b et a peut aboutir à une affirmation de la forme $b H a$ (H étant l'une des relations pour $S, I, P, >, R, \sim, \dots$) lorsqu'on raisonne sous certaines conditions et à une affirmation sensiblement différente ($b H' a$) lorsque l'on modifie ces conditions. Autrement dit, en étant plus ou moins exigeant sur la nature et le contenu des arguments capables de conduire à l'acceptation d'une affirmation de type $b H a$, on peut faire ressortir la plus ou moins grande fragilité de ce résultat. C'est la raison pour laquelle on est conduit à construire plusieurs s.r.p.,

¹ Cf. 1.5 et 4.5.

² s.r.p. : abréviation de système relationnel de préférences (cf. 1.4).

lesquels correspondent à des niveaux de crédibilité hiérarchisés. Il est clair que plus la crédibilité est élevée dans cette hiérarchie et plus les cas d'incomparabilité ($b R a$ ou $b \sim a$) ont tendance à se multiplier. Ces cas s'obtiennent généralement par complémentarité lorsqu'il n'y a pas d'argument fort, pour une relation autre que R ou $\sim$, ni de b vers a , ni de a vers b .

Les s.r.p. auxquels conduisent les PAMC de type II sont habituellement de la forme (S, R) , (P, I, R) , $(\succ, I, R)$, $(P, \sim)$ ou $(P, \sim, R)$. Des exemples simples de PAMC aboutissant à un unique s.r.p. ayant l'une des formes précédentes ont déjà été présentés au 3.2.2 b) et c). Le lecteur qui les aurait oubliés aurait intérêt à se remettre en mémoire ces PAMC élémentaires avant de poursuivre.

Faisons remarquer que $(P, \sim)$ et $(P, \sim, R)$ mis à part, les trois autres formes de s.r.p. citées ci-dessus diffèrent avant tout par le contenu sémantique des relations mises en jeu. Aucun obstacle de fond n'empêche de passer de l'une à l'autre. Ce qui les sépare est une question de nuance. Concrètement, l'adoption de l'une des formes (P, I, R) ou $(\succ, I, R)$ implique que, dans l'énoncé des conditions ayant valeur de preuve pour asseoir un surclassement ($S = P \cup I$ ou $S = \succ \cup I$), on ait pu établir une différence significative entre les cas de symétrie et ceux d'asymétrie. Cela est nécessaire pour que les cas d'asymétrie $b S a$ et $\text{Non}(a S b)$ puissent être regardés comme fort peu compatibles avec l'indifférence. Ces cas d'asymétrie peuvent alors être assimilés soit à une préférence stricte (relation P), soit à une préférence (relation $\succ$). A contrario, en adoptant la forme (S, R) qui n'oblige pas à analyser séparément les cas de symétrie et ceux d'asymétrie, on admet (conformément à la définition du concept de surclassement¹) que $b S a$ et $\text{Non}(a S b)$ puissent être compatibles avec une situation d'indifférence (cette dernière n'ayant pu être appréhendée plus clairement en raison d'imprécisions, d'incertitudes et d'indéterminations de toute sorte).

Les systèmes $(P, \sim)$ et $(P, \sim, R)$ diffèrent plus profondément des trois autres. Ils reposent sur la définition d'une relation asymétrique P , autrement dit sur celles des conditions qui légitiment l'affirmation $b P a$. Ils amalgament, dans la relation $\sim$, les situations d'indifférence avec des situations d'incomparabilité sans aucune possibilité de les séparer. Il est donc difficile, voire impossible, de passer d'un système de la forme $(P, \sim)$ ou $(P, \sim, R)$ à un système de la forme (S, R) .

¹ Cf. 1.4.1.

L'objectif des PAMC étudiées dans ce chapitre peut, dans un certain sens, être vu comme le suivant : pour chacun des couples (b, a) d'actions de A, valider une affirmation de type b H a si les arguments en sa faveur sont jugés suffisamment convaincants ou, au contraire, rejeter une telle affirmation comme insuffisamment justifiée. L'affirmation b H a s'interprète, selon les procédures, comme "b n'est pas pire que a" (b S a) ou "b est significativement meilleure que a" (b P a). Les conditions qui permettent d'affirmer ou d'infirmer le bien-fondé de b H a reposent sur la comparaison des vecteurs de performances $g(b)$ et $g(a)$ selon une technique propre à chaque procédure. Celles étudiées au 5.2 ont seulement pour objet de savoir si b H a est ou non acceptable dans les conditions considérées. Celles étudiées au 5.3 visent à préciser à quel niveau d'une hiérarchie de crédibilité l'affirmation ci-dessus peut être acceptée.

La quasi-totalité des procédures qui ont été proposées dans le cadre de cette approche opérationnelle AO2 reposent sur la définition d'un ensemble de conditions ou tests à satisfaire pour que l'affirmation b S a ou b P a soit regardée comme établie. Dans le cas le plus simple où l'on a affaire à un s.r.p. unique, la PAMC est entièrement définie par cet ensemble de conditions (c'est le cas d'ELECTRE I ou de TACTIC, cf. 5.2). Lorsque la PAMC conduit à expliciter plusieurs s.r.p., on observe deux façons de procéder (étudiées au 5.3) :

– l'une (cf. ELECTRE II ou ELECTRE IV) consiste à modifier, dans le sens d'une sévérité décroissante, certaines modalités d'application des conditions ou tests de façon à ce que les s.r.p. successifs qui en résultent contiennent de moins en moins de cas d'incomparabilité, les cas de surclassement qui les remplacent étant corrélativement de moins en moins solidement établis ;

– l'autre (cf. ELECTRE III ou PROMETHEE) consiste à apprécier directement, sur une échelle allant de 0 à 1, le niveau de vérification des conditions susceptibles de valider la proposition b S a ou b P a, ce qui amènera à définir un indice de crédibilité de la proposition (on parle dans ce cas de relation floue).

5.1.2 Examen critique

Comme le montrera la suite de ce chapitre, la diversité des PAMC de type II paraît encore plus grande que celle des PAMC de type I étudiées au chapitre 4. Pourquoi cette multiplicité de procédures ? A partir de quel genre d'examen critique l'homme d'étude peut-il opter pour l'une plutôt que pour une autre ? Avant même d'aborder ces questions, il convient de chercher à cerner les cas où le recours à une PAMC de type II est particulièrement justifié.

Les procédures présentées dans la suite de ce chapitre ont toutes été conçues par référence à une famille F contenant **au moins trois critères** et ce n'est même qu'à partir de cinq ou six qu'elles acquièrent leur pleine signification. Par la suite, nous nous placerons donc implicitement dans cette hypothèse. Dès lors que l'une quelconque des conditions énoncées ci-après est remplie, on peut estimer qu'elle constitue un élément de contexte favorable à l'usage d'une PAMC de type II.

CONDITION n° 1 : Parmi les critères, il en est un au moins dont les performances prennent leur valeur dans une échelle "faussement quantitative" qui ne se prête pas bien à la comparaison d'écarts de préférences ¹ et qu'il paraît difficile et/ou artificiel de coder de façon à donner un sens, en termes d'écarts de préférences, aux rapports $(g(a) - g(b))/(g(c) - g(d))$.

CONDITION n° 2 : On observe une forte hétérogénéité quant à la nature des performances lorsque l'on passe d'un critère à un autre (exemple : durée, bruit, chaleur, surface, population, risque, ...) rendant difficile et/ou artificiel leur codage en vue de les exprimer en une unité commune.

CONDITION n° 3 : La compensation d'une perte sur un critère donné par un gain sur un autre critère (cf. 3.1.5) s'opère de façon

¹ Nous faisons ici allusion à des critères qui ne sont pas des mesures (cf. 1.6.4 et 4.4), par exemple parce que l'échelle associée n'est pas une échelle d'intervalle (cf. Roberts (1979) ou Vansnick (1990)).

complexe et/ou en liaison avec des systèmes de valeurs entre lesquels la modélisation n'a pas à prendre parti.

CONDITION n° 4 : Certains des critères sont des pseudo-critères et il paraît souhaitable de tenir compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence qui leurs sont associés pour obtenir les préférences globales.

En revanche, le recours à une PAMC de type II ne paraît guère justifié dès l'instant où les performances selon chaque critère :

- sont définies ou peuvent être codées sans trop d'arbitraire sur une échelle commune à tous les critères ;
- sont exprimées sur cette échelle de manière à ce que les rapports d'écarts de performances aient un sens en termes de comparaison d'écarts de préférences.

En pratique, il semble que les conditions favorables à l'application des PAMC de type II aille de pair avec des ensembles A ne possédant qu'un nombre limité de ces actions (quelques dizaines, voire quelques centaines). On peut vouloir appliquer ces PAMC à des ensembles A de taille quelconque (notamment dans le cas où $A \subset \mathbb{R}^m$). Cependant, la manière de tirer parti du ou des systèmes de préférences ainsi bâtis n'a guère été étudiée ¹.

La diversité des PAMC de type II s'explique par cinq catégories de questions. Nous allons brièvement montrer que chacune d'elles est source d'options variées de la part de l'homme d'étude. La multiplicité des procédures constitue en quelque sorte la réponse du théoricien à cette variété.

a) *Comment les conséquences des actions sont-elles décrites ?* : modèles d'évaluation complexes (comme $\Gamma(A)$, cf. 4.5) ou, au contraire, synthèse en une famille F de n critères ; dans ce dernier cas, F contient-elle des pseudo-critères ou seulement des vrai-critères ?

¹ Voir cependant la méthode PROMETHEE IV dans Brans et al. (1984).

b) *Selon quelle logique et avec quel type de grandeurs caractéristiques prendre en compte le rôle spécifique dévolu à chaque critère ?* : logique compensatoire avec taux de substitution ou logique non compensatoire avec ou sans coefficients d'importance intrinsèques et/ou phénomène de veto.

c) *Quel degré de complexité peut avoir la méthode ?* : il faut ici tenir compte du désir de transparence que peuvent exprimer les utilisateurs, du mode d'utilisation prévu (routinier ou, au contraire, au coup par coup) ainsi que de la place qu'il convient de donner à l'analyse de robustesse (cf. 5.4.4).

d) *Dans quelle problématique doit intervenir la PAMC en question ?* : nous verrons l'importance de ce type de considérations au chapitre suivant ; signalons seulement que si pour P. γ il paraît justifié de travailler avec une PAMC aboutissant à plusieurs s.r.p. (selon le schéma hiérarchisé indiqué plus haut), ceci semble une source de complications difficiles à justifier dans le cadre de P. α car on peut estimer qu'un unique s.r.p. est bien adapté au principe dichotomique de la sélection.

e) *Quelles exigences techniques souhaite-t-on voir remplies par la PAMC ?* : cette question ne peut être davantage précisée ici ; nous l'aborderons au 5.5.

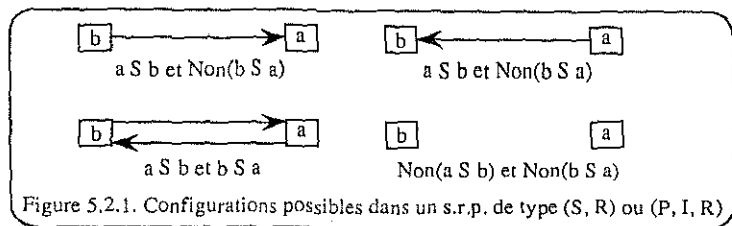
Dans les deux sections suivantes, nous présentons, dans un souci d'opérationnalité, les principales PAMC aboutissant soit à un unique système de préférences (cf. 5.2), soit à plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Nous nous bornerons à énoncer les formules fondamentales en les accompagnant d'un minimum de commentaires explicatifs. Les éléments permettant de justifier ces formules ont en effet été présentés, pour la plupart, au 3.1. On consacrera le 5.4 à la manière de mettre en œuvre ces PAMC et, en particulier, d'élaborer les informations inter-critères qu'elles utilisent. Diverses questions plus théoriques seront enfin abordées au 5.5.

5.2 PROCÉDURES ABOUTISSANT À UN UNIQUE SYSTÈME DE PRÉFÉRENCES

Pour cette présentation, il nous a paru commode de séparer les procédures en deux catégories selon que, dans le système de préférences auquel elles aboutissent, l'incomparabilité est ou non clairement séparée de l'indifférence.

5.2.1 Systèmes de type (S, R) ou (P, I, R)

Définir une procédure de ce type équivaut à formuler des conditions faisant intervenir un couple quelconque de vecteurs de performances ($\underline{g}(b)$, $\underline{g}(a)$), conditions qui, dès lors qu'elles sont satisfaites, valident l'affirmation " $b \text{ S } a$ ". Etant donné une paire d'actions $\{a, b\}$, il se peut que ces conditions ne soient vérifiées ni par le couple (a, b) , ni par le couple (b, a) : les deux actions sont alors incomparables ($a \text{ R } b$). La figure 5.2.1 schématise les trois seules autres configurations possibles.



Dire que le système est de type (P, I, R) plutôt que de type (S, R) équivaut à admettre que $b \text{ S } a$ et $a \text{ S } b$ caractérisent l'indifférence ($a \text{ I } b$) alors que $b \text{ S } a$ et $\text{Non}(a \text{ S } b)$ caractérisent la préférence stricte ($a \text{ P } b$). Rappelons que ceci ne peut être déduit logiquement de la définition de S (cf. 1.4.1).

En effet, la définition d'une relation de surclassement n'implique nullement que :

- la partie antisymétrique de S ne corresponde qu'au cas de préférence stricte P ;
- la partie symétrique de S corresponde à tous les cas d'indifférence I.

Il ne peut en être ainsi que sous la double hypothèse restrictive suivante :

- il existe une frontière totalement dépourvue d'ambiguïté séparant les situations d'indifférence et de préférence stricte ;
- les conditions qui servent à fonder l'affirmation $a S b$ permettent d'appréhender cette frontière avec exactitude.

Dès lors que l'on met en doute l'existence d'une telle frontière ou notre aptitude à l'appréhender de façon exacte, il faut admettre que la séparation entre indifférence et préférence stricte ne peut pas être totalement significative. Il faut donc prendre en considération une "frange" d'ambiguïté traduisant une "hésitation" entre les deux situations. Elle a conduit Roy (1977) à introduire le concept de préférence faible et à adopter une définition du concept de surclassement¹ qui permettent de s'affranchir de toute hypothèse de séparation significative. Cette définition, en effet, n'implique nullement que les conditions qui servent à fonder l'affirmation $a S b$ cernent avec exactitude une frontière qui séparerait les situations d'indifférence $a I b$ et celles de préférence faible $a Q b$. En revanche, il devrait en être ainsi si l'on voulait que :

- la partie antisymétrique de S corresponde à la préférence $>$;
- la partie symétrique de S corresponde à l'indifférence I .

Avec la définition adoptée, la partie symétrique de S peut toujours² être regardée comme représentative des situations d'indifférence. Considérons maintenant une liaison asymétrique $a S b$ et $\text{Non}(b S a)$ (rappelons que $\text{Non}(b S a)$ n'implique pas $a S b$). Elle a lieu lorsque les conditions justifient l'affirmation "a n'est pas pire que b" sans pour autant justifier "b n'est pas pire que a". Ces conditions ne sont pas nécessairement aptes à séparer $a I b$ des deux autres situations $a Q b$, $a P b$. C'est pourquoi, en présence de la liaison asymétrique considérée, on ne peut affirmer ni $a I b$, ni $\text{Non}(a I b)$: l'option entre indifférence et préférence reste indéterminée. Toutefois, s'il faut opter entre a et b , la modélisation montre que l'option est favorable à a .

5.2.1.1 Système de préférences dans ELECTRE I (cf. Roy (1968))

La méthode ELECTRE I est ancienne. Nous avons cependant une double raison de préciser ici le système de préférence qu'elle

¹ Cf. 1.4.1, tableau 1.4.2.

² Pour plus de précisions sur tous ces points, nous renvoyons à MMCAD, 7.1.3.3.

utilise¹. La première est d'ordre historique: c'est avec ce système qu'a été ouverte la voie des PAMC de type II. La seconde est d'ordre pédagogique: les formules d'agrégation qui définissent ce système sont parmi les plus simples et elles aident à comprendre les PAMC plus complexes présentées dans cette section et dans la suivante.

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrais-critères. Elles font intervenir, pour chacun d'eux:

- un coefficient d'importance $k_j > 0$ (cf. 3.1.2);
- un seuil de veto $v_j(g_j) > 0$ (cf. 3.1.3)².

Ce sont là des données "inter-critères" (cf. 3.1.6) que l'on retrouvera dans la plupart des PAMC dont il va être question dans la suite de ce chapitre. La façon de leur attribuer en pratique une valeur numérique (ou plusieurs en vue d'une analyse de robustesse) sera discutée aux 5.4.2 et 5.4.3.

Compte-tenu des hypothèses qui viennent d'être précisées, on peut proposer (en respectant les notations du 3.1.2):

$$C(b \text{ S } a) = \{j \in F : g_j(b) \geq g_j(a)\} \quad (\text{r.5.2.1})$$

$$\forall C \subset F, k[C] = \sum_{j \in C} k_j. \quad (\text{r.5.2.2})$$

Dans ELECTRE I, la proposition $b \text{ S } a$ est regardée comme valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

Condition de concordance :

¹ Rappelons qu'une forme plus générale a déjà été présentée au 3.2.2 c).

² Dans la version originelle de la méthode, ce seuil était constant.

$$\frac{k[C(b \text{ S } a)]}{k[F]} \geq s, \quad (r.5.2.3)$$

$$1/2 \leq s \leq 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]}.$$

Condition de non veto :

$$\forall j \in F, g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a). \quad (r.5.2.4)$$

La valeur s est ce que nous appellerons le **niveau exigé de concordance** (en abrégé, niveau de concordance) ¹. Pour des raisons tout-à-fait particulières, sa valeur peut être choisie hors de l'intervalle indiqué.

b) Commentaires

Les conditions (r.5.2.3) et (r.5.2.4) ne sont que la formulation, dans le cadre des hypothèses adoptées, des deux exigences suivantes :

EXIGENCE n° 1 : Pour valider la proposition $b \text{ S } a$, il est nécessaire qu'une majorité "suffisamment importante" de critères soit favorable à cette proposition,

EXIGENCE n° 2 : Pour valider la proposition $b \text{ S } a$, il est nécessaire que, parmi la minorité des critères qui s'opposent à cette proposition, aucun d'eux ne mette son veto,

qui reprennent des considérations présentées aux 3.1.2 et 3.1.3.

Il est facile de constater, les formules présentées plus haut ne reposant que sur l'importance relative des coalitions, que multiplier par une constante tous les coefficients d'importance ne change pas le système de préférences produit par ELECTRE I. Il n'est pas restrictif, en pratique, de supposer que les coefficients

¹ La dénomination "seuil" (au lieu de "niveau") de concordance a souvent été employée ; nous l'éviterons afin de ne pas créer de confusion avec d'autres seuils.

d'importance sont rationnels. Après multiplication par une constante, on peut donc les supposer tous entiers. Le coefficient k_j peut donc s'interpréter comme le nombre de voix attribuées au critère j dans le cadre d'une procédure de vote. Le niveau exigé de concordance s s'interprète alors comme un niveau de majorité exigé (majorité simple pour $s = 1/2$, majorité des deux tiers pour $s = 2/3$, etc.).

Dès que s dépasse la valeur s^* :

$$s^* = 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]},$$

la condition (r.5.2.3) équivaut à requérir l'unanimité, c'est-à-dire $C(b S a) = F$ (r.5.2.4) est donc automatiquement vérifiée). Dans ce cas, F se confond avec la dominance Δ_F . Il s'ensuit que :

$s > s^* \Rightarrow S$ transitive.

La relation S étant réflexive par construction, le s.r.p. (S, R) a alors une structure de préordre partiel (cf. 1.4.2 c)). Lorsqu'on abaisse le niveau exigé de concordance s , la relation S s'enrichit progressivement en ce sens que $b R a$ peut être remplacée par $b S a$ et que $b S a$ et $\text{Non}(a S b)$ peuvent être remplacées par $b S a$ et $a S b$. Corrélativement, des intransitivités peuvent apparaître. Elles peuvent revêtir l'une des deux formes suivantes :

$c S b, b S a, c R a,$

$c S b, b S a, a S c, \text{Non}(a S b), \text{Non}(b S c)$ et $\text{Non}(c S a)$.

La seconde correspond à une manifestation de ce que l'on appelle l'effet Condorcet. Pour en avoir une illustration, le lecteur pourra reprendre l'exemple numérique du tableau 3.2.2 avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $v_1 = v_2 = v_3 = 4$ et $s = 1/2$.

5.2.1.2 Système de préférences dans ELECTRE IS (cf. Roy et Skalka (1984))

La PAMC sur laquelle s'appuie ELECTRE IS est une

extension de la précédente visant à prendre en compte :

- d'éventuels seuils d'indifférence et de préférence non nuls pour certains des critères de F et, corrélativement,
- un renforcement de l'effet de veto lorsque l'importance de la coalition concordante décroît.

Comme c'était déjà le cas avec ELECTRE I, soulignons que, pour un critère quel qu'il soit, on peut toujours supprimer l'effet de veto : il suffit pour cela de donner une valeur assez grande au seuil de veto v_j .

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les n critères de F sont des pseudo-critères, chacun étant muni d'un coefficient d'importance et d'un seuil de veto. Tous les seuils (indifférence, préférence et veto) peuvent varier le long de l'échelle du critère. Notons, en conformité avec ce qui a été fait au 3.1.2 :

$$C(b \text{ S } a) = \{j \in F : g_j(b) + q_j[g_j(b)] \geq g_j(a)\} \quad (r.5.2.5)$$

$$C(a \text{ Q } b) = \{j \in F : g_j(b) + q_j[g_j(b)] < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j[g_j(b)]\} \quad (r.5.2.6)$$

$$k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)] = \sum_{j \in C(b \text{ S } a)} k_j + \sum_{j \in C(a \text{ Q } b)} \phi_j k_j$$

$$\text{avec : } \phi_j = \frac{g_j(b) + p_j[g_j(b)] - g_j(a)}{p_j[g_j(b)] - q_j[g_j(b)]} \quad (r.5.2.7)$$

Le coefficient ϕ_j décroît linéairement de 1 jusqu'à 0 lorsque $g_j(a)$ décrit l'intervalle $[g_j(b) + q_j(g_j(b)) ; g_j(b) + p_j(g_j(b))]$.

Dans ELECTRE IS, la proposition $b \text{ S } a$ est regardée comme **valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites** :

Condition de concordance :

$$c(b, a) = \frac{k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)]}{k[F]} \geq s, \quad (r.5.2.8)$$

$$1/2 \leq s \leq 1 - \frac{\min_{j \in F} k_j}{k[F]}.$$

Condition de non veto¹ :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a) + q_j[g_j(a)] w[s, c] \quad (r.5.2.9)$$

$$\text{avec } w[s, c] = \frac{1 - c(b, a) - [k_j/k[F]]}{1 - s - [k_j/k[F]]}.$$

Pour des raisons tout-à-fait particulières, la valeur s du niveau exigé de concordance peut être choisie hors de l'intervalle indiqué.

b) Commentaires

Pour faire comprendre ce qu'expriment les formules ci-dessus (en relation avec la généralisation annoncée), on comparera successivement (r.5.2.8) à (r.5.2.3) et (r.5.2.9) à (r.5.2.4).

La formule (r.5.2.8) fait intervenir la coalition $C(b \ S \ a)$ (tout comme (r.5.2.3)) ; si les seuils d'indifférence sont nuls, (r.5.2.5) coïncide avec (r.5.2.1) mais, à côté de cette première coalition, intervient également la coalition $C(a \ Q \ b)$. Celle-ci regroupe les critères (s'il en existe pour les actions considérées) qui, sans être en concordance avec la proposition $b \ S \ a$, ne sont pas pour autant en discordance avec elle. Pour de tels critères, la comparaison des performances $g_j(b)$ et $g_j(a)$ est ambiguë en ce sens qu'elle conduit à une hésitation entre l'acceptation claire et le rejet net de la proposition $b \ S \ a$. Il est donc normal de faire intervenir ces critères lorsqu'on cherche à apprécier l'importance de la sous-

¹ Cette condition suppose que $q_j(g_j(a)) \leq v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a))$, $\forall a \in A$ et $\forall j \in F$. Si tel n'était pas le cas, il faudrait remplacer $q_j(g_j(a))$ par $\min(q_j(g_j(a)) ; v_j(g_j(a)) - p_j(g_j(a)))$ dans la condition. Dans Roy et Skalka (1984) décrivant la version initiale d'ELECTRE IS, on a $w(s, c) = (1 - c(b, a))/(1 - s)$; les commentaires du b) ci-après montrent en toute rigueur que le terme $- k_j/k[F]$, qui a été ajouté au numérateur et au dénominateur, est nécessaire si l'on veut être parfaitement cohérent avec la définition du veto.

famille des critères favorables à l'acceptation de la proposition b S a (voir l'exigence n° 1 du 5.2.1.1 b) ; le problème ne se posait pas avec ELECTRE I puisque l'on raisonnait avec des vrais-critères). Voyons maintenant de quelle façon ELECTRE IS fait intervenir les critères en question.

Le critère j sort de C(b S a) pour entrer dans C(a Q b) (voir (r.5.2.6)) dès que $g_j(a) > g_j(b) + q_j[g_j(b)]$. Un raisonnement qualitatif élémentaire conduit à juger d'autant plus normal de prendre en compte le critère j pour apprécier l'importance de la sous-famille de critères considérée que $g_j(a)$ est plus proche de $g_j(b) + q_j[g_j(b)]$. Si l'on continue à faire croître $g_j(a)$, le critère j sort de C(a Q b) dès que $g_j(a) > g_j(b) + p_j[g_j(b)]$. A partir de ce moment, il doit cesser d'intervenir pour apprécier l'importance de la sous-famille considérée. Une façon de prendre en compte l'ambiguïté de la position des critères de C(a Q b) consiste à ne les faire intervenir dans le calcul d'importance que pour une fraction ϕ_j de leur coefficient d'importance propre k_j . Compte-tenu de ce qui précède, ϕ_j doit tendre vers 1 lorsque $g_j(a)$ tend, par valeur supérieure, vers $g_j(b) + q_j[g_j(b)]$ et décroître progressivement pour s'annuler lorsque $g_j(a) = g_j(b) + p_j[g_j(b)]$. Il en est bien ainsi avec (r.5.2.7). Certes, le choix d'une décroissance linéaire peut paraître arbitraire mais tout autre choix (et ceci est inhérent au caractère ambigu de la zone de préférence faible) serait au moins aussi arbitraire et forcément plus complexe.

Finalement, l'importance de la sous-famille des critères favorables à b S a est appréciée par $k[C(b S a), C(a Q b)]$ définie par (r.5.2.7) sur la base d'une première sommation identique à celle de (r.5.2.2) et d'une seconde fondée sur les considérations qui précèdent immédiatement.

Venons-en maintenant à la comparaison entre (r.5.2.9) et (r.5.2.4).

Considérons tout d'abord le cas $C(b S a) = F \setminus \{j\}$. On remarquera qu'il faut précisément se référer à ce cas pour définir le veto v_j (cf. 3.1.2). D'après (r.5.2.7), il vient :

$$k[C(b S a), C(a Q b)] = k[F] - k_j.$$

Dans ces conditions, on constate que, dans (r.5.2.9), le terme $w(s, c)$ s'annule et que, par conséquent, la condition de non veto cesse d'être satisfaite à partir du moment où :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a) \text{ avec } C(b \text{ S } a) = F \setminus \{j\}.$$

Cette dernière condition n'est autre que (r.3.1.6), laquelle coïncide avec (r.5.2.4) si $v_j[g_j(b)] = v_j$.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, dans ELECTRE IS, on a cherché à renforcer l'effet de veto lorsque l'importance de la coalition concordante décroît, c'est-à-dire devient inférieure à son maximum $k[F] - k_j$. Renforcer l'effet de veto signifie que le surclassement $b \text{ S } a$ peut être refusé avant même que $g_j(b) + v_j[g_j(b)]$ devienne inférieur à $g_j(a)$. Il en sera ainsi si l'on adopte une condition de non veto de la forme :

$$g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a) + W[s, c(b, a)]$$

$$\text{avec } c(b, a) = \frac{k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)]}{k[F]}.$$

La quantité $W[s, c]$ (destinée à renforcer l'effet de veto) doit, d'après ce qui précède, croître depuis 0 jusqu'à un maximum w_m lorsque c décroît de son maximum $1 - k_j/k[F]$ jusqu'à s (valeur en-dessous de laquelle la condition de concordance n'étant plus satisfaite, on cesse de s'intéresser à la condition de non veto). Pour des raisons de simplicité, nous avons adopté un mode de décroissance linéaire, ce qui donne :

$$W[s, c] = w_m \cdot \frac{1 - c(b, a) - k_j/k[F]}{1 - s - k_j/k[F]} = w_m \cdot w(s, c).$$

Le terme $W[s, c]$, qui concrétise l'effet de renforcement du veto, venant s'ajouter à $g_j(a)$, il nous a paru naturel de lier son maximum w_m à la plus ou moins grande imprécision qui entache la valeur de la performance $g_j(a)$. Afin de limiter l'impact de cet effet de renforcement, nous avons posé $w_m = q_j[g_j(a)]$ mais on aurait pu choisir une valeur plus élevée, pourvu toutefois qu'elle reste inférieure à $v_j[g_j(b)] - p_j[g_j(b)]$ (il serait en effet incohérent que le veto provienne d'un critère non discordant ; ceci explique la note de bas de page sur la condition de non veto (r.5.2.9)).

Soulignons, pour achever ces commentaires, que $s > s^*$ conduit à une relation de surclassement S^* qui ne peut être validée que si aucun critère n'est discordant. C'est dire que les valeurs attribuées aux seuils de veto ne jouent plus aucun rôle. Lorsque S ne renferme que des quasi-critères, on a $S^* = S_\Delta$ (cf. 3.1.4). Dans ces conditions, à moins que S ne renferme que des vrai-critères, S^* n'est généralement pas transitive. Quelle que soit la valeur donnée à s , les intransitivités peuvent ici encore revêtir les deux formes décrites au 5.2.1.1 b) à propos d'ELECTRE I. Précisons enfin que lorsque $b S a$ est validée pour une valeur s_0 du niveau de concordance, alors $b S a$ est forcément validée pour toute valeur s supérieure à s_0 .

5.2.1.3 Autres systèmes de préférences

On peut bien évidemment imaginer des PAMC autres qu'ELECTRE I ou ELECTRE IS qui conduisent à un système de préférences de type (S, R) ou (P, I, R) . Nous nous bornerons ici à citer, sans en donner une formulation précise, deux procédures intéressantes aboutissant à des s.r.p. pouvant être rangés dans le cadre étudié.

La première, proposée par Roachat, a déjà été introduite aux 3.2.2 b) et c). Le système de préférences est de type (P, I, R) (ou (P, I) en l'absence de condition de non veto). Nous reviendrons sur le système de préférences ainsi bâti au 5.2.2.1 pour montrer que la relation d'indifférence ainsi bâtie recouvre aussi des situations d'incomparabilité (il est donc plus correct de remplacer dans ces systèmes I par $\sim$). La procédure ORESTE, proposée par Roubens (1982), peut également être rangée dans ce cadre. Dans sa version initiale, elle s'applique à une famille F ne comprenant que des vrai-critères mais, contrairement à ELECTRE I, elle ne fait pas appel à des coefficients d'importance k_j : l'importance relative accordée à chaque critère est néanmoins prise en compte sur la base d'un préordre complet (simple rangement des critères par ordre d'importance décroissante). Enfin, une condition de non veto peut être introduite (cf. Pastijn et Leysen (1989)). Soulignons que ORESTE diffère d'une PAMC lexicographique (cf. 3.2.2 a)) bien que les conditions d'application soient identiques.

5.2.2 Systèmes de type $(P, \sim)$ et $(P, \sim, R)$

Les systèmes de préférences dont il va être question ici sont le fruit de PAMC qui cherchent avant tout à séparer les situations de préférence stricte des autres. Dans ces procédures, les autres situations en question sont l'indifférence et l'incomparabilité

(conçues avant tout pour des vrai-critères ou des quasi-critères, ces procédures ignorent les situations de préférence faible). Définir une procédure de ce type équivaut donc à formuler des conditions faisant intervenir (comme au 5.2.1) un couple quelconque de vecteurs de performances ($g(b)$, $g(a)$), conditions qui, dès lors qu'elles sont satisfaites, valident l'affirmation $b P a$.

Etant donné une paire d'actions $\{a, b\}$, il se peut que les conditions formulées ne soient vérifiées ni par le couple (a, b) , ni par le couple (b, a) . Cela valide donc l'une des deux affirmations $a I b$ ou $a R b$ sans que l'on puisse pour autant (hors de toute considération additionnelle) savoir laquelle des deux.

Dans ces conditions, P étant asymétrique, trois configurations seulement sont possibles ¹ (et non plus quatre comme précédemment, voir figure 5.2.1) :

$$a P b, b P a, a \sim b.$$

Lorsque les conditions requises ne valident ni $a P b$ ni $b P a$, il se peut que la façon dont ces conditions sont violées soit incompatible avec $a I b$. En explicitant de tels cas, on peut valider clairement des situations d'incomparabilité. Toutefois, la relation R qui se trouve ainsi définie ne permet pas, dans les procédures dont il va être question, d'affirmer que :

$$\text{Non}(a P b), \text{Non}(b P a) \text{ et } \text{Non}(a R b) \Rightarrow a I b.$$

C'est pourquoi les systèmes ainsi construits, en isolant certains cas d'incomparabilité, sont de type $(P, \sim, R)$ et non de type (P, I, R) .

¹ Rappelons que $\sim$ désigne précisément la relation de non préférence définie par $\text{Non}(a \succ b)$ et $\text{Non}(b \succ a)$. En l'absence de préférence faible, ceci équivaut à $\text{Non}(a P b)$ et $\text{Non}(b P a)$, cf. 1.4.1.

5.2.2.1 Systèmes de préférences dans TACTIC (cf. Vansnick (1986b))

a) Formules ¹

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrais-critères ou des quasi-critères. Tout comme les méthodes ELECTRE, elles font intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$. Nous distinguerons deux cas :

- aucun critère ne peut mettre son veto à la préférence stricte : le système obtenu est alors du type $(P, \sim)$;
- pour un critère au moins, on introduit un seuil de veto v_j (défini ici à la façon du 3.1.3 mais par référence à la relation P et non à la relation S) : le système obtenu est alors du type $(P, \sim, R)$.

Dans le cadre des hypothèses ci-dessus et conformément aux notations du 3.1.2, posons :

$$C(b P a) = \{j \in F : g_j(b) > g_j(a) + q_j(g_j(a))\} \quad (r.5.2.10)$$

et, comme dans ELECTRE I (cf. (r.5.2.2)) :

$$\forall C \subset F : k[C] = \sum_{j \in C} k_j$$

Dans le système de type $(P, \sim)$ de TACTIC, la proposition $b P a$ est regardée comme valide si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

Condition de concordance :

$$k[C(b P a)] > \rho \cdot k[C(a P b)], \quad (r.5.2.11)$$

¹ TACTIC a essentiellement été développée en tant que PAMC. Cette méthode n'ayant pas donné lieu à une procédure d'exploitation spécifique, sa mise en œuvre dans le cadre d'une problématique particulière ne fera pas l'objet d'un paragraphe au chapitre 6.

$$1 \leq \rho \leq \frac{k[F]}{\min_{j \in F} k_j} - 1.$$

Le coefficient ρ sera encore appelé niveau exigé de concordance. Sa valeur peut ici encore être choisie, pour des raisons très particulières, hors de l'intervalle indiqué.

Dans le système $(P, \sim, R)$ de TACTIC, l'affirmation $b P a$ n'est regardée comme validée que si, en plus de la condition de concordance (r.5.2.11), la condition de non veto ci-après (identique à celle d'ELECTRE I, cf. (r.5.2.4)) est satisfaite :

Condition de non veto :

$$\forall j \in F, g_j(b) + v_j[g_j(b)] \geq g_j(a).$$

S'il existe un critère j qui viole cette condition alors que (r.5.2.11) est vérifiée, on considère que l'incomparabilité $b R a$ est validée. Il s'ensuit que l'on a $b \sim a$ si et seulement si (r.5.2.11) est en défaut aussi bien avec le couple (b, a) qu'avec le couple (a, b) .

b) Commentaires

La condition de concordance (r.5.2.11) proposée par Vansnick (1986b) pour fonder le système de préférences dans TACTIC diffère de celle (r.5.2.3) servant à fonder le système de préférences dans ELECTRE I sur deux points (du moins en apparence) :

Première différence : La proposition que l'on cherche à valider n'est plus $b S a$ mais $b P a$.

Seconde différence : Pour valider la proposition étudiée, on ne prend plus appui sur l'existence d'une majorité suffisamment importante favorable à cette proposition ¹ mais sur l'exigence n° 3 ci-après :

¹ Cf. exigence n° 1 au 5.2.1.1 b).

EXIGENCE n° 3 : Pour valider une proposition ($b P a$, $b S a$, ...), il est nécessaire d'avoir un rapport de force (ou d'importance) suffisamment élevé entre d'une part les critères qui sont pour la proposition étudiée et, d'autre part, ceux qui sont contre, ces derniers étant définis comme étant ceux qui sont pour une proposition contradictoire (laquelle peut être distincte de la négation de la proposition étudiée).

Les reformulations qui suivent de (r.5.2.3) et (r.5.2.11) vont nous conduire à montrer que la seconde différence est plus formelle que réelle.

Lorsque :

- F ne comporte que des quasi-critères et
- $k[C]$ est défini par (r.5.2.2),

il vient, $\forall a, b \in A$:

$$k[F] = k[C(b P a)] + k[C(b I a)] + k[C(a P b)].$$

Prenant appui sur cette égalité, il est facile de prouver que la condition de concordance (r.5.2.3) peut être réécrite comme suit :

$$k[C(b S a)] \geq \frac{s}{1-s} k[C(a P b)]. \quad (r.5.2.12)$$

Ainsi réécrite, la condition de concordance d'ELECTRE I peut être vue comme une mise en forme de l'exigence n° 3 (les critères contre $b S a$ étant ici ceux qui sont pour la négation de cette proposition).

De façon symétrique, il est facile de montrer que (r.5.2.11) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{k[C(b P a)]}{k[F] - k[C(b I a)]} > \rho/(1 + \rho). \quad (r.5.2.13)$$

Ainsi reformulée, la condition de concordance de TACTIC peut être vue comme une mise en forme de l'exigence n° 1 (cf. 5.2.1.1 b)) : la majorité que doivent constituer les critères favorables à $b P a$ devant ici être calculée compte non tenu des critères pour lesquels il y a indifférence entre b et a (autrement dit, dans la procédure de vote, ces derniers critères correspondent à des cas d'abstention ou de votes nuls). Faisons remarquer que cette modification par rapport à ELECTRE I du mode de définition de la majorité n'aurait pas eu lieu

si, au second membre de (r.5.2.11), on avait fait intervenir, à la place de $a P b$, la négation de la proposition étudiée (c'est-à-dire $a S b$).

On peut donc dire que, dans TACTIC, le système de préférences consiste à valider la proposition $b P a$ sur la base d'une exigence de même nature que celle (exigence n° 1 du 5.2.1.1 b)) servant, dans ELECTRE I, à valider $b P a$. Le fait que la validation porte sur la préférence stricte et non sur le surclassement constitue donc la différence essentielle entre les PAMC d'ELECTRE I et de TACTIC. En particulier, cela rend difficile d'isoler, dans cette dernière, les situations d'incomparabilité des situations d'indifférence.

Dès que ρ atteint la valeur ρ^* :

$$\rho^* = \frac{k[F]}{\min_{j \in F} k_j} - 1 = \frac{s^*}{1 - s^*},$$

la condition (r.5.2.11) équivaut à requérir l'absence de "contre", c'est-à-dire $C(a P b) = \emptyset$ (la condition de non veto (r.5.2.4) est alors automatiquement vérifiée). Dans $(P, \sim)$ comme dans $(P, \sim, R)$, lorsque $\rho > \rho^*$, il vient :

$$\begin{aligned} b P a &\Leftrightarrow g_j(b) > g_j(a) - q_j(g_j(a)), \forall j \in F \text{ et} \\ &\exists h \in F \text{ tel que } g_h(b) > g_h(a) + q_h(g_h(a)). \end{aligned}$$

Lorsqu'on abaisse le niveau exigé de concordance ρ , la relation P s'enrichit en ce sens que $b \sim a$ peut être remplacée soit par $b P a$, soit par $a P b$.

Si tous les seuils q_j sont nuls, la relation P est transitive pour $\rho > \rho^*$. Lorsqu'on abaisse ρ , des intransitivités de deux formes peuvent apparaître :

- $c P b$, $b P a$, $c \sim a$ (ou $c R a$) ;
- $c P b$, $b P a$, $a P c$.

Cette seconde forme a déjà été illustrée pour $\rho = 1$ par l'exemple numérique du tableau 3.2.2 avec $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Le lecteur a probablement remarqué qu'en posant $\rho = 1$ dans les formules du a), on retrouve tout d'abord, avec le système de type $(P, \sim)$, la procédure concordance élémentaire de type Rochat (cf. 3.2.2 b)) ; ensuite, avec le système de type $(P, \sim, R)$, la procédure concordance-discordance élémentaire de type Rochat (cf. 3.2.2 c)). Toutefois, dans les deux paragraphes auxquels nous renvoyons, nous avons remplacé la relation de non préférence $\sim$ par la relation d'indifférence I (cela en vue de nous conformer à la présentation de Rochat). En fait, aussi bien pour $\rho = 1$ que pour $\rho > 1$, la relation définie au a) ci-dessus (en l'absence ou en présence de veto, ceci importe peu) recouvre indistinctement des situations d'indifférence et d'incomparabilité. L'exemple suivant suffit à le bien montrer.

Supposons que $n = 2h$ et que, pour deux actions b et a , on ait :

$$\begin{aligned} g_j(b) - g_j(a) &= u_j > q_j \text{ pour } j = 1, \dots, h, \\ g_j(a) - g_j(b) &= w_j > q_j \text{ pour } j = h+1, \dots, 2h. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} k[C(b P a)] &= k_1 + \dots + k_h, \\ k[C(a P b)] &= k_{h+1} + \dots + k_{2h}. \end{aligned}$$

Supposons enfin que, compte-tenu de la valeur de ρ choisie, (r.5.2.11) ne soit vérifiée ni par le couple (b, a) , ni par le couple (a, b) . Si les écarts u_j et w_j sont tous de faible ampleur, même dans une procédure de type II qui ne se veut pas compensatoire, l'affirmation $b I a$ peut paraître justifiée. Il en va tout autrement lorsque certains des écarts u_j et/ou w_j atteignent des valeurs élevées bien qu'inférieures à un éventuel veto : la seule affirmation possible est alors $b R a$ (à moins d'introduire une information inter-critère plus riche et de remettre également en cause la manière de valider P).

5.2.2.2 Systèmes de préférences dans les procédures d'écrémage

Lorsque l'ensemble A contient un grand nombre d'actions (plusieurs centaines par exemple), on cherche généralement, avant l'application d'une PAMC plus sophistiquée, à éliminer de A toutes les actions qui sont manifestement mauvaises ou inadéquates (à propos desquelles il semble inutile de vouloir construire un effort d'analyse plus poussée). On a alors recours à des procédu-

res dites d'écrémage ¹. Ces procédures visent à opérer une dichotomie de $A : A = B \cup C$ ($B \cap C = \emptyset$) avec :

$b \in B \Rightarrow b$ n'est pas éliminable à partir des critères de F ,
 $c \in C \Rightarrow c$ est éliminable à partir des critères de F .

De telles procédures prennent donc appui (de façon non nécessairement explicite mais il importe néanmoins d'en tenir compte lorsqu'on conçoit ² F) sur un système de préférences de type $(P, \sim)$ défini par :

$b \in B$ et $c \in C \Leftrightarrow b P c$,
 $b \in B$ et $b' \in B \Rightarrow b \sim b'$,
 $c \in C$ et $c' \in C \Rightarrow c \sim c'$.

Ces procédures, en raison du désir de simplicité qui est à leur origine, ne sont pas fondées sur une comparaison par paires ³ mais sur une comparaison des performances des actions à des niveaux d'aspiration ⁴.

Notons g_j^{asp} le niveau d'aspiration associé au critère j . Il est souvent difficile d'attribuer une valeur numérique à un tel niveau sans tenir compte de la manière dont il est combiné au niveau d'aspiration des critères autres que j pour définir le système de préférences $(P, \sim)$. Deux modes de combinaisons extrêmes, qualifiés de conjonctifs et disjonctifs, sont couramment pris en considération. Dans le mode conjonctif, $b \in B$ si et seulement si la performance de b sur chaque critère atteint ou dépasse le niveau d'aspiration. Dans le mode disjonctif, il suffit que, sur un critère, la performance de b atteigne ou

¹ En anglais "screening".

² Les conditions qui suivent autorisent en particulier l'emploi de critères assez frustes permettant un calcul des performances à peu de frais, ce qui importe eu égard au grand nombre d'actions à traiter.

³ On verra au 6.1.2 la difficulté qu'il y a à fonder une procédure d'écrémage simple sur la base de comparaisons par paires.

⁴ Cela dans la ligne des travaux de Simon sur le concept de "satisfecum" et de "rationalité limitée" (cf. Simon (1955)) ; voir aussi Jacquet-Lagrèze (1981). Ces niveaux d'aspiration ne sont pas sans liens avec les niveaux d'exigence minimale que nous introduirons au 7.2.

dépasse le niveau d'aspiration pour que l'on pose $b \in B$. Dans ces modes de comparaison, la relation P est donc telle que :

$$\text{Mode conjonctif : } b P c \Leftrightarrow \begin{aligned} &\forall j \in F : g_j(b) \geq g_j^{asp} \\ &\exists j \in F : g_j(c) < g_j^{asp} \end{aligned} \quad (r.5.2.14)$$

$$\text{Mode disjonctif : } b P c \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists j \in F : g_j(b) \geq g_j^{asp} \\ &\forall j \in F : g_j(c) < g_j^{asp} \end{aligned} \quad (r.5.2.15)$$

Faisons tout d'abord observer que les systèmes de préférences définis par (r.5.2.14) et (r.5.2.15) mettent en défaut l'axiome de cohésion (cf. 2.2.2) auquel doit normalement satisfaire une famille cohérente F . Cela souligne à nouveau le fait que F doit être conçue par référence au système de type $(P, \sim)$ sur lequel s'appuie la procédure d'écramage.

Faisons ensuite remarquer que, dans les deux modes extrêmes considérés, le niveau d'aspiration g_j^{asp} opère de façon isolée, c'est-à-dire indépendamment des performances selon les critères autres que j . On peut contourner cette difficulté en définissant des systèmes de niveaux d'aspiration g_j^{asp} pour diverses sous-familles $J \subset F$ et non pas, comme nous l'avons fait, uniquement pour les sous-familles réduites à un unique critère. Toute une gamme de possibilités s'offrent alors selon que l'on choisit le mode conjonctif ou le mode disjonctif au niveau d'une part de chaque sous-famille, d'autre part de l'ensemble des sous-familles (cf. Fishburn (1978)). Ce faisant, on perd la simplicité recherchée et on ne facilite pas pour autant le raisonnement permettant de choisir, en pratique, les valeurs à attribuer aux niveaux d'aspiration.

Soulignons enfin que rien n'oblige à considérer les niveaux d'aspiration comme des données dont la valeur est fixée préalablement à l'application de la procédure d'écramage. Ces procédures gagnent au contraire de l'intérêt lorsqu'on raisonne la valeur à donner aux niveaux d'aspiration dans le cadre d'une approche opérationnelle interactive (cf. 7.1), comme c'est par exemple le cas dans la méthode PRIAM (cf. 7.3.2 f)).

5.3 PROCÉDURES ABOUTISSANT À PLUSIEURS SYSTÈMES DE PRÉFÉRENCES

Les procédures d'agrégation dont il va être question font intervenir, comme au 5.2, des conditions à satisfaire pour valider des propositions telles que $b S a$ ou $b P a$ mais cette validation ne se fera plus en termes de vrai ou faux. Elle va être raisonnée par référence à une hiérarchie de crédibilité. Les divers niveaux qui caractérisent cette hiérarchie peuvent être imposés a priori : à chacun d'eux est associé un système de préférences d'autant plus

pauvre en incomparabilité que le niveau de crédibilité s'abaisse (cf. 5.3.1). On peut, au contraire (cf. 5.3.2), chercher à apprécier directement, sur une échelle allant de 0 à 1, le niveau de crédibilité avec lequel l'affirmation en question est validée.

5.3.1 Cas où le nombre des systèmes est imposé

Le niveau exigé de concordance, s dans ELECTRE I ou IS, tout comme p dans TACTIC, est un paramètre qui, dans les procédures présentées au 5.2, recevait une valeur fixée (même si, ensuite, on peut être amené à la faire varier dans une analyse de robustesse). On peut définir une hiérarchie de crédibilité en fixant non plus une seule valeur mais une séquence telle que :

$$s^1 > s^2 > \dots > s^h.$$

En reportant successivement ces h valeurs dans une condition de concordance ((r.5.2.3) ou (r.5.2.8)), on obtient, après prise en compte des conditions de non veto correspondantes ((r.5.2.4) ou (r.5.2.9)), une séquence de h systèmes de préférences (de type ELECTRE I ou ELECTRE IS ¹) que l'on qualifiera d'**emboîtés** pour traduire le fait que (avec des notations évidentes) :

$$S^1 \subset S^2 \subset \dots \subset S^h.$$

On a vu en effet au 5.2.1 que, lorsque s diminue, la relation S ne peut que s'enrichir. La première des procédures dont il va être question ci-après découle directement des considérations précédentes.

Faire varier (comme dans ELECTRE II, cf. 5.3.1.1 ci-après) un niveau exigé de concordance n'est pas la seule façon d'introduire une hiérarchie de crédibilité. ELECTRE IV (cf. 5.3.1.2) fournira l'occasion d'en présenter une autre. Précisons dès à présent que cette dernière procédure se distingue aussi des autres par le fait que, sans prendre appui pour autant sur une hypothèse

¹ Faisons observer que tout ce qui précède se transpose intégralement à TACTIC en changeant s en p et S en P .

d'égale importance des n critères, elle ne fait pas intervenir de coefficients du type k_j pour codifier cette importance ¹.

5.3.1.1 Systèmes de préférences dans ELECTRE II (cf. Roy et Bertier (1973))

Nous citons cette procédure en raison de sa simplicité et aussi pour des raisons historiques. Ce fut la première où l'aide à la décision prenait appui sur une séquence de systèmes de préférences emboîtés. Nous la présentons ci-après dans sa forme originelle bien que celle-ci demanderait à être révisée de façon à prendre en compte des pseudo-critères et à moduler l'effet de veto en fonction de l'importance plus ou moins grande de la coalition concordante. Signalons que, sous le nom d'ELECCALC, Nadeau et al. (1991) et Kiss et al. (1992) ont aménagé et enrichi ELECTRE II en vue de rendre cette méthode particulièrement conviviale.

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F ne comporte que des vrais critères. Elles font intervenir, pour chacun d'eux :

- un coefficient d'importance $k_j > 0$;
- deux seuils de veto (constants ; on peut aménager simplement les formules ci-après pour prendre en compte des seuils de veto variant le long de l'échelle du critère) : $v_j^1 \leq v_j^2$, v_j^1 étant fixé de telle sorte que, lorsqu'il autorise le surclassement, celui-ci apparaisse comme absolument indiscutable ; le seuil v_j^2 vise à exploiter la marge d'indétermination de cette valeur du veto pour en atténuer l'effet restrictif.

La séquence d'un système de préférences emboîté est ici de la forme (S^i, R^i) , $i \in \{1, 2\}$ et $S^1 \subset S^2$, $R^1 \supset R^2$. La relation S^1 est le **surclassement fort** (abréviation de fortement crédible) alors

¹ Leclercq (1984), avec MELCHIOR, a proposé une généralisation d'ELECTRE IV prenant en compte une relation d'importance T définie sur F : $g_i T g_j$ signifie que le critère g_i est au moins aussi important que le critère g_j .

que la relation S^2 est le **surclassement faible** (abréviation de faiblement crédible). Pour bâtir ces relations, on fait intervenir deux niveaux exigés de concordance $s^1 > s^2$ (avec $1/2 \leq s^1 \leq 1 - \min k/k[F]$).

je P

Dans ELECTRE II, la proposition $b S^1 a$ est regardée comme valide si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

Condition de concordance :

$$\frac{k[C(b S a)]}{k[F]} \geq s^1 \text{ et } k[C(b S a)] \geq k[C(a S b)].$$

Condition de non veto : $\forall j \in F, g_j(b) + v_j^1 \geq g_j(a).$

b) Commentaires

Il est important d'observer que la définition du surclassement fort fait intervenir conjointement le niveau de concordance le plus élevé et les conditions de non veto les plus difficiles à satisfaire. C'est donc à la suite d'un double affaiblissement de la crédibilité que $b S^2 a$ peut être validée alors que $b S^1 a$ ne l'est pas.

Le lecteur aura sans doute remarqué que, si la condition de non veto est identique à celle d'ELECTRE I (cf. (r.5.2.4)), la condition de concordance diffère de (r.5.2.3) puisqu'elle requiert en plus que : $k[C(b S a)] \geq k[C(a S b)]$. Cette inégalité additionnelle a été introduite afin de n'aboutir à la configuration $b S^1 a$ et $a S^1 b$ (cas d'indifférence) que si $k[C(b P a)] = k[C(a P b)]$ ¹. Le fait d'avoir par exemple $k[C(b P a)] > k[C(a P b)]$ peut être pris comme argument pour justifier l'abandon de la symétrie, $b S^1 a$ paraissant plus solidement établie que $a S^1 b$. On remarquera que si la présence d'un veto vient interdire $b S^1 a$ alors qu'aucun veto n'interdirait $a S^1 b$, ce dernier surclassement n'en sera pas moins refusé en raison de l'inégalité additionnelle, laquelle conduira dans ce cas à $a R^1 b$ (et c'est là un effet pervers de cette façon de formuler la condition de concordance).

¹ Ce désir de réduire le nombre de paires d'actions à propos desquelles il y a surclassement dans les deux sens provient de la façon dont ELECTRE II exploite ensuite la séquence des deux s.r.p. emboîtés dans le cadre d'une problématique γ . En-dehors d'un tel désir, l'introduction de l'inégalité additionnelle ne paraît guère justifiée.

Précisons enfin que rien ne s'oppose à ce que la condition de concordance du a) ci-dessus (avec ou sans aménagement de l'inégalité additionnelle) soit formulée sur la base de (r.5.2.8) (au lieu de (r.5.2.3)) afin de prendre en compte des pseudo-critères. La condition de non veto peut également être formulée à partir de (r.5.2.9) afin de moduler l'effet de veto en fonction de $k[C(b \ S \ a)]$.

5.3.1.2 Systèmes de préférences dans ELECTRE IV

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où F comporte des pseudo-critères ; à chacun des critères de F, on peut en outre associer un seuil de veto (cf. 3.1.3).

A la différence des procédures précédentes, on ne fait pas intervenir ici de coefficients d'importance k_j . La prise en compte de seuils de veto (lesquels n'interviennent toutefois qu'au niveau le plus bas de la hiérarchie de crédibilité) constitue donc le seul moyen pour différencier le rôle (plus ou moins important) dévolu à chaque critère dans l'agrégation.

La séquence de systèmes de préférences emboîtés est de la forme (S^i, R^i) , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (les relations S^i étant des relations de surclassement à quelques nuances près indiquées au b) ci-après). Chacune des relations S^i est en fait une extension de la dominance Δ_F fondée sur des hypothèses du type de celles introduites au 3.1.4 c) et d) pour asseoir $S_{\lambda, Q}$ (relation que l'on retrouve ci-après sous la notation S^3).

Les notations utilisées ci-après sont celles des 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4. Dans le même esprit, introduisons, relativement à chaque paire d'actions (a, b), la coalition :

$$C(a \ S_{\lambda} \ b) = \{j \in F : g_j(a) > g_j(b)\}. \quad (r.5.3.1)$$

Introduisons deux nouvelles extensions de la dominance : la **quasi-dominance** notée Δ_q et la **dominance canonique** notée Δ_c . Par définition :

$$b \ \Delta_q \ a \Leftrightarrow C(a > b) = \emptyset, \text{ card}(b \ S_{\lambda} \ a) > \text{card}(a \ S_{\lambda} \ b), \quad (r.5.3.2)$$

$$b \ \Delta_c \ a \Leftrightarrow C(a \ P \ b) = \emptyset, \text{ card}(b \ P \ a) \geq \text{card}(a \ Q \ b) \text{ et} \\ \text{card}(b \ S_{\lambda} \ a) > \text{card}(a \ S_{\lambda} \ b). \quad (r.5.3.3)$$

Introduisons enfin une dernière relation notée (dans l'esprit du 3.1.4) $S_{\Delta V}$ que nous appellerons le ΔV -surclassement. Par définition :

$$\begin{aligned} b S_{\Delta V} a \Leftrightarrow & \text{card}(C(a P b)) = 0 \text{ ou} \\ & [\text{card}(C(a P b)) = 1 \text{ et} \\ & \text{card}(C(b P a)) \geq n/2 \text{ et} \\ & g_j(b) + v_j(g_j(b)) \geq g_j(a), \forall j \in F]. \end{aligned} \quad (r.5.3.4)$$

La séquence de systèmes de préférences emboîtés à l'origine d'ELECTRE IV¹ consiste à poser :

$$S^1 = \Delta_q, S^2 = \Delta_c, S^3 = S_{\Delta Q}, S^4 = S_{\Delta P}, S^5 = S_{\Delta V} \quad (r.5.3.5)$$

où $S_{\Delta Q}$ et $S_{\Delta P}$ sont respectivement définis par (r.3.1.14) et (r.3.1.15) (cf. fin du 3.1.4). Une variante consisterait à changer S^1 et S^2 comme suit :

$$S^1 = S_{\Delta}, S^2 = S_{PQ} \quad (r.5.3.6)$$

(cf. (r.3.1.10) et (r.3.1.13)).

b) Commentaires

Commençons par observer que chacune des relations prises en considération dans ELECTRE IV (cf. (r.5.3.5) et (r.5.3.10)) repose sur la prise en compte simultanée d'une condition de concordance et d'une condition limitant la discordance. Cette dernière n'est autre que (toujours relativement à $b S a$) :

- pour S^1 : $C(a \succ b) = \emptyset$;
- pour S^2, S^3, S^4 : $C(a P b) = \emptyset$;
- pour S^5 : $C(a V b) = \emptyset, \text{card}(a P b) \leq 1$ avec :
 $C(a V b) = \{j \in F : g_j(b) + v_j[g_j(b)] < g_j(a)\}.$

Ce sont là des conditions très limitatives. Bien qu'elles le soient de moins en moins lorsque i croît, celle de S^5 reste malgré tout plus exigeante que celle d'ELECTRE I, II ou III du fait de la condition $\text{card}(a P b) \leq 1$.

¹ Cf. Roy et Hugonnard (1982a).

Pour comprendre ce que signifie $b S^i a$, il faut maintenant analyser, pour chacune des relations, la relation de concordance dans le cadre de la limitation de la discordance qui vient d'être précisée. Comme on va le mettre en évidence, le passage de S^i à S^{i+1} s'opère par relaxation de ces conditions, ce qui prouve le caractère emboîté des systèmes de préférences successifs ($S^i \subset S^{i+1}$).

La relation S^1 (la plus pauvre dans (r.5.3.5)) vérifie :

$$\Delta_F \subset S^1 = \Delta_q \subset S_\Delta.$$

La condition de concordance $\text{card}(b S_q a) > \text{card}(a S_q a)$ est automatiquement vérifiée si $b \Delta_F a$ mais elle ne l'est pas nécessairement si $b S_\Delta a$. C'est précisément le fait que cette condition de concordance soit ou ne soit pas vérifiée qui crée la différence entre Δ_q et S_Δ (puisque $b S_\Delta a \Leftrightarrow C(a \succ b) = \emptyset$). Cette condition de concordance est une façon de prendre en compte ce que nous avons appelé (au 2.2.2 d)) des effets de cumul en les faisant intervenir pour refuser $b \Delta_q a$ alors que l'on a $b S_\Delta a$ (et $\text{Non}(b \Delta_F a)$). Il s'ensuit que (tout comme Δ_F) Δ_q n'est pas une relation de surclassement vérifiant la seconde partie de l'axiome 2.2.2. En effet, cette partie de l'axiome s'oppose (comme nous l'avons montré au 2.2.2 d)) à la prise en compte d'effets de cumul. En parlant de "quasi-dominance", on souligne cet écart vis-à-vis d'un surclassement conforme aux axiomes.

On passe de Δ_q à Δ_c :

- en affaiblissant la condition limitant la discordance puisque $C(a Q b)$ peut ne plus être vide
- mais en imposant à la coalition $C(a Q b)$ de ne pas contenir plus de critères que n'en a la coalition $C(b P a)$ (condition dont les fondements ont été analysés au 3.1.4 à propos de S_{PQ}).

Il s'ensuit que $\Delta_c \subset S_{PQ}$, le fait que l'on puisse avoir $b S_{PQ} a$ et $\text{Non}(b \Delta_c a)$ ne pouvant provenir que du non respect de $\text{card}(b S_q a) > \text{card}(a S_q b)$. La présence de cette dernière condition dans la définition de Δ_c explique que $S_\Delta \not\subset \Delta_c$ et que l'on parle encore de dominance (canonique) pour marquer qu'il ne s'agit pas d'un surclassement vérifiant la seconde partie de l'axiome 2.2.2.

Si l'on ne souhaite pas prendre en compte d'effets de cumul et avoir affaire à une séquence de relations de surclassement (conformes à l'axiome 2.2.2), il suffit de supprimer, dans les définitions de S^1 et S^2 , la condition $\text{card}(b S_q a) > \text{card}(a S_q b)$, ce qui conduit précisément à la variante (r.5.3.6).

On passe de S_{PQ} à $S_{>Q}$ (cf. 3.1.4 d)) en limitant le nombre de critères de la coalition $C(a \ Q \ b)$ non plus par celui de la coalition $C(b \ P \ a)$ mais par celui de la coalition $C(b \succ a)$. C'est ensuite en supprimant totalement ce type de limitations que l'on passe de $S_{>Q}$ à S_{AP} .

Enfin, la condition $C(a \ P \ b) = \emptyset$ (limitant la discordance dans S^2, S^3, S^4) est affaiblie pour passer à S^5 . On peut avoir $b \ S_{AV} \ a$ et $\text{Non}(b \ S_{AP} \ a)$ si un seul critère discordant s'oppose à cette dernière affirmation. Toutefois, pour avoir $b \ S_{AV} \ a$, il faut en outre :

- que cet unique critère discordant ne mette pas son veto au surclassement ;
- que la coalition $C(b \ P \ a)$ réunisse au moins la moitié des critères.

Achevons ce paragraphe en apportant quelques éléments de réponse à la question suivante : comment apprécier les hypothèses implicites sur l'importance relative des critères que renferme la définition de chaque relation S^i ? Rappelons (cf. 3.2.3) que la notion d'importance relative d'un critère g_j au sein d'une famille F n'a de sens que par référence à une procédure d'agrégation multicritère bien définie. Chacun des systèmes de préférences (S^i, R^i) est le fruit d'une PAMC explicite. Cette dernière (au moins pour $i = 1, 2, 3, 4$) ne fait intervenir aucune donnée inter-critère venant conférer un rôle plus ou moins important à tel ou tel critère. Est-ce à dire que tous les critères ont la même importance ?

Le fait de traiter tous les critères de la même façon dans S_A comme dans S_{AP} ne peut, en aucune manière, laisser croire que les relations de surclassement prennent appui sur une hypothèse (implicite) d'égale importance des n critères. En ne différenciant pas l'importance du rôle dévolu à chacun, on parvient à fonder l'affirmation du surclassement de telle sorte qu'il demeure valide quelle que soit l'importance accordée par tel ou tel acteur aux différents critères. Il n'y a donc, dans la définition de ces deux relations, aucune hypothèse implicite (notamment d'équi-pondération) pas plus qu'il n'y en a dans la définition de la dominance (cf. remarque 1 du début du 3.1.4).

Il n'en va pas tout à fait de même pour les autres relations constituant la séquence des S^i (cf. (r.5.3.5) et (r.5.3.6)) car leur définition fait intervenir, dans la condition de concordance, des

dénombrements de critères. Nous montrons ci-après, sur la base de deux types de considérations, que cela ne sous-entend nullement une équi-pondération des critères mais seulement certaines limitations sur le mode de différenciation du rôle dévolu à chaque critère pour fonder la résultante des conflits (cf. hypothèses 1 et 2 du 3.1.4 c)).

Une première façon d'aborder le problème consiste à analyser la signification et la portée des conditions qui font intervenir des dénombrements de critères. Comme nous l'avons déjà souligné, elles n'opèrent que dans un cadre relativement étroit délimité par la présence des autres conditions. C'est ainsi que Δ_q ne se différencie de S_A que par la prise en compte d'effets de cumul (et nous venons de voir que S_A n'impliquait aucune hypothèse implicite en matière d'importance de critères). C'est encore la même prise en compte des effets de cumul qui différencie Δ_q de S_{PQ} , relations dont nous avons explicité (cf. hypothèses 1 et 2 du 3.1.4 c)) ce qu'il fallait supposer quant à l'importance relative des critères pour en justifier la définition. Sur la base de considérations semblables, le lecteur pourra sans peine, en prenant appui sur l'analyse faite au début de ce paragraphe, situer, par rapport à S_{AP} (qui ne fait intervenir aucune hypothèse en matière d'importance relative des critères), d'une part S_{OQ} , d'autre part S_{AV} . Il pourra formuler diverses hypothèses aptes à justifier l'un et l'autre de ces surclassements.

Une autre façon (peut-être plus éclairante) de chercher à répondre à la question posée plus haut consiste à comparer successivement chacune des relations S^i avec une relation de surclassement $S(\underline{k})$ dont la définition fait intervenir un vecteur $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ des coefficients d'importance. On peut en effet mettre en évidence les hypothèses implicites auxquelles on s'intéresse en cherchant à cerner un sous-ensemble K^i "aussi grand que possible" tel que :

$$b S^i a \Rightarrow b S(\underline{k}) a, \forall \underline{k} \in K^i.$$

K^i représente donc l'ensemble des "jeux possibles de coefficients d'importance" pour lesquels la relation de surclassement $S(\underline{k})$ est automatiquement validée dès que la relation S^i l'est. On peut donc dire que S^i suppose implicitement que $\underline{k} \in K^i$ dans la mesure où l'on admet que, si l'on avait su ou pu attribuer un coefficient d'importance k_j à chaque critère $j \in F$, on aurait effectivement fondé un système de préférences sur la relation $S(\underline{k})$.

La comparaison qui précède n'est pertinente que si $S(\underline{k})$ est, comme le sont les S^i , défini sur une famille F de pseudo-critères à partir des concepts de concordance et de discordance. Nous prendrons donc comme relation $S(\underline{k})$ (au moins pour commencer) la relation de surclassement de ELECTRE IS (cf. (r.5.2.8) et (r.5.2.9)). On peut, sans perte de généralité, se restreindre à :

$$\underline{k} \in K^* \text{ avec } K^* = \{\underline{k} : k_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n k_j = 1\}.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que, aussi bien pour $S^1 = \Delta_q$ ((r.5.3.5)) que pour $S^1 = S_\Delta$ ((r.5.3.6)), on a : $K^1 = K^*$ (ce qui ne fait que confirmer les résultats ci-dessus). Soulignons que ces résultats ne dépendent pas de la valeur choisie pour le niveau exigé de concordance s .

Intéressons-nous maintenant à $S^4 = S_{AP}$. Rappelons que $b S_{AP} a \Leftrightarrow C(a P b) = \emptyset$. Cette définition ne fait intervenir aucun dénombrement de critères : comme nous l'avons déjà signalé (au même titre que la dominance), elle se fonde sur une logique qui n'affecte en rien l'idée que l'on peut se faire de l'importance de tel ou tel critère. On peut, dans ces conditions, être surpris de trouver, quelle que soit la valeur donnée à s : $K^4 = \emptyset$ (et non K^*). Cela souligne une fois de plus à quel point la notion d'importance des critères n'a de sens qu'au sein d'une PAMC donnée et combien il est délicat de vouloir comparer la manière dont cette importance est traitée dans deux PAMC différentes, même lorsque celles-ci se fondent sur des principes et des logiques très proches.

Considérons une relation $S(k)$ fondée sur une définition quelque peu modifiée afin d'en rendre la logique plus proche de celle qui prévaut dans S_{AP} . La modification consiste tout simplement à changer dans (r.5.2.7) la définition de φ_i de telle sorte que φ_i décroisse depuis 1 jusqu'à $1/2$ (au lieu de 0) lorsque $g_j(a)$ décrit l'intervalle : $[g_j(b) + q_j[g_j(b)]] ; g_j(b) + p_j[g_j(b)]$. Dans ces conditions, il vient, avec $s = 1/2$: $K^4 = K^*$. Dans les mêmes conditions, on trouve, en notant $[n/2]$ la partie entière de $n/2$:

$$K^3 = K^* \text{ pour } 1/2 \leq s \leq 1/2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1 + [n/2]}\right)$$

à condition d'introduire l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE DE DISPARITÉ LIMITÉE : Aucun critère n'a, à lui seul, une importance supérieure ou égale à celle d'une coalition rassemblant au moins la moitié des critères.

Le résultat ci-dessus s'obtient aisément en prouvant que, du fait de cette hypothèse, toute coalition rassemblant au moins la moitié des critères a une importance $m > 1/(1 + [n/2])$ et que, du fait de la définition modifiée de φ_i , $k[C(b S a), C(a Q b)] \geq 1/2 + m/2$.

On obtient le même résultat pour K^2 avec $S^2 = S_{PQ}$ ou Δ_c (dans ce dernier cas, la borne supérieure de s peut être améliorée).

Enfin, sans avoir à faire intervenir l'hypothèse de disparité limitée mais toujours avec $\varphi_s \geq 1/2$ et en ne prenant pas en compte le renforcement de l'effet de veto dû au dernier terme de (r.5.2.9), on trouve: $K^s = K^*$ pour $s = 1/2$.

5.3.2 Cas où le nombre des systèmes est indéterminé

Intéressons-nous à un système de type (S, R) ou (P, ~). Jusqu'ici, pour le définir, nous avons énoncé des conditions qui, lorsqu'elles étaient satisfaites, conduisaient à regarder comme valide une affirmation du type $b H a$ (H signifiant S ou P). Lorsque ni $b H a$ ni $a H b$ ne pouvaient être ainsi validées, on considérait qu'il y avait, selon le cas, incomparabilité ou non préférence entre a et b . En formulant des conditions de validation de moins en moins exigeantes, on a pu bâtir des séquences formées d'un nombre déterminé de tels systèmes relationnels de préférences. Ceux-ci étaient, par construction, emboîtés et renvoyaient chacun à un niveau donné d'une hiérarchie de crédibilité.

Dans le présent paragraphe, nous arrivons à un résultat très voisin : la seule différence provient de ce que la hiérarchie de crédibilité est ici définie à partir d'un "continuum de niveau" et non plus à partir de quelques niveaux dont le nombre a été déterminé a priori. Pour asseoir ce continuum de niveau, il nous faut introduire un nouveau concept, celui d'indice de crédibilité d'une affirmation de type $b H a$ (on parlera, selon les cas, d'indice de crédibilité du surclassement ou d'indice de crédibilité de la préférence stricte ¹).

Une fonction σ_H à valeurs réelles est telle que $\sigma_H(b, a)$ peut être prise comme définition de l'**indice de crédibilité de la proposition $b H a$** dès lors qu'elle satisfait aux trois exigences suivantes :

EXIGENCE 1 : Les actions a et b n'interviennent dans le calcul de $\sigma_H(b, a)$ que par les seuls vecteurs de performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$

¹ Rien n'interdit d'appliquer ce qui suit au cas $H = >$ et de parler d'indice de crédibilité de la préférence.

(le mode de calcul pouvant dépendre des caractéristiques des différents critères de F, notamment de divers seuils).

EXIGENCE 2 : $0 \leq \sigma_H(b, a) \leq 1$; on a :

- $\sigma_H(b, a) = 0$ lorsque la proposition $b \ H \ a$ n'est appuyée par aucun argument significatif susceptible de la valider ;
- $\sigma_H(b, a) = 1$ lorsque la proposition $b \ H \ a$ est appuyée par des arguments tout à fait convaincants permettant de ne pas douter de sa validité.

EXIGENCE 3 : On a : $\sigma_H(d, c) > \sigma_H(b, a)$ lorsque l'affirmation $d \ H \ c$ est appuyée par des arguments qui la rendent plus crédible que l'affirmation $b \ H \ a$.

De l'exigence 3, il découle¹ que $\sigma_H(b, a)$ est une fonction monotone non décroissante de $g_j(b)$ et monotone non croissante de $g_j(a)$, $\forall j \in F$.

Revenons, afin d'illustrer ce qui précède, à certaines des procédures étudiées au 5.2. Plaçons-nous dans le cas particulier où les seuils de veto v_j sont suffisamment grands pour que les conditions de non veto soient automatiquement vérifiées. Tout se passe alors comme si :

- ELECTRE I prenait appui sur (cf. (r.5.2.3)) :

$$\sigma_s(b, a) = \frac{k[C(b \ S \ a)]}{k[F]} ;$$

- ELECTRE IS prenait appui sur (cf. (r.5.2.8)) :

$$\sigma_s(b, a) = \frac{k[C(b \ S \ a), C(a \ Q \ b)]}{k[F]} ;$$

- TACTIC prenait appui sur (cf. (r.5.2.11) ou (r.5.2.13)) :

¹ En effet, pour $H = \{S, >, P\}$, il est naturel de considérer que $b' \ H \ a$ est plus crédible que $b \ H \ a$ dès lors que $b' \ \Delta_F \ b$.

$$\sigma_p(b, a) = \frac{k[C(b \text{ P } a)]}{k[C(b \text{ P } a)] + k[C(a \text{ P } b)]}$$

En effet, dans chacune de ces trois PAMC, la condition de concordance, qui définit à elle seule le système de préférences (compte-tenu de l'hypothèse faite sur les niveaux de veto), équivaut à :

$$b \text{ H } a \Leftrightarrow \sigma_H(b, a) \geq \lambda. \quad (\text{r.5.3.7})$$

Dans ELECTRE I et ELECTRE IS, $\lambda = s$. Dans TACTIC ¹,

$$\lambda = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Plus généralement, on remarquera que (r.5.3.7) définit un moyen simple et naturel pour passer d'un indice de crédibilité $\sigma_H(b, a)$ à une condition de validité de l'affirmation $b \text{ H } a$ (donc à un système de préférences de type (S, R) ou (P, ~) selon le cas). Ce moyen de passage est appelé λ -coupe. Cette terminologie est en particulier classique en théorie des sous-ensembles flous (cf. Dubois et Prade (1980)). Le lecteur un tant soit peu familiarisé avec cette théorie aura sans doute déjà interprété σ_H comme la fonction d'appartenance caractéristique d'une relation binaire floue. Par référence à cette théorie, on dit souvent que σ_s définit une relation de **surclassement floue** et σ_p une relation de **préférence stricte floue** (cf. Perny (1992)). Précisons que, dans la suite de cet ouvrage, nous ne supposons pas que la théorie en question est connue du lecteur.

Considérons la suite de valeurs réelles :

$$1 = \lambda^1 > \lambda^2 > \dots > \lambda^h \geq 0$$

et les relations binaires $H^1, H^2, \dots, H^h$ qui s'en déduisent par λ -coupe prenant appui sur une fonction σ_H . Il est clair que l'on a :

$$H^1 \subset H^2 \subset \dots \subset H^h.$$

¹ En toute rigueur, le second membre de l'expression devrait être très légèrement majoré ou l'inégalité (r.5.3.7) rendue stricte.

Les valeurs choisies $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^h$ caractérisent donc une hiérarchie de niveau à laquelle on peut associer une séquence de systèmes de préférences emboîtés (de type (S, R) ou (P, $\sim$) selon le cas) dès lors que l'on a construit un indice de crédibilité σ_s ou σ_p .

Inversement ¹, étant donné une séquence de systèmes de préférences emboîtés (cf. (r.5.3.5) par exemple), on peut toujours la regarder comme obtenue (et ce de multiples façons) par une séquence de λ -coupes fondée sur un indice de crédibilité σ_H .

L'indice de crédibilité apparaît donc comme un moyen de repérer, sur une échelle de hiérarchie de crédibilité allant de 0 à 1, le niveau avec lequel l'affirmation b H a est validée. Ce repérage est, en général, purement ordinal. Il ne peut (sauf circonstances très exceptionnelles) être assimilé à une probabilité. En définissant un tel indice, on ne définit plus une relation binaire H (surclassement, préférence stricte, ...) mais un nombre quelconque (non limité a priori) de telles relations emboîtées, c'est-à-dire faisant apparaître de plus en plus de possibilités de comparaison (au fur et à mesure que l'on descend dans la hiérarchie de crédibilité) mais au prix de conditions de validité de moins en moins convaincantes. C'est précisément pourquoi on parle de relation de surclassement floue (resp. de préférence stricte floue) à propos de σ_s (resp. σ_p). En parlant ainsi, on fait en quelque sorte référence à la plus longue séquence de relations strictement emboîtées que l'on peut déduire de l'indice de crédibilité par λ -coupes successives ².

Nous nous bornons à présenter ci-après les systèmes de préférences de PROMETHEE I, II et III, d'ELECTRE III et des procédures par compensation probante. D'autres auraient pu l'être (tels ceux de MAPPAC ou PRAGMA, cf. Matarazzo (1986 et 1988)). Nous y avons renoncé pour ne pas trop alourdir ce paragraphe.

¹ Sur tous ces points, nous renvoyons à Doignon et al. (1988).

² Le nombre des relations dans une telle séquence est borné par $\text{card}(A) \cdot (\text{card}(A) - 1)$.

5.3.2.1 Systèmes de préférences dans PROMETHEE I, II et III (cf. Brans et al. (1984))

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les n critères de F sont des pseudo-critères et/ou des critères prenant en compte autrement les situations de préférence stricte. Le ou les seuils (indifférence, préférence ou autres marquant la préférence faible) qui caractérisent les critères sont supposés constants ¹. Contrairement aux PAMC de type ELECTRE, la PAMC commune à PROMETHEE I, II et III repose exclusivement sur une analyse de la concordance. Il s'ensuit qu'aucun niveau de veto n'est introduit. Enfin, cette procédure fait intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$ qui, comme dans TACTIC, sert à apprécier l'importance de la coalition concordante avec la proposition $b P a$. Nous noterons $\sigma_p(b, a)$ l'indice de crédibilité associé.

La définition de $\sigma_p(b, a)$ prend appui sur des grandeurs de même nature restreintes à un seul critère : $\sigma_p(b, a)$ est l'indice de crédibilité de la proposition $b P_j a$. La formule définissant cet indice dépend du type de critères considérés. A l'examen, ces formules s'avèrent conformes aux exigences 1, 2 et 3 énoncées ci-dessus pourvu qu'on les rapporte à l'affirmation $b P_j a$ ².

¹ Toutefois, les formules qui suivent peuvent se généraliser aisément au cas où les seuils varient avec la position de l'intervalle $[g_j(a) ; g_j(b)]$.

² C'est pourquoi nous parlons de crédibilité de la préférence stricte et non, comme le font Brans, Mareschal et Vincke, d'intensité de préférence. De surcroît, cette expression ne nous paraît pas bien adaptée car ' $\sigma_p(b, a)$ ' atteint la valeur 1 dès que le critère j valide $b P_j a$ et ne dépasse pas cette valeur même si l'écart entre les performances de b et a augmente. Pour vérifier formellement la dernière exigence, certains axiomes, peu restrictifs mais difficiles à formuler, devraient être introduits.

De façon plus précise, Brans et al. (1984) définissent $\sigma_{p_j}(b, a)$ comme une fonction de la seule différence $g_j(b) - g_j(a)$ ¹. Dans le cas d'un pseudo-critère, on a :

$$\sigma_{p_j}(b, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in C(a \text{ S } b) \\ 1 & \text{si } j \in C(b \text{ P } a) \\ \frac{g_j(b) - g_j(a) - q_j}{p_j - q_j} & \text{si } j \in C(b \text{ Q } a) \end{cases} \quad (r.5.3.8)$$

(il est intéressant de rapprocher la définition de ϕ_j au (r.5.2.7) de la dernière des formules ci-dessus).

Les auteurs font intervenir deux autres² types de critères. Il s'agit en premier lieu du critère dit de **niveau** qui, au même titre que le pseudo-critère, conduit à cerner, à l'aide des seuils p_j et q_j , une zone de préférence faible mais à modifier l'indice de crédibilité relativement à cette zone comme suit :

$$\sigma_{p_j}(b, a) = 1/2 \text{ si } j \in C(b \text{ Q } a).$$

Il s'agit en second lieu du critère dit **gaussien** ; celui-ci traduit le fait que :

- la préférence faible $b \text{ Q}_j a$ apparaît dès que $g_j(b)$ commence à dépasser $g_j(a)$;
- la préférence stricte $b \text{ P}_j a$ n'est jamais, en toute rigueur, atteinte.

Pour un tel critère, on a, par définition :

$$\sigma_{p_j}(b, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b) \leq g_j(a) \\ 1 - \exp\left(\frac{-(g_j(b) - g_j(a))^2}{2 \gamma^2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où γ peut s'interpréter comme un seuil marquant d'une part la position du point d'inflexion de l'indice de crédibilité et, d'autre part, l'écart de performances auquel on associe la crédibilité $1 - \exp(-1/2) \approx 0,6$.

Dans PROMETHEE, l'**indice de crédibilité de la proposition b P a** est défini par :

¹ Pour prendre en compte des seuils variables, il faut faire intervenir un second argument, $g_j(a)$ par exemple.

² Ils en considèrent en tout six compte-tenu des cas de vrai-critères, pré-critères et quasi-critères. Ces trois cas sont en fait des cas particuliers de (r.5.3.8).

$$\sigma_p(b, a) = \frac{1}{k[F]} \sum_{j \in F} k_j \sigma_p(b, a) \quad (r.5.3.9)$$

avec

$$k[F] = \sum_{j \in F} k_j.$$

b) Commentaires

Comme on l'a déjà souligné en adoptant la notation σ_p , PROMETHEE est fondée sur un indice de crédibilité qui a trait à la préférence stricte. Faisons observer que la crédibilité de $b P a$ n'atteint son niveau maximum ($\sigma_p(b, a) = 1$) que si tous les critères conduisent à préférer strictement b à a . Dans tous les cas de dominance stricte ¹ correspondant à :

$$\begin{aligned} b P_j a, \forall j \in C (\subset F) \text{ et} \\ b I_j a, \forall j \in F \setminus C, \end{aligned}$$

on a :

$$\sigma_p(b, a) = \sum_{j \in C} k_j.$$

C'est dire que si C est réduit ² au seul critère j , le niveau de crédibilité de l'affirmation $b P a$ vaut seulement ³ $k_j/k[F]$. Cette position diffère de celle adoptée dans TACTIC où toute dominance stricte conduit à valider l'affirmation $b P a$ quelle que soit la valeur attribuée au niveau de concordance (cf. 5.2.2 a2)).

En revanche, PROMETHEE ne prenant pas en compte les phénomènes de discordance, on peut fort bien avoir $\sigma_p(b, a) = 1$

¹ Comme la dominance, la dominance stricte Δ_p ne fait intervenir aucun seuil :
 $b \Delta_p a \Leftrightarrow b \Delta_p a \text{ et } \text{Non}(a \Delta_p b).$

² Avec $b \Delta_p a$, $\sigma_p(b, a)$ peut descendre jusqu'à 0 si $C = \emptyset$; bien évidemment, $\sigma_p(a, b) = 0$.

³ Dans une relation nette obtenue à partir de σ_p par λ -coupe, les critères de F ne sont donc pas, en général, inductifs, cf. 2.3.1.

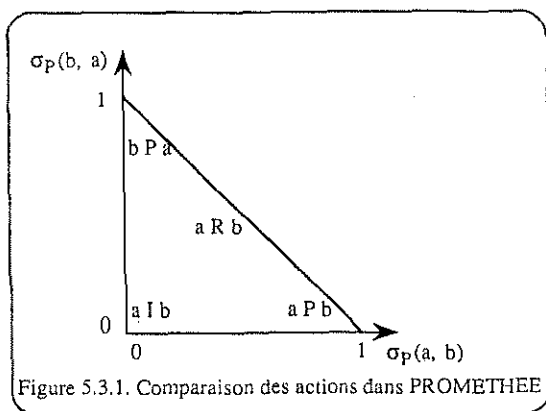
– $k_j/k[F]$ (donc une crédibilité de l'affirmation $b P a$ assez élevée) alors que, sur l'échelle du critère j , $g_j(a)$ est au maximum et $g_j(b)$ au minimum.

Faisons encore observer que (cf. figure 5.3.1), $\forall a, b \in A$:

$$\sigma_P(b, a) + \sigma_P(a, b) \leq 1.$$

L'inégalité ci-dessus découle simplement de (r.5.3.8) et du fait que :

$$\sigma_P(a, b) \neq 0 \Rightarrow \sigma_P(b, a) = 0.$$



On en déduit que $\sigma_P(a, b)$ voisin de $\sigma_P(b, a)$ n'est possible que pour $\text{Min}(\sigma_P(a, b), \sigma_P(b, a)) \leq 1/2$. Par conséquent, toute λ -coupe pour $\lambda > 1/2$ définit une relation P qui est asymétrique (comme doit l'être toute relation de préférence stricte). En revanche, les λ -coupes avec $\lambda \leq 1/2$ peuvent, pour certaines paires d'actions, conduire à $a P b$ et $b P a$.

Posons $\lambda > 1/2$ et examinons comment peuvent se comparer deux actions a et b telles que :

$$\sigma_P(a, b) < \lambda, \sigma_P(b, a) < \lambda.$$

Supposons pour cela (ce qui n'est pas restrictif) $\sigma_P(b, a) \geq \sigma_P(a, b)$. On a :

$$0 \leq \sigma_P(b, a) - \sigma_P(a, b) < \lambda.$$

Lorsque la différence $\sigma_P(b, a) - \sigma_P(a, b) \geq 1/2$, cela signifie qu'il y a une présomption de préférence en faveur de b par rapport à a mais qu'elle n'est pas

suffisamment crédible pour que $b P a$ soit validée avec la λ -coupe considérée (toutefois, si une valeur plus faible de λ avait été choisie, $b P a$ aurait été validée).

Plus la différence $\sigma_p(b, a) - \sigma_p(a, b)$ diminue et plus la présomption de crédibilité en faveur de b devient fragile, voire dépourvue de signification. Est-ce à dire que la proposition $b I a$ gagne en crédibilité ? Cela n'est pas douteux si $\sigma_p(b, a)$ est voisin de 0 (car $\sigma_p(a, b)$ l'étant aussi, on a nécessairement $g_j(a)$ voisin de $g_j(b)$, $\forall j \in F$). En revanche, plus $\sigma_p(b, a)$ s'approche de $1/2$ ($\sigma_p(a, b)$ faisant par conséquent de même) et plus $b R a$ devient crédible (car $\sigma_p(b, a) = \sigma_p(a, b) = 1/2$ correspond à une partition de F en deux coalitions $C(b P a)$ et $C(a P b)$ d'égale importance).

5.3.2.2 Systèmes de préférences dans ELECTRE III (cf. Roy (1978))¹

a) Formules

Elles s'appliquent au cas où les critères de F sont des pseudo-critères². Elles prennent en compte³, pour chaque critère, un seuil de veto v_j qui, au même titre que les seuils d'indifférence q_j et de préférence p_j , peuvent varier avec la performance. Elles font enfin intervenir, pour chaque critère, un coefficient d'importance $k_j > 0$ qui, comme dans ELECTRE I, sert à apprécier l'importance de la coalition concordante avec la proposition $b S a$. On note $\sigma_s(b, a)$ l'indice de crédibilité de cette affirmation.

La définition de $\sigma_s(b, a)$ prend appui :

¹ Signalons que la définition de ce système de préférences peut être étendue au cas de données floues, cf. Perny (1992).

² Elles peuvent, sans difficultés, être étendues aux critères de niveau et aux critères gaussiens pris en compte dans PROMETHEE.

³ Comme dans ELECTRE I, IS, II ou IV, la prise en compte de l'effet de veto est une possibilité que l'on peut fort bien ne pas vouloir utiliser pour tout ou partie des critères. Il suffit de poser $v_j = 100(g_1^* - g_{j*})$ (où g_1^* et g_{j*} désignent respectivement les performances maximum et minimum atteintes par le critère j sur A) pour rendre l'effet de veto inopérant dans les formules qui suivent.

- d'une part sur un **indice de concordance** $c(b, a)$ qui fait intervenir les coalitions $C(b \text{ S } a)$ et $C(a \text{ S } b)$;
- d'autre part sur des **indices de discordance** $d_j(b, a)$ définis pour chaque critère $j \in F$.

Pour les mêmes raisons et de la même façon que dans ELECTRE IS, nous avons fait intervenir, dans ELECTRE III, au titre de la concordance, la quantité $k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)]$ (cf. (r.5.2.7)) ; par définition, l'indice de concordance vaut ¹ :

$$c(b, a) = \frac{k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)]}{k[F]} \quad (\text{r.5.3.10})$$

L'indice de discordance du critère j vise à appréhender le fait que ce critère est plus ou moins discordant avec la proposition $b \text{ S } a$. Cette discordance est maximum ($d_j(b, a) = 1$) lorsque le critère j met son veto au surclassement ; elle est minimum ($d_j(b, a) = 0$) lorsque le critère j n'est pas discordant ($j \notin C(a \text{ P } b)$). Pour définir la valeur de l'indice dans la zone intermédiaire (cas d'un critère discordant ne mettant pas son veto au surclassement), nous avons tout simplement admis que cette valeur croissait proportionnellement à $(g_j(a) - g_j(b))$, d'où la définition suivante :

$$d_j(b, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a) > g_j(b) + v_j[g_j(b)] \\ 0 & \text{si } g_j(a) \leq g_j(b) + p_j[g_j(b)] \\ \frac{g_j(a) - g_j(b) - p_j[g_j(b)]}{v_j[g_j(b)] - p_j[g_j(b)]} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{r.5.3.11})$$

Dans ELECTRE III, l'indice de crédibilité de la proposition $b \text{ S } a$ est alors défini par :

$$\sigma_s(b, a) = c(b, a) \cdot \prod_{j \in D_c(b, a)} \frac{1 - d_j(b, a)}{1 - c(b, a)} \quad (\text{r.5.3.12})$$

avec $D_c(b, a) = \{j \in F : d_j(b, a) > c(b, a)\}$.

¹ Rappelons que la quantité $c(b, a)$ intervient également dans ELECTRE IS (cf. (r.5.2.8)).

Notons que si $d_j(b, a) = 1$ pour $j \in F$, cette formule implique $\sigma_s(b, a) = 0$ puisqu'alors on a nécessairement $c(b, a) < 1$.

b) Commentaires

La formule (r.5.3.12) peut paraître un peu compliquée au lecteur qui la découvre. Nous lui suggérons, pour en approfondir le mécanisme, de se demander si l'indice de crédibilité du surclassement ainsi défini vérifie, "de toute évidence", les propriétés 1, 2 et 3 formulées en introduction du 5.3.2. Il constatera sans peine qu'il en est bien ainsi pour les exigences 1 et 2 mais que, pour la troisième, un minimum d'axiomes (semble-t-il peu restrictifs mais difficiles à formuler) devrait être introduit pour fonder le mode de comparaison dont il est question dans cette dernière exigence. Nous nous bornons¹ ici à énoncer quelques principes simples qui, si on les accepte, permettent de justifier la formule (r.5.3.12).

PRINCIPE n° 1 : En l'absence de critères discordants, l'indice de concordance $c(b, a)$ est choisi comme indice de crédibilité (il est évident que cet indice vérifie les propriétés 1 et 2 ; il est naturel d'admettre qu'il vérifie également la propriété 3 dès lors que l'on cherche à fonder σ_s sur une analyse de concordance et une analyse de discordance et que, dans le cas considéré, il n'y a aucun critère discordant).

PRINCIPE n° 2 : En présence d'un quelconque critère discordant mettant son veto au surclassement $b \text{ S } a$, on pose $\sigma_s(b, a) = 0$ (ceci en conformité avec l'exigence n° 2).

PRINCIPE n° 3 : En présence d'un seul critère discordant j ne mettant pas son veto à $b \text{ S } a$, on considère que le niveau de crédibilité de cette affirmation demeure égal à $c(b, a)$ si $d_j(b, a) \leq c(b, a)$ (le niveau de discordance est ici jugé insuffisant eu égard à celui de la concordance pour affecter la crédibilité de

¹ Pour une analyse formelle de cette formule, voir Roubens et Fodor (à paraître).

b S a) et que ce niveau de crédibilité est réduit ¹, dans le rapport

$$\frac{1 - d_j(b, a)}{1 - c(b, a)}, \text{ si } d_j(b, a) > c(b, a).$$

PRINCIPE n° 4 : Dans tous les cas, l'apparition d'un critère k discordant et tel que $d_k(b, a) > c(b, a)$ n'a pas d'autre effet sur la crédibilité du surclassement que celui pris en compte par la variation de $c(b, a)$.

PRINCIPE n° 5 : Dans tous les cas, lorsque le niveau d'un critère k discordant franchit la valeur $c(b, a)$, la crédibilité du surclassement s'en trouve réduite dans un rapport égal à $\frac{1 - d_k(b, a)}{1 - c(b, a)}$.

Faisons observer que, ici comme dans toutes les méthodes ELECTRE, on s'intéresse à l'affirmation d'un surclassement et non à celle d'une préférence stricte (comme dans PROMETHEE ou dans TACTIC). La crédibilité de b S a atteint son niveau maximum ($\sigma_s(b, a) = 1$) si et seulement si b S_j a est vérifiée, $\forall j \in F$. On a donc (cf. 3.1.4 b)) :

$$\sigma_s(b, a) = 1 \Leftrightarrow b S_{\Delta} a.$$

Faisons encore observer que, avec ELECTRE III :

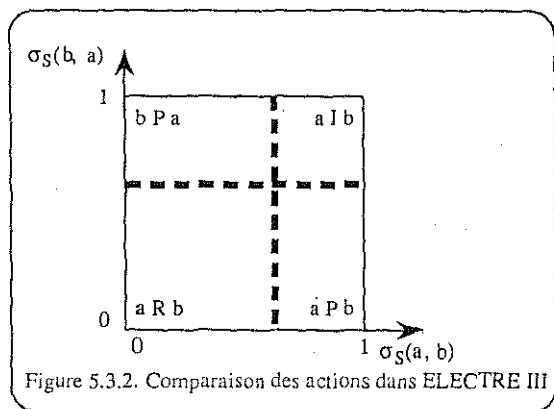
$$0 \leq \sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) \leq 2,$$

chacune des deux bornes pouvant être atteinte (cf. figure 5.3.2).

Le cas $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) = 2$ traduit une indifférence bien établie entre a et b puisque, alors, $a S_{\Delta} b$ et $b S_{\Delta} a$. Lorsque la somme considérée diminue avec $\sigma_s(a, b)$ voisine de $\sigma_s(b, a)$ (cas de "presque symétrie"), on passe de l'indifférence à l'incomparabilité, laquelle est d'autant plus crédible que $\sigma_s(b, a) + \sigma_s(a, b)$ est plus faible : l'analyse qui suit montre que, déjà pour $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) = 1$, l'indifférence n'est plus acceptable. Précisons au

¹ Il n'est pas sans intérêt de chercher à interpréter cette position à la lumière de l'exigence n° 3.

préalable que la présence d'une dissymétrie $\sigma_s(b, a)$ "nettement" supérieure à $\sigma_s(a, b)$ traduit une présomption de préférence en faveur de b par rapport à a , laquelle correspond à une préférence d'autant mieux établie que la différence $\sigma_s(b, a) - \sigma_s(a, b)$ est plus proche de 1 (voir figure 5.3.2).



Le lecteur établira sans peine que si, $\forall j \in F$:

$$d_j(a, b) \leq c(a, b) \text{ et } d_j(b, a) \leq c(b, a),$$

alors

$$\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) = c(a, b) + c(b, a) \geq 1 + \frac{k[C(a \text{ I } b)]}{k[F]}.$$

Dans ces conditions, $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a)$ ne peut être voisin de 1 que si $\frac{k[C(a \text{ I } b)]}{k[F]}$ voisin de 0. D'autre part, l'indifférence $a \text{ I } b$ est d'autant moins crédible que $\frac{k[C(a \text{ I } b)]}{k[F]}$ voisin de 0. Par conséquent, $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a)$ voisin de 1 conduit à regarder les situations d'indifférence comme non crédibles lorsque, comme on l'a supposé, aucun critère discordant n'est venu réduire la crédibilité de l'un des surclassements.

On peut montrer, par une analyse assez minutieuse, que la présence de critères discordants conduisant à $d_j(a, b) > c(a, b)$ et/ou $d_j(b, a) > c(b, a)$ ne modifient pas la conclusion ci-dessus. Ces conditions, jointes à $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a)$ voisin de 1, apparaissent en effet incompatibles avec une situation d'indifférence clairement établie. Cela tient au fait que la présence de discordances significatives conduit normalement à l'incomparabilité, sauf en cas

de nette dissymétrie, c'est-à-dire lorsque $\sigma_s(b, a) - \sigma_s(a, b)$ est significativement différent de 0.

Pour achever ce paragraphe, suggérons au lecteur de comparer les figures 5.3.1 et 5.3.2. Précisons que cette comparaison n'a de sens que si on se place dans les conditions suivantes :

- tous les critères sont des pseudo-critères avec seuils constants ;
- on ne se préoccupe pas de l'effet de veto (v_j suffisamment grand dans ELECTRE III).

Comme on l'a fait remarquer ci-dessus, on a alors $\sigma_s(a, b) + \sigma_s(b, a) \geq 1$. Ceci élimine tous les points du carré 5.3.2 situés au-dessous de la diagonale joignant les points (0, 1) et (1, 0). Ainsi réduite, la figure 5.3.2 devient semblable à la figure 5.3.1. Cela tient à l'existence, dans les conditions considérées, d'une relation fonctionnelle très simple (et facile à établir) liant, sous les deux hypothèses précédentes, les indices de crédibilité d'ELECTRE III et de PROMETHEE :

$$\sigma_s(b, a) = 1 - \sigma_p(a, b).$$

5.3.2.3 Systèmes de préférences dans les procédures par compensation probante

L'idée de compensation (faisant appel au concept de taux de substitution, cf. 3.1.5) semble, a priori, peu compatible avec une procédure de type II. Comme on va le voir, elle peut pourtant l'être si l'on fait intervenir des marges d'indétermination qui affectent les taux de substitution afin de raisonner en termes de "compensation probante". Nous allons tout d'abord présenter ce mode de raisonnement et discuter ensuite de la manière de l'utiliser pour bâtir des systèmes de préférences (emboîtées ou floues) de type (S, R) ou (P, $\sim$). Rappelons que ce mode de raisonnement a été utilisé pour la première fois dans un problème d'aide à la décision au cours des années 1960 à propos d'un

problème de tracé d'autoroute ¹. Quelques tentatives ultérieures ont ensuite eu lieu pour approfondir et développer cette voie ².

Nous supposerons ci-après (comme au 3.1.5) que les performances $g_j(a)$ ont une signification quantitative qui autorise la comparaison des préférences sur la base des différences $g_j(b) - g_j(a)$ et donne un sens au calcul de la quantité ³ :

$$w(b, a) = \sum_{j \in P} k_j (g_j(b) - g_j(a)).$$

Elle correspond à un calcul de bilan par compensation (k_j étant de la forme $1/n_j$, c'est-à-dire l'inverse d'un taux de substitution (cf. 3.1.5)). Plus $w(b, a)$ est grand et plus des propositions telles que $b \succ a$, $b \sim a$ pourraient être jugées crédibles si ce mode de calcul ne présentait pas certains points faibles qui en altèrent la probance. Rappelons (cf. 3.1.5) les deux plus importants :

- k_j est mal déterminé, en particulier parce qu'il est souvent arbitraire de traiter le taux de substitution comme une constante ;
- des écarts de performances différents de 0 (aussi bien positifs que négatifs) mais suffisamment faibles pour refléter une situation d'indifférence sont pris en compte dans le bilan par compensation.

Une façon possible de remédier au second de ces deux points faibles sera abordée en fin de paragraphe.

Chaque coefficient k_j est destiné à valoriser, en vue du bilan, la différence $g_j(b) - g_j(a)$ sur une dimension de référence. Supposons que celle-ci soit définie. Il est alors possible d'appréhender la marge d'indétermination de k_j en définissant un minimum k_j^m

¹ Cf. Roy (1973), Bertier et al. (1972), de Montgolfier et Bertier (1978) et Roy (1974a).

² Cf. Siskos (1984) et Bana e Costa (1989).

³ Rappelons que l'utilisation de cette quantité implique des propriétés bien précises à la nature des nombres k_j et $g_j(a)$.

et un maximum k_j^M réalistes. On peut en déduire facilement le minimum $w^m(b, a)$ et le maximum $w^M(b, a)$ de $w(b, a)$ lorsque les k_j varient sur les intervalles ainsi définis. On a en effet :

$$w^m(b, a) = w_{>}^m(b, a) - w_{>}^M(a, b), \quad (r.5.3.13)$$

$$w^M(b, a) = w_{>}^M(b, a) - w_{>}^m(a, b)$$

avec :

$$w_{>}^m(b, a) = \sum_{j \in C(b, S, a)} k_j^m (g_j(b) - g_j(a)), \quad (r.5.3.14)$$

$$w_{>}^M(b, a) = \sum_{j \in C(b, S, a)} k_j^M (g_j(b) - g_j(a)) \text{ et}$$

$$C(a, S, b) = \{j \in F : g_j(a) > g_j(b)\} \text{ (cf. (r.5.3.1))}.$$

On est ainsi conduit, pour renforcer la probance du raisonnement par compensation, à substituer au nombre $w(b, a)$ l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$. Faisons observer que :

$$[w^m(a, b) ; w^M(a, b)] = [-w^M(b, a) ; -w^m(b, a)].$$

Pour fonder des indices de crédibilité $\sigma_s(b, a)$ ou $\sigma_p(b, a)$, il faut, de toute évidence, faire intervenir la position du 0 par rapport aux bornes de l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$. Il est naturel de considérer que :

- $w^m(b, a) > 0$ est un argument suffisant pour valider $b P a$ (donc $b S a$) ;

- $w^M(b, a) < 0$ suffit pour prouver qu'aucun argument significatif ne peut valider $b S a$ (donc $b P a$).

Il n'y a donc matière à discussion (cf. début du 5.3.2, exigence 2) que si :

$$w^m(b, a) \leq 0 \leq w^M(b, a). \quad (r.5.3.15)$$

Les auteurs cités en référence en début de ce paragraphe ont proposé diverses solutions. Nous en présentons ci-après quelques unes.

Il découle de ce qui précède et de l'exigence 2 imposée aux indices de crédibilité (cf. début du 5.3.2) que, pour $H \in \{P, S\}$:

$$\begin{aligned}\sigma_H(b, a) &= 0 \text{ si } w^M(b, a) < 0, \\ \sigma_H(b, a) &= 1 \text{ si } w^m(b, a) > 0.\end{aligned}\tag{r.5.3.16}$$

Les définitions de σ_H qui figurent ci-après supposent donc les inégalités (r.5.3.15) satisfaites. Posons :

$$\rho(b, a) = \frac{w^M(b, a)}{w^M(b, a) - w^m(b, a)}.\tag{r.5.3.17}$$

La longueur $w^M(b, a) - w^m(b, a)$ de l'intervalle $[w^m(b, a) ; w^M(b, a)]$ étant supposée fixe, la force des arguments susceptibles de valider une proposition du type b H a croît avec $w^M(b, a)$, donc aussi avec $\rho(b, a)$. Cela signifie que l'exigence 3 des indices de crédibilité (cf. début du 5.3.2) est également satisfaite, du moins lorsqu'on raisonne avec une longueur d'intervalle fixe. La valeur $\rho(a, b)$ semble donc pouvoir être prise comme définition d'un indice de crédibilité. Il ne peut s'agir que d'un indice de crédibilité de préférence et non de surclassement. On a en effet, quelles que soient les actions considérées :

$$\rho(b, a) + \rho(a, b) = 1.$$

Il s'ensuit que, si l'on opère une λ -coupe (cf. (r.5.3.7)) de la relation floue définie par l'indice ρ , la relation non floue qui en découle est automatiquement antisymétrique dès lors que $\lambda \geq 1/2$. Aucune situation d'indifférence clairement identifiée ne peut donc apparaître sous la forme b S a et a S b .

Bana e Costa et Vincke (à paraître) ont étudié la relation floue de préférence stricte définie par :

$$\sigma_p(b, a) = \rho(b, a).\tag{r.5.3.18}$$

Ils ont en particulier montré que toute relation non floue P_λ qui s'en déduit par λ -coupe (cf. (r.5.3.7)) est transitive.

Ils ont proposé et étudié un autre indice fondé non pas sur les seules différences que sont $w^m(b, a)$ et $w^M(b, a)$ (cf. (r.5.3.13) et (r.5.3.14)) mais sur leurs quatre composantes. Ils considèrent pour cela le rectangle montré figure 5.3.3. Il n'y a ici matière à discussion que si la première bissectrice coupe ce rectangle. L'indice en question est défini comme le rapport de la surface de la

portion favorable à la surface totale du rectangle. Ils ont montré que ce second indice possédait la même propriété de transitivité que le précédent.

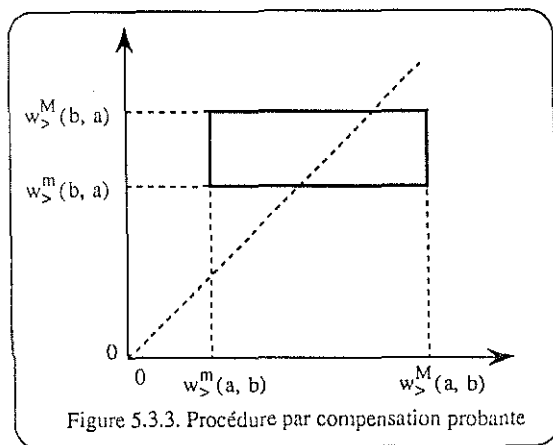


Figure 5.3.3. Procédure par compensation probante

Revenons sur la restriction implicite qui figure plus haut quant à la façon dont l'indice de crédibilité $\sigma_p(b, a) = \rho(b, a)$ satisfait l'exigence 3 des indices de crédibilité. Posons :

$$L(b, a) = w_{>}^M(b, a) - w_{>}^m(b, a).$$

Supposons $L(b, a)$ voisin de 0 avec $\rho(b, a) = 0,5$. Considérons un autre couple (d, c) tel que $L(d, c)$ est voisin de L^* , L^* étant définie comme la longueur maximum que peut atteindre l'intervalle L .

L'affirmation $d \succ c$ est-elle réellement appuyée par des arguments qui la rendent plus crédible que l'affirmation $b \succ a$ si on a $\rho(d, c) = 0,6$? L'embarras que suscite une telle question provient, à notre avis, pour une large part, du fait que l'affirmation porte sur une préférence stricte. Il nous semble que, dans le cas considéré, l'affirmation $d \succ c$ est moins crédible que l'affirmation $b \succ a$ bien que $\rho(d, c) > \rho(b, a)$. Cela tient au fait que, pour ρ voisin de $1/2$ et L voisin de 0, l'indifférence s'impose alors que c'est l'incomparabilité qui s'impose si L est voisin de L^* et ρ voisin de $1/2$. Nous suggérons donc l'étude d'un indice de la forme :

$$\sigma_s(b, a) = f[L(b, a), \rho(b, a)] \quad (r.5.3.19)$$

avec :

$f(L, 0) = 0$, $f(L, 1) = 1$ pour $0 \leq L \leq L^*$,
 $f(0, \rho) =$ fonction croissante de 0 jusqu'à 1 devenant très voisine de 1 dès que ρ n'est pas très voisin de 0,

$f(L^*, \rho)$ = fonction croissante de 0 jusqu'à 1 restant très voisine de 0 aussi longtemps que ρ n'est pas très voisin de 1,
 $f(L, \rho)$ = fonction décroissante de L et croissante de ρ .

Il semble peu arbitraire de poser :

$$f(L, \rho) = f(0, \rho) - \frac{f(0, \rho) - f(L^*, \rho)}{L^*} L,$$

$$f(L^*, \rho) = 1 - f(0, 1 - \rho).$$

Pour achever de définir $f(L, \rho)$, il ne reste plus qu'à fixer $f(0, \rho)$ conformément à l'hypothèse de décroissance indiquée ci-dessus. Une solution possible est :

$$f(0, \rho) = \frac{\rho}{\alpha + (1 - \alpha)} \rho \text{ avec } \alpha \approx 0.$$

Pour interpréter α (et lui donner une valeur en pratique), on remarquera que :

$$f(0, \alpha) = \frac{1}{2 - \alpha} \approx 1/2.$$

α est donc la valeur qu'il faut donner à ρ pour que la crédibilité du surclassement tombe à 1/2 lorsque L est voisin de 0.

Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe c), les formules (r.5.3.14) présentent un point faible qui altère la probance du bilan par compensation et dont il n'a pas été tenu compte jusqu'ici. Il s'agit de la non prise en compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence. Nous terminons ce paragraphe en proposant quelques voies susceptibles d'y remédier.

On peut se demander comment modifier les composantes du bilan défini par (r.5.3.14) de telle sorte que, sans changer (r.5.3.13), (r.5.3.16) ainsi que tout ce qui suit demeure valable. Il nous faut distinguer le cas $H = P$ du cas $H = S$.

Pour $H = P$, on peut songer à remplacer (dans (r.5.3.14)) $C(b, S, a)$ par $C(b, P, a)$ (ou éventuellement $C(b, > a)$). Cette façon de faire présente cependant un inconvénient. En effet (avec $C(b, P, a)$), un critère j tel que $g_j(b) - g_j(a) = p_j$ ne contribue ni à $w_S^m(b, a)$, ni à $w_S^M(b, a)$ alors qu'un critère h tel que $g_h(b) - g_h(a) = p_h + \varepsilon$ y contribue, pour une quantité ne tendant pas vers 0 lorsque ε tend vers 0. On échappe à cet inconvénient si l'on modifie (r.5.3.14) comme suit :

$$w_S^m(b, a) = \sum_{j \in C(b, P, a)} k_j^m [g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))],$$

$$w_{>}^M(b, a) = \sum_{j \in C(bPa)} k_j^M [g_j(b) - g_j(a) - p_j(g_j(a))].$$

Pour $H = S$, il est exclu, dans le cas de quasi-critères, de simplement substituer $C(b S a)$ à $C(b S_{>} a)$ car la présence, dans $C(b S a)$, de certains critères vérifiant $b I_j a$ pourrait contribuer à réduire les valeurs de $w_{>}^m(b, a)$ et de $w_{>}^M(b, a)$. On peut encore remédier à cet inconvénient en modifiant (r.5.3.14) comme suit :

$$\begin{aligned} w_{>}^m(b, a) &= \sum_{j \in C(bIa)} k_j^m [q_j(g_j(a))] + \sum_{j \in C(b>a)} k_j^m [g_j(b) - g_j(a) + q_j(g_j(a))], \\ w_{>}^M(b, a) &= \sum_{j \in C(bIa)} k_j^M [q_j(g_j(a))] + \sum_{j \in C(b>a)} k_j^M [g_j(b) - g_j(a) + q_j(g_j(a))]. \end{aligned}$$

Ce sont ces formules qui doivent alors intervenir dans (r.5.3.13) et (r.5.3.17) pour fonder (r.5.3.19). Le lecteur peut se demander pourquoi faire intervenir des seuils q_j comme on l'a fait dans les sommations ci-dessus et pourquoi n'avoir pas tout simplement procédé comme au 3.2.2 d) pour calculer le bilan par compensation dans le cas de quasi-critères. La réponse tient à l'influence que doivent avoir (puisque'il s'agit d'un surclassement) les critères de la coalition $C(b I a)$ sur la détermination des quantités $w^m(b, a)$ et $w^M(b, a)$. Ceci explique l'addition de la constante q_j dans tous les termes de la sommation.

Dans le cas de pseudo-critères (toujours pour $H = S$), la même remarque vaut par rapport à la solution préconisée au 3.2.2 d) à partir des fonctions $f_j(x)$. Les formules doivent s'écrire ici en opérant la même translation que dans le cas des quasi-critères, c'est-à-dire en faisant intervenir $f_j(x) + q_j$.

5.4 COMPLÉMENTS PRATIQUES

5.4.1 Généralités

Dans cette section, nous nous plaçons du point de vue d'un homme d'étude qui, confronté à un contexte concret d'aide à la décision, souhaite prendre appui sur une PAMC de type II. Nous supposons qu'il en a choisi une, ce choix allant habituellement de pair avec celui d'une méthode alliant une procédure d'exploitation à cette PAMC (cf. 5.1.1 et 6.1.1). Nous n'aborderons qu'au 6.1.5 les aspects pratiques de ce choix sur la base des considérations du 5.1.2.

Quelle que soit la PAMC choisie, la mise en œuvre effective de celle-ci fait appel, comme nous l'avons montré au 3.1.6, à des

informations inter-critères que nous avons qualifiées de numériques ¹. Ces informations doivent permettre d'attribuer une valeur à un certain nombre de paramètres qui, dans les PAMC qui nous intéressent ici, sont ² d'une part les coefficients d'importance k_j et, d'autre part, les seuils de veto v_j . Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés aux difficultés pratiques que peut rencontrer l'homme d'étude pour attribuer des valeurs à de tels paramètres.

Soulignons que les informations qu'il lui faut rechercher (le plus souvent contribuer à élaborer) visent à traduire en termes numériques ³, dans le cadre de la logique d'agrégation retenue, les positions de nature volontariste que peuvent avoir un ou plusieurs acteurs quant au rôle qu'il souhaite voir dévolu à chaque critère dans la formation des préférences globales. Comme nous l'avons vu (cf. 3.2.3), les informations dont il est question ici ont trait à ce qu'il est convenu d'appeler l'importance (relative) des critères ⁴.

Les valeurs qu'il convient d'attribuer aux k_j et aux v_j sont habituellement désignées sous le terme (impropre) de "données". Tout comme dans les PAMC de type I abordées au chapitre 4, les valeurs qui permettent de différencier l'importance du rôle dévolu à chaque critère ne sont pas naturellement données. Il peut arriver qu'un décideur soit amené à proposer spontanément ses propres valeurs numériques mais, même dans ce cas (nous y reviendrons au 5.4.2), une discussion critique s'impose, laquelle peut conduire à modifier les chiffres initiaux. Ces chiffres sont l'expression d'opinions, de systèmes de valeurs qui ne sont ni très explicites,

¹ Les informations inter-critères logiques font partie intégrante de la PAMC.

² A l'exception de quelques PAMC très particulières que nous n'avons fait qu'évoquer et sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici.

³ Le qualificatif "numérique" doit être pris ici dans un sens large, les nombres en question pouvant n'avoir, dans certains cas, qu'une signification ordinale (comme dans ORESTE ou MELCHIOR).

⁴ Pour une définition plus précise de cette notion, voir Roy et Mousseau (à paraître).

ni naturellement quantifiés, ni toujours compatibles avec la logique d'agrégation. Cela sera d'autant plus vrai que le décideur sera peu accessible, non réduit à un seul individu ou mal identifié.

Considérons un instant le cas (exceptionnel) où l'homme d'étude peut raisonnablement vouloir chercher à décrire, le plus fidèlement possible, les préférences existantes d'un décideur individuel avec lequel il a un contact direct ne risquant pas de perturber ces préférences. Il peut alors concevoir son travail pour attribuer une valeur aux k_j et aux v_j dans une optique d'ajustement¹, les valeurs à attribuer étant celles qui permettent au modèle de rendre compte, au mieux, des préférences pré-existantes. En-dehors de ce cas, le caractère hypothétique et mal déterminé du système de préférences (provenant du contenu parfois vague des opinions, de leur diversité selon l'acteur considéré, de la possibilité de les faire évoluer sous l'effet des questions posées) rend cette optique d'ajustement (et, a fortiori, d'estimation) sans objet. L'attribution des valeurs aux k_j et aux v_j doit alors être conçue dans le cadre d'une démarche constructive² ayant pour objet de définir une ou plusieurs hypothèses de travail jugées pertinentes pour apporter des éléments de réponse aux questions étudiées.

Pour les raisons qui précèdent, il est souvent difficile de se contenter d'un seul jeu de valeurs pour les k_j et pour les v_j . Le concept d'analyse de robustesse, introduit dans le dernier paragraphe de cette section, permet de prendre effectivement en considération le caractère mal déterminé des k_j et des v_j , de même d'ailleurs que d'autres grandeurs de nature également économique ou, au contraire, plus technique (spécifiques de la PAMC ou de la procédure d'exploitation).

¹ S'il doit faire l'hypothèse qu'il existe, dans la tête du décideur, des "vraies valeurs" qu'il lui faut approcher au mieux, il pourra même parler d'estimation.

² Cf. 1.7 ou Roy (1992).

5.4.2 Attribution de valeurs aux coefficients d'importance k_j

a) Quelques rappels

La signification des coefficients k_j dans les PAMC auxquelles on s'intéresse ici ¹ se fonde sur les considérations développées au 3.1.2. Dans ce qui suit, il importe d'avoir présent à l'esprit le caractère intrinsèque de ce mode d'appréciation de l'importance des critères : la valeur attribuée à k_j est intrinsèquement liée à ce que le critère g_j a pour objet d'appréhender (c'est-à-dire essentiellement les conséquences qui confèrent un sens à son axe de signification) mais nullement à la façon dont il l'appréhende (c'est-à-dire essentiellement la façon de coder les conséquences prises en compte sur l'échelle du critère). C'est dire qu'un changement d'unité ou, plus généralement, l'adoption d'un codage différent revenant à substituer à g_j une transformée monotone croissante du critère initial ² n'affecte pas la valeur de k_j (il en va généralement autrement dans les PAMC de type I ³, cf. 3.2.3). Toutefois, l'importance accordée à un critère n'ayant de sens que relativement à celle accordée aux autres critères de F , l'attribution d'une valeur à k_j ne peut se faire indépendamment des valeurs attribuées aux autres coefficients d'importance, ceci restant vrai même si l'on ne norme pas à 1 la somme de ces coefficients.

Accroître la valeur de k_j conduit, toutes choses égales par ailleurs, à accroître l'importance accordée au critère g_j . De plus (contrairement à ce qui se passe dans les PAMC de type I, cf.

¹ à savoir les PAMC de type ELECTRE fondées sur les concepts de concordance et de discordance. Le lecteur qui souhaite replacer ce qui suit dans un cadre plus général relira, avec profit, le 3.2.3.

² De façon très locale et seulement dans le cas de pseudo-critères, certains modes de comparaison peuvent se trouver légèrement modifiés sous l'effet d'une telle transformation dans des PAMC telles qu'ELECTRE III du fait de l'hypothèse de linéarité qui sous-tend la définition du coefficient ϕ_j dans (r.5.2.7).

³ ou encore dans une PAMC de type II faisant intervenir des taux de substitution, cf. 5.3.2.3.

3.2.3 a)), l'inégalité $k_j > k_i$ s'interprète comme : " g_j a une importance supérieure à celle de g_i " en ce sens que g_j se voit conférer un rôle plus décisif ("il pèse plus lourd") dans la définition des préférences globales que le critère g_i . Parler de "poids" pour désigner les k_j ne fait donc courir ici aucun risque de confusion : l'image que véhicule ce terme constitue une métaphore qui ne recèle pas d'effets pervers comme dans le cas de la somme dite pondérée (cf. 3.2.3 a)).

b) Quelques constatations empiriques¹

Bien que vague, la notion d'importance apparaît comme familière à la plupart des intervenants dans les processus de décision. Ils parlent spontanément du poids élevé ou négligeable de tel ou tel critère ; ils font volontiers la comparaison de ces poids avec tel ou tel autre. Pour la plupart d'entre eux, cette notion a un caractère qualitatif. Pourtant, ils n'éprouvent aucune gêne à attribuer une valeur aux k_j , même sans qu'on le leur demande. Cette dernière constatation appelle quelques commentaires.

Lorsqu'un intervenant d'un processus de décision s'exprime sur cette notion vague d'importance et, a fortiori, lorsqu'il tente de la quantifier, il n'est généralement pas conscient des points suivants².

– Toute valeur attribuée à k_j n'a de sens que relativement à une PAMC définie (cf. 3.2.3 b)).

– Si des valeurs sont attribuées aux k_j seulement par référence à la signification de chaque critère (autrement dit en ignorant ou en ne tenant aucun compte de la définition précise des échelons des différentes échelles ou des unités associées et, plus généralement, de tous les aspects du codage des $g_j(a)$), alors le jeu de poids qui en résulte est impropre à un calcul de somme pondérée.

¹ Ces constatations sont fondées sur l'expérience personnelle des auteurs ainsi que sur d'autres travaux menés au LAMSADE et ailleurs.

² Pour plus de précisions, voir notamment Mousseau (1993).

– Le fait que les actions réelles confèrent aux critères g_j des performances dispersées d'un bout à l'autre de son échelle E_j ou, au contraire, regroupées dans un voisinage restreint situé à tel ou tel endroit de E_j concerne le caractère plus ou moins discriminant du critère mais en aucun cas la valeur qu'il convient d'attribuer à k_j .

On peut donc affirmer que si les différents intervenants d'un processus de décision perçoivent en général, sans difficultés, le lien qui existe entre leur propre système de valeurs et le poids plus ou moins élevé qu'il convient d'attribuer à chaque critère, ils n'ont pas pour autant conscience de la complexité que cache cette notion d'importance. C'est pourquoi :

– il est déconseillé de retenir, sans examen critique et éventuelles modifications, les valeurs des k_j qu'un "décideur" propose ou même tente d'imposer ;

– il est souhaitable que l'homme d'étude fournisse un minimum d'explications sur la nature de ce lien compte-tenu de la PAMC retenue, même si de telles explications perturbent fréquemment les praticiens ; il peut les rassurer en faisant valoir que l'aide à la décision peut prendre appui non pas sur un seul mais sur plusieurs jeux de poids : cela peut permettre de prendre en compte les difficultés qu'il y a à traduire (en termes numériques dans le cadre de la PAMC), de façon volontariste, la notion vague d'importance ou encore le fait que cette notion d'importance doit exprimer des systèmes de valeurs qui ne sont pas les mêmes pour tous les intervenants.

Tout ce qui s'est passé antérieurement à la prise en charge d'un problème, la culture des principaux intervenants concernés par le problème, la nature des enjeux qui lui sont attachés et bien d'autres facteurs sont susceptibles d'influencer la façon de procéder pour attribuer une valeur aux k_j . Il nous paraît donc vain de chercher à mettre au point une méthode systématique susceptible de donner satisfaction dans tous les cas ¹. C'est pourquoi

¹ Le lecteur trouvera dans Mousseau (1993) une abondante bibliographie sur les méthodes proposées.

nous nous bornons à présenter ci-après quelques principes qui nous semblent avoir une portée relativement générale et, finalement, une façon de faire conforme à ces principes qui a fait ses preuves dans plusieurs cas concrets.

c) Quelques principes généraux

PRINCIPE n° 1 : Seule une interaction comportant une part non négligeable de dialogue entre homme d'étude et intervenants dans le processus de décision (décideur ou personne agissant en son nom) est susceptible de permettre l'élaboration (il serait impropre ici de parler de recueil et, encore moins, d'extraction) d'informations à partir desquelles un ou plusieurs jeux de poids pourront être conçus et justifiés.

PRINCIPE n° 2 : Pour que l'interaction ci-dessus ne risque pas de reposer sur des malentendus (mauvaise interprétation de certains termes entrant dans les questions, présence d'hypothèses implicites particulièrement gênantes dans la formulation des réponses, ...), il convient d'éviter d'interroger directement sur la valeur des poids ; l'objectif étant la construction d'un ou plusieurs s.r.p., il semble préférable de formuler les questions en termes d'actions à comparer.

PRINCIPE n° 3 : Les actions à comparer doivent être réalistes mais non réelles ; faire comparer :

- des actions trop irréalistes (caractérisées par exemple par des niveaux de performances jamais observés ou encore des combinaisons de performances invraisemblables) risquerait d'aboutir à des réponses relativement arbitraires de la part de la personne interrogée qui se verrait confrontée à des situations tout-à-fait nouvelles vis-à-vis desquelles elle n'a jamais eu l'occasion, ni de façonner au contact d'une pratique, ni d'argumenter auprès d'autrui, des préférences quelconques ;
- des actions trop réelles risquerait d'aboutir à des réponses faisant intervenir certains aspects trop spécifiques de ces actions volontairement laissés de côté dans l'aide à la décision telle qu'elle a été conçue en relation avec la famille cohérente de critères adoptés.

PRINCIPE n° 4 : Lorsqu'un jugement de préférence est demandé relativement à deux actions (comparaison par paires), il importe d'une part de clairement caractériser chacune de ces actions par son vecteur de performances et, d'autre part, de limiter à trois (exceptionnellement à quatre) le nombre des critères sur lesquels ces deux actions ont des performances distinctes (au-delà de quatre, les difficultés de comparaison deviennent trop grandes et rendent les réponses peu fiables) ; sur chacun des critères conduisant à des performances distinctes, il importe que leur différence soit un peu supérieure au seuil de préférence sans toutefois l'être trop afin d'éviter tout phénomène de type veto.

PRINCIPE n° 5 : Afin de réduire l'effort cognitif demandé à la personne interrogée et d'éviter de susciter de sa part des modes de raisonnement faisant intervenir des considérations de type II¹, il est conseillé de faire jouer un rôle privilégié, pour définir les actions à comparer, à une action b_0 dite **action de référence** caractérisée par des performances $g_j(b_0)$ se situant au voisinage de la médiane des performances des actions réelles susceptibles d'intervenir dans l'aide à la décision.

PRINCIPE n° 6 : Même avec des questions relativement simples (comparaison par paires) prenant appui sur une action de référence afin de réduire la variété des actions à considérer, il importe de chercher à limiter, autant que faire se peut, le nombre des questions à poser de façon à ne pas provoquer une lassitude chez l'interviewé, laquelle serait néfaste à la qualité des réponses ; il faut toutefois poser assez de questions non seulement pour élaborer une information suffisamment riche mais aussi pour permettre des contrôles de cohérence.

d) Une façon de procéder

La façon de procéder pour attribuer une valeur aux poids k_j dont nous traçons les grandes lignes ci-après opère de façon indirecte. Elle consiste à poser une série de questions conformé-

¹ Cf. 3.1.1, lesquelles n'ont pas leur place dans les PAMC qui nous intéressent ici, cf. 5.1.1.

ment aux principes ci-dessus à un intervenant qui peut être soit un individu, soit un groupe d'individus. Elle vise non pas à obtenir une valeur unique pour chaque k_j mais à délimiter un domaine $D(\underline{k})$ renfermant les jeux de poids $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ convenables pour conduire l'aide à la décision. Précisons que :

- cette façon de faire a été expérimentée dans divers contextes concrets ¹ ;

- lorsque l'intervenant interrogé est un groupe d'individus, il peut apparaître des divergences irréductibles quant à la réponse à apporter à certaines questions ; dans ce qui suit, nous n'envisagerons pas cette éventualité ; lorsqu'elle se produit, la procédure demeure applicable mais au prix de quelques complications assez évidentes ;

- nous nous bornons ci-après à indiquer les grandes lignes de cette façon de faire ; pour une présentation plus systématique, nous renvoyons à Mousseau (1993).

Avant d'explicitier plus avant la nature des questions et leur enchaînement, il nous faut présenter un résultat élémentaire montrant de quelle façon la réponse apportée à une comparaison par paires dans le cadre du principe n° 4 contribue à délimiter $D(\underline{k})$. Nous achèverons ce paragraphe en expliquant comment le système d'inégalités finalement obtenu pour définir $D(\underline{k})$ peut être utilisé pour mettre en évidence une série de jeux de poids contrastés aptes à servir de point de départ pour une analyse de robustesse.

Soit a et b deux actions caractérisées par leurs vecteurs-performances $\underline{g}(a)$ et $\underline{g}(b)$. Notons H le sous-ensemble des critères pour lesquels les performances de a et b diffèrent (autrement dit, $g_i(a) \neq g_i(b)$, $\forall i \in H$). Supposons que, pour chacun des critères de H , les conditions du principe n° 4 soient vérifiées. Il existe alors une unique partition $\{I, J\}$ de H telle que :

$$\begin{aligned} \forall i \in I : g_i(a) &> g_i(b) + p_i(g_i(b)), \\ \forall j \in J : g_j(b) &> g_j(a) + p_j(g_j(a)). \end{aligned}$$

Examinons à quelles conditions doivent satisfaire les poids k_j pour qu'une PAMC fondée sur l'analyse de la concordance, comme le sont presque toutes celles envisagées dans le présent chapitre, soit apte à rendre compte d'un jugement de préférence du type "entre a et b , je préfère a ". Cela justifie de

¹ On en verra un exemple au chapitre 8. Pour une autre illustration plus détaillée de sa mise en œuvre sur un cas concret, voir Roy et al. (1983).

chercher à accepter, dans le s.r.p., a S b et Non(b S a). Ceci implique (dans la quasi-totalité des PAMC auxquelles on s'intéresse) :

$$k[C(a S b)] > k[C(b S a)],$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i \in I} k_i > \sum_{j \in J} k_j. \quad (r.5.4.1)$$

Une réponse du type "entre a et b, je suis indifférent" conduit à poser (selon un raisonnement identique) :

$$\sum_{i \in I} k_i = \sum_{j \in J} k_j. \quad (r.5.4.2)$$

Enfin, une réponse du type "entre a et b, je ne sais pas ou je ne veux pas me prononcer" n'apporte aucune information quant à l'importance relative qu'il convient d'accorder respectivement à la coalition I des critères favorables à a et à la coalition J de ceux favorables à b.

Supposons maintenant définie une action de référence b_0 conformément au principe n° 5. Notons b_j une action caractérisée par le vecteur-performances suivant :

$$\begin{aligned} g_j(b_j) &= g_j(b_0), \quad \forall j \notin I, \\ g_j(b_j) &= g_j(b_0) + e_j, \quad \forall j \in I \end{aligned}$$

où e_j désigne un écart de performance choisi de façon à être légèrement supérieur à $p_j(g_j(b_0))$. Lorsque $I = \{i_1, i_2, \dots\}$, b_i sera également notée $b_{i_1, i_2, \dots}$.

Tout jugement en termes de préférence stricte ou d'indifférence entre deux actions b_i et b_j conduit alors à restreindre le domaine $D(k)$. Compte-tenu du principe n° 6, il serait peu réaliste de chercher à faire comparer de telles actions pour toute coalition I et J. Afin de limiter autant que faire se peut le nombre de questions à poser, on peut procéder en suivant les étapes ci-après. Elles ont été conçues de manière à enchaîner les questions de telle sorte que chacune soit susceptible d'apporter un supplément d'information effectif. Si la numérotation des étapes indique un ordre logique de progression, il n'est pas exclu (en particulier lors des étapes 2, 3 et 4) que certaines réponses amènent à revenir à une étape antérieure ou, au contraire, à sauter une étape¹.

¹ Pour plus de précisions, voir Mousseau (1993).

1) Etape n° 1 : Recherche d'un préordre sur les coefficients k_j

Afin d'initialiser la procédure, l'homme d'étude doit tout d'abord choisir, en collaboration avec le ou les individus questionnés (désormais désignés sous le sigle Z), les caractéristiques de l'action de référence b_0 . Il présente ensuite à Z les actions $b_1, \dots, b_n$ (correspondant respectivement à $I = \{1\}, \dots, I = \{n\}$).

La première question posée a pour objet de savoir laquelle (ou lesquelles) des actions $b_1, \dots, b_n$ est la meilleure (ou sont les meilleures ex æquo). Si b_n est la seule meilleure, il vient, d'après (r.5.4.1) :

$$k_n \geq k_j, \forall j \in F.$$

Si b_n est jugée la meilleure ex æquo avec b_h , il vient, d'après (r.5.4.2) (et en simplifiant quelque peu) :

$$k_n = k_h \geq k_j, \forall j \in F.$$

L'homme d'étude élimine ensuite la (ou les) action(s) sélectionnée(s) par Z et renouvelle la même question sur les actions restantes. Il parvient ainsi à ordonner, selon un préordre complet, les poids $k_1, \dots, k_n$. Dans ce qui suit, on supposera, de façon non restrictive :

$$k_n \geq k_{n-1} \geq \dots \geq k_1. \quad (\text{r.5.4.3})$$

Si ce préordre contient des ex æquo, l'homme d'étude devra s'assurer que les critères correspondants ont bien une égale importance aux yeux de Z.

A l'issue de cette première étape, les questions posées par l'homme d'étude ne portent plus que sur des comparaisons par paires. Ces dernières sont de la forme (b_i, b_j) . Les réponses de Z doivent être de l'un des trois types envisagés ci-dessus à propos de la paire $\{a, b\}$. Les réponses successives génèrent des inégalités de la forme (r.5.4.1) ou des pseudo-égalités de la forme (r.5.4.2) qui contribuent, avec (r.5.4.3), à cerner le domaine $D(k)$.

Les trois étapes suivantes visent à enrichir progressivement le préordre complet (r.5.4.3) en intercalant ¹, à l'endroit approprié, des sommes de la forme $k_h + k_i$. Dans ce qui suit, on supposera qu'il n'existe pas de critères

¹ Cet enrichissement progressif ne conduit pas, à proprement parler, à un préordre complet car il pourrait être abusivement restrictif et générateur d'incohérences artificielles de systématiquement réduire à des égalités les conditions (r.5.4.2). Pour les prendre formellement en compte, on peut par exemple interpréter une pseudo-égalité de la forme $k_j = k_h + k_i$ comme une double inégalité du type $-k_i \leq k_j - (k_h + k_i) \leq k_i$.

ayant même poids ; lorsqu'il en est autrement, on peut raisonner sur un sous-ensemble des critères formé d'un seul représentant par classe d'ex æquo.

Etape n° 2 : Trouver des valeurs de i et j telles que $k_j < (\text{ou voisin de}) k_i + k_{i+1} < k_{j+1}$

En tout premier lieu, il convient de s'intéresser au cas $i = 1$. La valeur de j (si elle existe) s'obtiendra aisément en faisant comparer successivement les paires $\{b_n, b_{1,2}\}$, $\{b_{n-1}, b_{1,2}\}$, ... Si $b_{1,2}$ est préférée à b_n , c'est la preuve qu'il n'existe aucun couple (i, j) répondant à l'objectif de l'étape 2. On a en effet (condition pertinente pour cerner $D(\underline{k})$:

$$k_n < k_1 + k_2 < k_i + k_{i+1}, \forall i > 1.$$

Ce cas correspond à des critères dont l'importance est relativement voisine puisque l'écart entre les poids extrêmes $k_n - k_1$ est borné par k_2 , c'est-à-dire par le second des poids dans l'ordre croissant. Le lecteur vérifiera sans peine que toute question ayant trait à l'étape n° 3 est alors sans intérêt. Il parviendra à des résultats similaires si b_n est indifférente à $b_{1,2}$.

Si, au contraire, b_n est préférée à $b_{1,2}$, il faut successivement soumettre à Z les paires $\{b_{n-1}, b_{1,2}\}$, $\{b_{n-2}, b_{1,2}\}$, ... jusqu'à obtenir soit une indifférence, soit une préférence en faveur de $b_{1,2}$ ¹. Soit b_{j_1} la première action avec laquelle cette transformation des préférences est observée. Il vient, d'après (r.5.4.1) et (r.5.4.2) (selon la réponse fournie par Z) :

$$\begin{aligned} k_{j_1} & \text{ voisin de } k_1 + k_2 \text{ ou} & (r.5.4.4) \\ k_{j_1} & < k_1 + k_2 < k_{j_1+1}. \end{aligned}$$

Arrêtons-nous un instant sur la solution $j_1 = n - 1$. C'est la preuve qu'il n'existe qu'un seul couple (i, j) répondant à l'objectif de l'étape n° 2 : celui concerné par (r.5.4.4) avec $j_1 = n - 1$. Nous verrons qu'alors l'étape n° 3 n'a qu'une portée limitée. Dans ce qui suit, jusqu'à la fin de l'étape n° 3, nous nous intéresserons surtout au cas $j_1 < n - 1$.

La plus petite valeur possible pour j_1 est 3. Il se peut toutefois que l'on ait b_3 préférée à $b_{1,2}$. La transformation des préférences envisagée plus haut ne se produit donc pas et il n'y a pas de solution en j_1 pour $i = 1$. L'inégalité $k_1 + k_2 < k_3$ obtenue dans ces conditions montre la faible importance accordée aux critères g_1 et g_2 .

¹ Faisons observer que la nature des actions à comparer rend ici peut vraisemblable le troisième type de réponse envisagé plus haut à propos de a et b.

Le cas $i = 2$ peut être étudié exactement selon les mêmes modalités que le cas $i = 1$. Il conduira de la même façon :

- soit à $k_n - k_2 < (\text{ou voisin de}) k_3$ et l'intérêt de l'étape n° 2 sera épuisé ;
- soit à la mise en évidence d'une valeur $j_2 \geq j_1$ vérifiant des conditions similaires à (r.5.4.4) : selon la valeur de la différence $n - j_2$, l'homme d'étude poursuivra ou non dans le cadre de l'étape n° 2 ;
- soit à $k_2 + k_3 < k_4$; si cette éventualité se produit (de même que si $n - j_2$ est élevée), l'homme d'étude pourra envisager le cas $i = 3$.

Etape n° 3 : Trouver des valeurs de h, i et j telles que $k_i + k_{h-1} < k_j < (\text{ou voisin de}) k_i + k_h$ ($h \neq i + 1$)

En tout premier lieu, il convient de poser $i = 1$. La solution en j vérifie alors nécessairement $j > j_1$. Pour $j_1 = n - 1$, ceci implique $j = n$ et la seule information à rechercher concerne alors la plus petite valeur de h (si elle existe) telle que $k_n < k_1 + k_h$ (laquelle permet de borner supérieurement $k_n - k_1$). Il faut pour cela faire intervenir successivement les paires $\{b_n, b_{1,3}\}, \{b_n, b_{1,4}\}, \dots$

Pour $j_1 < n - 1$, il est intéressant de commencer en posant $j = n$: en faisant comparer les mêmes paires que ci-dessus, on obtiendra (si elle existe) la plus petite valeur de h telle que $k_n - k_1 < k_h$. En adoptant une valeur de j intermédiaire entre n et j_1 , on pourra mettre en évidence la plus petite valeur de h (si elle existe) telle que $k_j - k_1 < k_h$.

Les cas $i = 2, 3, \dots$ peuvent être étudiés de la même façon. Ils sont respectivement limités aux valeurs de j vérifiant $j \geq j_2, j \geq j_3, \dots$. Etant donné que $j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \dots$, le champ de variation de j se restreint progressivement et s'annule après $j_1 = n - 1$. Cela montre que seules les petites valeurs de i présentent normalement de l'intérêt sauf si j_1 est proche de son maximum $j_{n-2} = n - 1$. Cette situation extrême correspond à $k_{n-2} + k_{n-1} < k_n$, ce qui révèle une forte disparité des poids les plus élevés.

Tous les cas évoqués ci-dessus ne pouvant être examinés (cf. principe n° 6), l'homme d'étude a intérêt à exploiter l'information successive qu'il acquiert sur les différences de type $k_j - k_i$ (borne inférieure de valeur élevée ou, au contraire, borne supérieure de valeur faible) pour choisir les zones-cibles de ses questions ultérieures. Il est clair que sa stratégie doit être différente selon la façon dont il a pu borner $k_n - k_1$ ou encore selon qu'il existe ou non certaines valeurs de i telles que $k_{i+1} - k_i$ se trouve être bornée inférieurement par une valeur élevée ou supérieurement par une valeur faible.

Etape n° 4 : Pour des valeurs de $i < r < s < j$ judicieusement choisies, connaître la position relative de $k_i + k_j$ et $k_r + k_s$

Par valeurs judicieusement choisies, on entend des valeurs telles que la position relative en question ne peut être logiquement déduite des relations déjà établies. Dès qu'une inégalité de la forme $k_r + k_s < k_h$ (avec $r > 1$) aura été établie, il deviendra inutile de s'intéresser à des quadruplets (i, r, s, j) vérifiant $j \geq h$.

Des quadruplets pourront être judicieusement choisis à partir de résultats de la forme $k_r + k_s > k_h$ avec $1 < r < s < h$. Les valeurs $i = 1, 2, \dots, r-1$ peuvent alors être successivement envisagées en faisant comparer les paires $\{b_{i,r}, b_{r,s}\}$.

Il est clair que les réponses de Z peuvent (ne serait-ce que sous l'effet de la fatigue) engendrer des contradictions avec le modèle. Dans ce cas, le domaine $D(\underline{k})$ défini par les conditions recueillies sera vide. Il n'est donc pas sans intérêt pour l'homme d'étude de pouvoir détecter, aussitôt qu'elle est formulée, toute réponse incompatible avec celles qui l'ont précédé. La technique de description segmentée (cf. Roy (1969-1970, ch. 10)) dont il va être question ci-après permet d'y parvenir aisément (elle a été programmée par Mousseau (1993)). A quelque moment qu'elle soit décelée, la séquence de réponses qui recèlent une contradiction peut être montrée à Z . Il est en général simple de lui faire comprendre en quoi consiste cette contradiction. Il convient alors de savoir laquelle des réponses mérite d'être modifiée.

Considérons désormais un domaine $D(\underline{k})$ défini par un ensemble de conditions de type (r.5.4.1), (r.5.4.2), (r.5.4.3). Il n'est pas restrictif de poser $k_1 = 1$ (cf. 3.2.3 c)). La technique de description segmentée a pour objet de délimiter (grâce à un algorithme décrit dans la référence qui vient d'être citée) des segments successifs sur lesquels les différents poids $k_2, \dots, k_n$ définissant un élément de $D(\underline{k})$ (supposé non vide) peuvent librement varier. Ces segments sont respectivement de la forme :

$$f_2^m \leq k_2 \leq f_2^M \quad (\text{r.5.4.5})$$

$$f_3^m(k_2) \leq k_3 \leq f_3^M(k_2) \quad (\text{r.5.4.6})$$

$$f_4^m(k_2, k_3) \leq k_4 \leq f_4^M(k_2, k_3) \quad (\text{r.5.4.7})$$

...

$$f_n^m(k_2, k_3, \dots, k_{n-1}) \leq k_n \leq f_n^M(k_2, k_3, \dots, k_{n-1}) \quad (\text{r.5.4.8})$$

où les bornes inférieure f_j^m et supérieure f_j^M sont des nombres pour $j = 2$ et des fonctions de plus en plus complexes lorsque j croît jusqu'à n . Ces bornes, que la procédure de description segmentée permet de calculer, sont telles que $\underline{k} \in D(\underline{k})$ si et seulement si les composantes de $\underline{k}$ vérifient le système d'inégalités (r.5.2.5) à (r.5.2.8). Ce système constitue, par définition, la **description segmentée** de $D(\underline{k})$. Précisons enfin que l'algorithme qui permet de construire les bornes f_j^m et f_j^M permet également de déceler les séquences de conditions contradictoires lorsqu'il en existe.

La description segmentée de $D(k)$ présente de l'intérêt car elle permet une exploration rapide et facile du domaine. En attribuant successivement, à chacun des poids $k_2, \dots, k_n$, une valeur voisine du milieu de l'intervalle qui lui est imparti, on définit un jeu de poids que nous qualifierons de central. On peut, de la même façon, définir des jeux de poids dans lesquels certains des k_i sont positionnés au voisinage de l'une ou de l'autre de l'extrémité du segment. Il est aisé de générer, sur ces bases, une famille de jeux de poids relativement contrastés dont on verra l'intérêt pour l'analyse de robustesse. Climaco (1992) a récemment exploré une autre voie pour tirer parti de cette description segmentée en vue de mettre en évidence l'impact sur certains types de conclusions du jeu de poids retenu.

Attirons, pour terminer, l'attention sur l'intérêt qu'il y a à obtenir, dans le cadre de l'étape n° 4, des inégalités de la forme $k_i + k_j < k_r + k_s$. Elles sont souvent utiles pour compléter celles de la forme $k_j < k_i + k_n$ obtenues dans le cadre des étapes n° 2 et 3 en vue d'affaiblir les bornes supérieures f_j^M grâce à $k_j < k_r + k_s - k_i$. L'absence de telles contraintes peut conduire à un domaine $D(k)$ trop ouvert, laissant la place à des jeux de poids qui s'évaluent sur un intervalle $[k_i = 1 ; k_n]$ peu réaliste. Pour cette raison et pour d'autres, il est recommandé de soumettre à l'appréciation de Z , outre le jeu de poids central, un certain nombre de jeux de poids extrêmes afin d'en discuter l'intérêt. Cela peut amener l'homme d'étude à formuler quelques questions supplémentaires¹ permettant de justifier certaines inégalités additionnelles pertinentes pour réduire $D(k)$.

5.4.3 Attribution de valeurs aux seuils de veto v_j

La signification des seuils de veto v_j se fonde sur les considérations développées au 3.1.3 dont nous conserverons ici les notations. Ce concept permet d'appréhender la notion d'importance sous une autre facette que celle concernée par les poids. Comme on l'a vu dans les sections 5.2 et 5.3, toutes les PAMC de type II ne font pas intervenir ce concept. Ce qui suit concerne donc essentiellement les PAMC utilisées dans les méthodes ELECTRE.

Cette facette de l'importance, appréhendée grâce au veto, n'apparaît pas avec la même évidence, aux yeux des intervenants d'un processus de décision, que celle appréhendée par les poids.

¹ Voir à ce sujet le 8.4.1 qui fait intervenir une description segmentée très simple en raison du grand nombre d'égalités que comportent les conditions recueillies.

Toutefois, l'idée de veto, qui renvoie elle aussi aux procédures de vote, est familière et généralement facile à faire admettre comme étant pertinente. Il n'en demeure pas moins plus facile d'attribuer une valeur aux k_j qu'aux v_j . Cela tient en partie au fait que le praticien ressent fréquemment les premières comme moins arbitraires que les secondes.

Rappelons (cf. 3.1.6) que v_j , comme k_j , est une donnée de type I. Contrairement aux poids, les veto ne sont pas invariants lorsqu'on modifie l'unité du critère g_j ou lorsqu'on lui substitue un autre codage par transformation monotone. Rappelons enfin que v_j (contrairement aux k_j) n'est pas obligatoirement un nombre mais peut varier avec l'une des deux performances concernées. Dans (r.3.1.6), le seuil de veto a été rapporté à la plus mauvaise des deux performances (ce qui en fait un seuil direct ¹) mais rien n'interdit de le faire varier en fonction de la meilleure (seuil inverse).

Pour attribuer des valeurs aux v_j , il convient tout d'abord de se demander, pour chaque critère g_j , si, compte-tenu de sa nature et de l'importance qui lui est accordée, on (c'est-à-dire l'homme d'étude, en concertation avec l'intervenant Z) juge souhaitable ou convenable d'attribuer à g_j le pouvoir de s'opposer à un surclassement unanime de la part des autres critères. Pour raisonner ce jugement, on peut faire intervenir deux actions a et b telles que (comme dans (r.3.1.6)) tous les critères autres que le $j^{\text{ème}}$ sont nettement favorables à b tandis que $g_j(b)$ est une des plus mauvaises performances envisageables et $g_j(a)$ une des meilleures. L'homme d'étude peut ensuite faire réagir Z vis-à-vis de la paire {b, a}. Deux cas sont alors possibles ² :

¹ Cf. MMCAD, 9.3.2.

² Dans la logique non totalement compensatoire qui est celle des PAMC de type II, aucun autre cas n'est possible à moins que le critère g_j ait, à lui seul, une importance prépondérante ($k_j \geq \sum_{i \neq j} k_i$), ce qui pourrait conduire à a préféré ou indifférent à b. Dans ce cas, la valeur de v_j est sans grande importance. Nous n'envisagerons pas cette situation dans la suite.

1er cas : Z considère, sans hésitation, b comme préférable à a.

2e cas : Z éprouve des difficultés pour porter un jugement de comparaison entre a et b.

Dans le premier cas, il convient de ne reconnaître aucun pouvoir de veto à g_j . Cela équivaut à attribuer à v_j une valeur suffisamment élevée eu égard à l'étendue L_j de l'échelle E_j (v_j légèrement supérieur à L_j convient, sauf dans ELECTRE III, comme nous l'expliquerons en fin de paragraphe). Ce cas se rencontre principalement avec les critères de faible poids. Il n'est cependant pas exclu de reconnaître un pouvoir de veto effectif à un critère de très faible poids alors qu'un critère de poids égal ou supérieur n'aura pas ce pouvoir (cf. 8.4.2).

Dans le second cas, g_j doit se voir reconnaître un pouvoir de veto effectif : $v_j \leq (g_j(a) - g_j(b))$. Pour en fixer la valeur, on peut prendre appui sur les considérations qui suivent.

Partant des deux actions a et b considérées ci-dessus, on peut réduire progressivement la performance $g_j(a)$ (sans modifier aucune autre performance) de façon à appréhender une borne supérieure du veto notée $v_j^M[g_j(b)]$. En posant $g_j(a) = g_j(b) + p_j[g_j(b)]$ et en faisant croître $g_j(a)$, on peut, de la même façon, mettre en évidence une borne inférieure notée $v_j^m[g_j(b)]$.

L'homme d'étude doit chercher à savoir s'il convient de concevoir v_j comme dépendant ou indépendant de $g_j(b)$. Il peut pour cela chercher les raisons capables de justifier une influence sur v_j^M et v_j^m de la valeur initialement choisie pour $g_j(b)$. S'il n'en trouve pas, v_j peut être regardé comme constant. S'il en trouve, leur analyse doit permettre de prendre en compte analytiquement l'influence qu'il souhaite faire intervenir. Il peut par exemple poser (comme c'est le cas dans la plupart des logiciels) :

$$v_j[g_j(b)] = \alpha_j \cdot g_j(b) + \beta_j \text{ avec } \alpha_j \geq -1 \text{ (cf. (r.3.1.7))}$$

$$\text{et } \alpha_j \cdot g_j + \beta_j \geq p_j(g_j).$$

Le plus fort pouvoir de veto envisageable est obtenu en posant $g_j(b) = p_j[g_j(b)]$: dans ces conditions, dès que le critère g_j est

discordant, le surclassement b S a est rejeté. Comme on l'a déjà suggéré au 3.1.3, il peut être pertinent de chercher à raisonner la plus ou moins grande force qu'il convient de conférer à ce pouvoir de veto en prenant appui sur le rapport $\frac{v_j}{p_j}$ (lorsque $p_j \neq 0$) : plus ce rapport est proche de 1 et plus cette force est élevée. On peut également souhaiter faire intervenir, dans cette analyse, l'étendue L_j de l'échelle du critère j puisqu'il n'y a pouvoir de veto effectif que si :

$$p_j \leq v_j \leq L_j.$$

Ceci montre l'intérêt que peut avoir l'indicateur $\frac{v_j - p_j}{L_j - p_j}$ (qui prend la valeur 0 pour une force maximum et 1 pour une force minimum). Rappelons que, quel que soit l'indicateur choisi, il ne faut pas chercher une liaison trop rigide entre l'ordre des critères qui en découle et celui défini par l'ordre des poids k_j . Si les seuils de veto et les poids concernent la même notion d'importance, ils se rapportent à deux facettes (cf. 3.1.2 et 3.1.3) qui peuvent faire apparaître des différences.

Soulignons que, en renforçant le pouvoir de veto d'un critère, on tend à appauvrir le s.r.p. découlant de la PAMC : certains surclassements peuvent disparaître (dans le cas de systèmes nets), la crédibilité de certains surclassements peut être réduite (dans le cas de systèmes flous). En attribuant des valeurs particulièrement faibles au veto, on court donc le risque de voir apparaître un très grand nombre de paires d'action incomparables. Dans ELECTRE III, il importe en particulier de ne pas perdre de vue l'aspect suivant : le mécanisme du veto (cf. (r.5.3.11) et (r.5.3.12) et principes n° 3 et n° 5 au 5.3.2 b)) peut affaiblir (sans toutefois l'annuler) la crédibilité d'un surclassement avant même que le seuil de veto ne soit atteint. Il peut de ce fait être prudent d'admettre qu'une hésitation de Z pour porter un jugement de préférence entre b et a (cf. second cas envisagé plus haut) peut correspondre, dans certains cas, à un degré de crédibilité non strictement égal à 0.

Les considérations qui précèdent expliquent que, dans bien des cas, pour certains des critères tout au moins, il serait arbitraire de n'attribuer qu'une seule valeur au veto $v_j[g_j(b)]$. C'est pourquoi on juge souvent plus satisfaisant de lui attribuer un intervalle $[v_j^m[g_j(b)] ; v_j^M[g_j(b)]]$ en cherchant toutefois à cerner une valeur centrale jugée comme étant la plus satisfaisante. Sur ces bases, il sera ensuite facile de générer (en vue de l'analyse de robustesse, cf. 5.4.4) un certain nombre de jeux de veto. Faisons observer que les intervalles $[v_j^m ; v_j^M]$ n'ont aucune raison d'être dépendants les uns des autres, contrairement à ce qui se passe avec les k_j (cf. fin du 5.4.2 d)).

5.4.4 Analyse de robustesse

Avant même de présenter ce concept, soulignons qu'il n'est pas propre aux PAMC de type II : il concerne de la même façon les PAMC de type I comme on l'a vu au 4.6. Il s'ensuit que, pour l'essentiel, ce qui est dit dans ce paragraphe dépasse le cadre du présent chapitre (seules les modalités de mise en œuvre qui figurent en fin de paragraphe lui sont véritablement spécifiques).

Comme on l'a vu à maintes reprises dans ce livre, si rigoureuse et scientifique que veuille être une démarche d'aide à la décision, l'homme d'étude se heurte à des sources d'arbitraire qui l'obligent à attribuer à certaines grandeurs une valeur conventionnelle (parce que les grandeurs en question sont mal connues, difficilement prévisibles ou encore mal déterminées). Il doit également prendre des options de modélisation qui font intervenir des éléments techniques, lesquels lui laissent une certaine marge de liberté (elle aussi source d'arbitraire) pour achever de définir son modèle. Tout cela amène fréquemment l'homme d'étude à hésiter sur la valeur à attribuer à ce que nous appellerons :

- des **paramètres économiques** : coefficients d'importance, seuils de veto, seuils de préférence, moyennes ou écarts-types dans une distribution de probabilités, coefficients caractérisant l'attitude face au risque dans une fonction d'utilité, ... ;
- des **paramètres techniques** : valeurs du niveau de concordance dans ELECTRE I ou IS (cf. 5.2.1), relations à retenir dans ELECTRE IV (cf. 5.3.1 b)), forme analytique à adopter pour une

distribution de probabilités ou encore pour une fonction d'utilité (cf. 4.2.1.3 et 4.5.3).

Il peut lever ces hésitations simplement en attribuant, à chacun de ces paramètres, une valeur que nous qualifierons de centrale en ce sens que, dans la marge d'arbitraire qui lui est laissée, elle occupe une position aussi peu extrême que possible. Il peut aussi chercher à l'encadrer en appréhendant des valeurs par excès et par défaut (cf. 5.4.2 et 5.4.3) qui, tout en demeurant acceptables, ne peuvent plus être regardées comme centrales.

En fixant la valeur de chaque paramètre à sa valeur centrale, l'homme d'étude définit, en relation avec la PAMC retenue, un système relationnel de préférences particulier que nous désignerons désormais sous le nom de **système relationnel de référence** (ou, plus brièvement, **système de référence**). En appliquant une procédure d'exploitation à ce système de référence, il obtiendra des résultats lui permettant d'élaborer des recommandations. Ces dernières peuvent être plus ou moins tributaires des valeurs particulières attribuées à chaque paramètre. Des valeurs différentes auraient pu conduire à d'autres systèmes relationnels (sensiblement distincts du système de référence) aboutissant éventuellement à d'autres résultats et, peut-être, à d'autres recommandations. N'auraient-elles pas été, apparemment, tout aussi valables ?

Il est classique d'affronter cette question grâce à ce qu'il est convenu d'appeler une **analyse de sensibilité**. Elle consiste à analyser l'influence de chacun des paramètres sur le résultat de la procédure d'exploitation. Elle permet notamment de mettre en évidence ceux des paramètres dont la valeur, lorsqu'elle varie autour de sa position centrale, affecte le plus fortement les résultats. Une analyse de sensibilité ainsi conçue est loin d'être sans intérêt. Toutefois, les informations qu'elle fournit ont souvent un intérêt plus théorique que pratique. Pour le décideur, savoir qu'avec un jeu de paramètres J_1 telle décision paraît être la mieux adaptée et qu'elle doit être modifiée comme ceci ou comme cela selon que l'on augmente ou diminue la valeur de tel ou tel paramètre, n'aura souvent une portée concrète qu'assez restreinte. Il lui faut en effet décider, de façon unique, sans savoir s'il est

"réaliste de parier" sur J_1 ou sur des valeurs différentes de tel ou tel paramètre, sources d'instabilité des résultats. Ce qu'il attend en général, c'est de pouvoir connaître si une décision D_1 , justifiée à partir de J_1 , s'avèrera encore relativement satisfaisante ou, au contraire, tout-à-fait inadaptée si, dans le futur, on constatait que J_1 n'était pas un jeu convenable pour raisonner. Un catalogue détaillé indiquant, de façon nuancée, la recommandation la mieux adaptée aux diverses hypothèses de travail caractérisées par J_1 , J_2 , ... susceptibles de la modifier ne répond que très imparfaitement à une telle attente.

La réponse de l'homme d'étude sera, au contraire, plus satisfaisante s'il parvient à élaborer des recommandations très synthétiques, acceptables pour une vaste gamme de valeurs des paramètres économiques et techniques. De telles recommandations doivent être étayées à partir de conclusions que nous qualifierons de robustes. Par définition, une conclusion C sera dite **robuste** face à un domaine $\mathcal{S}$ de variation de certaines paramètres s'il n'existe aucun jeu $J \in \mathcal{S}$ qui invalide clairement C . Par **analyse de robustesse**, on désigne toute façon de faire qui concourt à l'élaboration de recommandations synthétiques fondées sur des conclusions robustes.

Le concept d'analyse de robustesse, tel qu'il vient d'être esquissé, mériterait d'être précisé mais cela sortirait du cadre de ce livre. Ce concept s'est déjà avéré très fécond dans divers travaux d'aide à la décision comme on le verra notamment dans les trois derniers chapitres de ce livre ¹. Nous schématisons ci-après une façon possible de conduire une analyse de robustesse. C'est celle que nous avons adoptée dans la plupart de nos travaux. D'autres façons de faire peuvent être cependant envisagées.

Notons J_0 le jeu de valeurs centrales sur lequel se fonde le système de référence. La mise en œuvre d'une procédure d'exploitation fournit divers résultats bruts (noyaux, affectations, préordres, ... comme on le montrera au chapitre 6). Sur de telles bases, l'homme d'étude tire des conclusions provisoires C_0 . Il peut

¹ Voir aussi Valbon-Sutour (1993) et Roy et al. (1983).

ensuite chercher à les mettre à l'épreuve en examinant si ces conclusions C_0 demeurent toujours, sinon parfaitement valides, du moins à peu près acceptables, lorsqu'il substitue à J_0 un autre jeu de valeurs. Les jeux substituables possibles sont évidemment très nombreux car, même s'il ne retient, pour chaque paramètre, que trois valeurs (la valeur centrale et les valeurs par excès et par défaut), la combinatoire qui en découle conduit à 3^m jeux, m désignant le nombre des paramètres pour lesquels la marge d'arbitraire mérite d'être prise en considération. Il peut donc, pour débiter l'analyse de robustesse, procéder à cette substitution en ne faisant intervenir que les jeux d'une première famille, en nombre restreint (quelques dizaines), choisis de façon à être suffisamment contrastés pour être en mesure de déceler les variations auxquelles les conclusions C_0 résistent le moins bien. Cela doit lui permettre :

- D'affiner les conclusions C_0 , éventuellement de les affirmer ou, au contraire, de les transformer ; cela peut l'amener, dans certains cas, à remettre en question le choix des valeurs centrales, autrement dit à remplacer J_0 par J_1 ; notons C_1 les conclusions révisées sur la base de la première famille prise en considération.

- De considérer les conclusions C_1 comme suffisamment robustes et d'interrompre l'analyse ou, au contraire, d'être amené à introduire une seconde famille pour éprouver plus précisément les conclusions C_1 (toujours selon le même schéma).

- Dans le cas où le domaine initial $\mathcal{S}$ considéré globalement aboutirait à des conclusions trop pauvres, de délimiter quelques sous-domaines $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$ (formant un recouvrement de $\mathcal{S}$) afin d'obtenir des conclusions robustes suffisamment riches pour chacun d'eux : cela s'avère nécessaire lorsque des renversements de préférences ont lieu quand certains paramètres franchissent des valeurs critiques en entraînant un impact très marqué sur les résultats qui empêche d'aboutir à des conclusions robustes (non triviales) sur un domaine de variation s'étendant assez loin de part et d'autre des valeurs critiques.

Terminons ce paragraphe par quelques considérations pratiques utiles pour conduire une analyse de robustesse dans le cas des PAMC qui nous intéressent

dans ce chapitre.

Concernant les principaux paramètres économiques que sont les k_j et les v_j , nous avons vu, aux 5.4.2 et 5.4.3, comment on peut cerner la marge d'arbitraire qui affecte leurs valeurs. Comme on le verra au 6.2.2, la procédure d'exploitation d'ELECTRE IS prend en charge une part de l'analyse de robustesse concernant ces paramètres. Pour conduire aisément jusqu'au bout cette analyse de robustesse, que ce soit dans cette dernière méthode ou dans les autres méthodes de type ELECTRE, il est particulièrement utile de disposer d'un accès facile, pour n'importe quel couple (b, a) , à la liste des critères discordants, chacun d'eux étant accompagné de la valeur de l'écart des performances. Cette liste est en effet invariante face à une modification des k_j et des v_j ainsi que face à celle de certains paramètres techniques tel le niveau de concordance. Elle facilite par conséquent l'interprétation des résultats de la procédure d'exploitation obtenus relativement à une famille de jeux de valeurs des paramètres. Elle aide également à déceler les valeurs critiques les plus pertinentes.

La valeur à attribuer au niveau de concordance s (qui intervient dans ELECTRE I, IS, II ainsi que dans TACTIC ¹) est fréquemment source d'embarras. En effet, bien que les considérations développées au début du 5.2.1 a2) (à propos de l'exigence n° 1) donnent une signification claire à la valeur choisie pour s , celle-ci ne s'impose pas pour autant de toute évidence. Ce paramètre technique peut théoriquement varier dans un intervalle $[1/2, s^*]$ qui est, en général, suffisamment large pour conduire à des transformations profondes du système de préférences lorsque s le décrit. Il est presque toujours légitime de réduire cet intervalle théorique à une portion pertinente notablement plus étroite. On peut pour cela :

-- Prendre appui sur l'ordre de grandeur des k_j pour établir une courte liste de coalitions concordantes "minimales" en ce sens qu'une coalition concordante qui serait strictement incluse dans l'une d'entre elles ne devrait pas entraîner l'acceptation d'un surclassement. Cela permettra fréquemment d'élever la borne inférieure nettement au-dessus de $1/2$.

-- Examiner, pour le jeu de valeurs centrales considéré, la manière dont se distribuent les valeurs de l'indice de concordance. Si (comme c'est fréquemment le cas), à de rares exceptions près, elles sont significativement inférieures à s^* , il faut s'attendre à ce que des valeurs s proches de cette borne ne présentent guère d'intérêt, ce qui peut justifier de retenir une borne supérieure plus faible. Dans tous les cas, il peut être intéressant d'analyser la composition des coalitions qui attribuent, à l'indice, des valeurs voisines de la borne

¹ Ce qui suit, bien que rédigé par référence directe aux méthodes ELECTRE, se transpose très simplement à TACTIC.

supérieure que l'on souhaite adopter. On doit en effet se demander si des sous-coalitions (donc de poids moindre) ne seraient pas suffisantes pour accepter le surclassement : ceci peut amener à réduire encore la valeur de la borne supérieure de s .

L'examen de la distribution des valeurs prises par l'indice de concordance, pour un jeu de poids donné, peut également permettre de déceler d'étroites zones critiques telles que si s les franchit vers le haut, plusieurs surclassements sont refusés alors que le franchissement vers le bas amène à accepter tous ces surclassements. Il importe alors d'examiner séparément les résultats de part et d'autre d'une telle zone et d'interpréter leur variation pour formuler des conclusions synthétiques robustes.

5.5 COMPLÉMENTS THÉORIQUES

On a présenté, au 5.2 et au 5.3, un certain nombre de PAMC visant à construire un ou plusieurs systèmes de préférences sur un ensemble d'actions. Cette présentation en a été faite avec un souci d'opérationnalité en détaillant avant tout le mécanisme et le bien-fondé de ces PAMC.

Cette section aborde un certain nombre d'interrogations théoriques à propos de ces PAMC. Ces interrogations sont, pour la plupart, issues d'une littérature récente et de nature assez technique. On cherchera avant tout ici à attirer l'attention du lecteur sur ces travaux, sans chercher à présenter, de façon formelle, les concepts et résultats qu'ils contiennent. Ceci obligerait en effet à des développements techniques qui sortiraient du cadre du présent ouvrage. De plus, ces travaux récents concernent une recherche toujours en cours et sont loin d'apporter des réponses à toutes les questions que l'on est en droit de se poser à propos de ces PAMC.

Nous structurerons cette section autour de trois interrogations :

- a) Peut-on obtenir une relation quelconque avec une PAMC de type II ?
- b) A quelles conditions une relation obtenue avec une PAMC de type II peut-elle posséder des propriétés remarquables de transitivité ou de complétude ?
- c) Peut-on axiomatiser des PAMC de type II ?

a) Peut-on obtenir une relation quelconque avec une PAMC de type II ?

On a souligné, au 5.2 et au 5.3, que le ou les systèmes de préférences issus des PAMC présentées dans ce chapitre ne possédaient pas, en général, des propriétés remarquables de transitivité ou de complétude. A l'exception des procédures par compensation probante ¹ présentées au 5.3.2 c), les systèmes de préférence dont il a été question dans ce chapitre ont été obtenus par application d'un principe général de concordance-discordance. Il est tentant de croire que même si ces systèmes ne possèdent pas de propriétés remarquables de transitivité ou de complétude, ceux-ci ne sont pas pour autant quelconques. Une façon, détournée, de s'en assurer consiste à se demander si les résultats possibles des PAMC présentées dans ce chapitre possèdent ou non certaines "propriétés structurelles".

La réponse à cette question pour une PAMC donnée sera négative si, étant donné un système de préférences quelconque sur un ensemble d'actions, on peut toujours bâtir un "jeu de données", c'est-à-dire :

- un tableau de performances évaluant ces actions sur une famille de critères et

- un jeu de paramètres (coefficients d'importance, seuil de veto, etc.) de telle sorte que l'application de la PAMC sur le tableau de performances avec le jeu de paramètres construit fournisse comme résultat le système de préférences donné au départ ².

Déterminer, pour une PAMC donnée, si l'ensemble de ses résultats possibles possède ou non certaines "propriétés structurelles" soulève, dans le cas général, des questions difficiles ³. Contentons-nous ici de leur apporter une

¹ Pour une étude théorique des systèmes de préférences dans les procédures par compensation probante, nous renvoyons à Bana e Costa et Vincke (à paraître). Dans la suite de cette section, on ne s'intéressera pas plus avant à ces PAMC.

² Si tel est le cas pour une PAMC donnée, ceci ne traduit nullement une quelconque réserve quant à son intérêt pour l'aide à la décision. Un tel résultat signifierait simplement que les principes utilisés par cette PAMC pour déterminer la résultante des conflits entre critères peuvent conduire à tout système de préférences.

³ Notons qu'il est néanmoins important d'y faire face si l'on souhaite tenter une analyse théorique des procédures d'exploitation présentées au chapitre suivant. La difficulté de ce problème tient à ses liens avec la question classique des "probabilités binaires de choix". Ces liens sont précisés dans Bouyssou (1992a). On trouvera une vue d'ensemble du problème des "probabilités binaires de choix" dans Fishburn (1992b) et dans Bouyaux (1990).

réponse dans le cas d'ELECTRE I et d'ELECTRE III, c'est-à-dire avec respectivement la PAMC la plus simple et la PAMC la plus complexe que nous avons présentées dans ce chapitre.

Soit S une relation binaire nette et réflexive sur un ensemble fini A contenant m actions. Est-il possible de bâtir un jeu de données de telle sorte que l'application d'ELECTRE I à ce jeu de données fournisse comme résultat la relation S donnée au départ ? Il est facile de constater que la réponse à cette question est positive. Il suffira, pour s'en convaincre, de bâtir un jeu de données tel que :

- toutes les actions soient indifférentes sur un critère de poids fort de manière que la condition de concordance (r.5.2.3) soit vérifiée pour tout couple (a, b) d'actions ;
- un critère de poids faible soit introduit pour chaque couple d'actions (a, b) tel que $\text{Non}(a S b)$ et sur lequel les actions sont évaluées de telle sorte que $g(b) > g(a) + v(g(a))$, la condition de non veto (r.5.2.4) étant satisfaite pour tous les autres couples d'actions.

Moyennant un choix adéquat du niveau exigé de concordance, il est immédiat de constater que l'application d'ELECTRE I à un tel jeu de données redonnera bien la relation S fixée au départ ^{1 2}.

En s'inspirant d'un résultat classique en théorie du choix social (cf. Mc Garvey (1953)), on peut de plus montrer qu'il en va de même en ne considérant que la partie concordance d'ELECTRE I en ne faisant pas usage de l'idée de veto (sur ce point, voir Bouyssou (1992a)).

Les relations de surclassement bâties avec ELECTRE I ne possèdent donc aucune "propriété structurelle" puisque toute relation binaire (réflexive) peut

¹ Le jeu de données ainsi exhibé est bien entendu peu "réaliste". Mais il ne s'agit ici que de montrer qu'il est possible de retrouver, en sortie d'ELECTRE I, toute relation binaire réflexive. La technique proposée nécessite, dans le pire des cas, l'introduction de $m(m-1) + 1$ critères sur un ensemble de m actions. La détermination de la borne inférieure de ce nombre de critères soulève des problèmes combinatoires difficiles.

² L'intérêt d'un tel résultat tient au fait que, dans l'étude des procédures d'exploitation d'une relation de surclassement construite avec ELECTRE I, il sera légitime de considérer que l'on aura à faire face à toutes les relations réflexives envisageables, y compris celles pouvant apparaître les plus "curieuses".

être obtenue avec cette PAMC ¹.

En est-il de même avec ELECTRE III ? Un premier exemple simple permet de constater que les indices de concordance utilisés dans ELECTRE III (cf. (r.5.3.10)) ne sont pas quelconques. Soit en effet la relation floue T définie sur $A = \{x, y, z\}$ par le tableau 5.5.1 (que l'on lira de ligne en colonne).

Imaginer un jeu de données tel que la relation T du tableau 5.5.1 puisse être vue comme une relation de concordance issue d'ELECTRE III reviendrait à supposer que tous les critères de ce jeu de données sont unanimes pour déclarer : x est strictement préféré à y, y est strictement préféré à z et z est strictement préféré à x, ce qui est contradictoire.

Il est cependant possible de montrer que toute relation évaluée réflexive peut être obtenue par application d'ELECTRE III sur un jeu de données adéquatement conçu ². Nous nous contentons ici de donner, sans démonstration, un algorithme permettant de bâtir un tel jeu de données.

Tableau 5.5.1 : Exemple numérique

σ_T	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	1
z	1	0	1

Soit S une relation floue réflexive ³ sur un ensemble fini A contenant m actions. Si $S(a, b) = 1, \forall a, b \in A$, on retrouvera la relation S en utilisant un jeu de données constitué d'un unique critère donnant, à toutes les actions de A, une performance identique.

Dans le cas contraire, notons :

¹ Il est aisé de montrer qu'il en va de même avec TACTIC pour ce qui concerne les relations binaires asymétriques.

² Les méthodes PROMETHEE n'utilisant pas l'idée de veto, la situation est différente pour ce qui les concerne. La caractérisation des relations évaluées pouvant être obtenue avec ces méthodes est un problème difficile. On trouvera quelques éléments à ce sujet dans Bouyssou (1992a).

³ c'est-à-dire telle que $\sigma_s(a, a) = 1, \forall a \in A$.

$$R^* = \max_{\{(a,b) \in A^2 : \sigma_i(a,b) \neq 1\}} \sigma_i(a,b)$$

et

$$k = \text{card}\{(a,b) \in A^2 : \sigma_i(a,b) \neq 1\}.$$

Par hypothèse, on a $R^* \in [0, 1]$ et $k \in \{1, 2, \dots, m(m-1)\}$.

Si $R^* = 0$, il est facile de bâtir un jeu de données comportant deux critères g_1, g_2 tels que $d_{g_1}(a,b) = 1$ et $d_{g_2}(b,a) = 1$ pour toute paire d'actions distinctes $\{a,b\}$. On retrouvera donc bien la relation S après application d'ELECTRE III à ce jeu de données.

Si $R^* \neq 0$, on bâtit un jeu de données comportant $k+1$ critères tel que :

- sur le premier critère, de poids R^* , toutes les actions soient indifférentes ;
- chacun des k autres critères a un poids $\frac{1-R^*}{k}$ et correspond à un couple d'actions (a,b) tel que $\sigma_i(a,b) < 1$.

Considérons le critère g_j correspondant au couple (a,b) . On choisira, sur ce critère, les évaluations et les seuils d'indifférence et de préférence de telle sorte que :

- b soit indifférente à toutes les actions à l'exception de a ,
- a soit indifférente à toutes les actions à l'exception de b ,
- toutes les autres actions soient indifférentes entre elles,
- b soit strictement préférée à a ,

ce qui est toujours possible avec un pseudo-critère.

L'application d'ELECTRE III à un tel jeu de données donne un indice de concordance tel que :

$$c(a,b) = 1 \text{ si } \sigma_i(a,b) = 1,$$

$$c(a,b) = R^* + (k-1) \cdot \left(\frac{1-R^*}{k}\right) > \sigma_i(a,b) \text{ sinon.}$$

Sur le critère j introduit à propos du couple (a,b) , on a $a P_j b$. On a alors $d_j(a,b) > 0$ d'après (r.5.3.11). Il est de plus aisé de constater que ce critère est le seul pour lequel l'indice de discordance est strictement positif à propos du couple (a,b) .

Pour retrouver la relation floue S fixée au départ, il suffit alors de choisir, sur le critère j introduit à propos du couple (a,b) , un seuil de veto qui permette exactement d'affaiblir $c(a,b) = R^* + (k-1) \cdot \frac{1-R^*}{k}$ en $\sigma_i(a,b)$ via

(r.5.3.12). Il est aisé de constater qu'un tel choix est toujours possible ¹. Les relations de surclassement bâties avec ELECTRE III ne possèdent donc, en général, aucune "propriété structurelle".

b) A quelles conditions une relation obtenue avec une PAMC de type II peut-elle posséder des propriétés remarquables de transitivité ?

Comme nous l'avons vu au a), les structures de préférence issues des PAMC présentées dans ce chapitre sont, en général, quelconques. On conçoit bien cependant qu'un choix judicieux des divers paramètres intervenant dans ces PAMC ² puisse conduire à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité et même de complétude. Ce sera par exemple le cas avec ELECTRE I, ELECTRE III, TACTIC ou PROMETHEE si un poids très important est donné à un critère, les autres ne jouant que de façon marginale. La structure de préférence obtenue reflètera alors la structure de préférence sur le critère "dominant" qui, elle, possède des propriétés remarquables de transitivité et de complétude. En-dehors de cette situation, est-il possible de parvenir tout de même à de telles propriétés par un choix judicieux de paramètres (poids, veto, niveau de concordance, etc.) ? La réponse à cette question présente des points communs avec les nombreux travaux en théorie du choix social issus du célèbre théorème d'Arrow ³. Dans ce cadre, on se préoccupe d'agréger les préférences de n individus sur un ensemble d'objets en une préférence collective de manière à respecter trois conditions :

– une condition d'universalité stipulant que toutes les configurations possibles de structures de préférences individuelles doivent pouvoir être agrégées ;

¹ Sur tous ces points, nous renvoyons à Bouyssou (1992a). Ici encore, le jeu de données exhibé peut apparaître comme peu réaliste. Rappelons cependant que, de même qu'avec ELECTRE I, l'intérêt de ce résultat tient avant tout à ses conséquences sur l'étude des procédures d'exploitation.

² Ce sera également le cas si l'on n'applique ces PAMC que sur des tableaux de performances particuliers, par exemple ne présentant pas ou peu de conflits entre critères. Les conditions sur les tableaux de performances permettant de toujours aboutir à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité sont de plus assez restrictives et de peu d'intérêt dans le domaine du multicritère. On trouvera une analyse détaillée de ces conditions dans Arrow et Raynaud (1986).

³ Cf. Arrow (1963) et, pour une vue d'ensemble récente, Sen (1986), Suzumura (1983), Fishburn (1987, 1990b). Pour une bibliographie récente, voir Kelly (1991).

- une condition d'unanimité imposant que l'unanimité de la préférence stricte soit reflétée dans la préférence collective ;
- une condition d'indépendance imposant que, dans la structure de préférence collective, les liens unissant deux objets dépendent uniquement des liens unissant ces deux objets dans les structures de préférences individuelles.

Sous ces trois conditions ¹, on peut montrer que toujours parvenir à une structure de préférence collective ^{2 3} ayant des propriétés remarquables de transitivité (et, éventuellement, de complétude) impose de recourir à des mécanismes d'agrégation répartissant le "pouvoir" de manière très inégale entre les divers individus (existence d'un dictateur, d'une oligarchie, d'un individu avec pouvoir de veto selon les cas), ce qui semble peu satisfaisant.

Comme on l'a déjà évoqué au 3.2.4, on doit se garder d'une transposition trop rapide de ces résultats au cadre multicritère. En effet :

- les PAMC de ce chapitre intègrent une idée de discordance qui n'est pas prise en compte par les mécanismes d'agrégation traditionnellement étudiés en théorie du choix social ;
- la notion de propriété remarquable de transitivité pour les PAMC

¹ avec parfois certaines conditions techniques additionnelles portant, par exemple, sur le nombre d'objets ou le nombre d'individus.

² On suppose généralement que cette structure est une relation binaire nette. Les propriétés remarquables de transitivité consistent alors à imposer que cette relation binaire soit négativement transitive, transitive, que sa partie asymétrique soit sans circuit, etc. Outre à Arrow (1963) (cas d'une relation complète et transitive), on pourra se reporter à Weymark (1983) (cas d'une relation transitive non nécessairement complète) ; Gibbard (1969), Mas-Collell et Sonnenschein (1972) (cas d'une relation complète dont la partie asymétrique est transitive) ; Blair et Pollak (1982, 1993), Blau et Deb (1977), Kelsey (1984a et b, 1985) (cas d'une relation complète dont la partie asymétrique est sans circuit) ; Blau (1979), Blair et Pollak (1979) (cas d'un ordre d'intervalle ou d'un quasi-ordre complet). Pour une vue d'ensemble très claire de tous ces résultats, voir Sen (1986).

³ Dans le cas où la relation de préférence collective peut être floue, la définition des propriétés remarquables de transitivité est plus délicate (cf. infra). L'essentiel des résultats valables dans le cas net est néanmoins préservé. Parmi le grand nombre de travaux se rapportant à ce cas, mentionnons : Barrett et al. (1986, 1990a, 1992), Ovchinnikov (1991), Dutta (1987), Leclerc (1984), Perny (1990), Billot (1991).

conduisant à une relation valuée n'est pas toujours simple à définir ^{1 2}.

En dépit de ces difficultés, on constatera sans peine que les PAMC présentées dans ce chapitre satisfont bien à l'esprit des trois conditions traditionnellement utilisées en théorie du choix social ³. On peut alors montrer ⁴, de même qu'en théorie du choix social, que demander systématiquement d'aboutir avec ces PAMC à des structures ayant des propriétés remarquables de transitivité impose de donner, à un ou à un groupe de critères, un rôle considérable dans la procédure d'agrégation. Utiliser de telles procédures reviendrait pratiquement à négliger certains critères, ce qui apparaît comme peu satisfaisant. Cette impossibilité de parvenir, de manière raisonnable, à des structures ayant systématiquement des propriétés remarquables de transitivité explique l'attention qui sera portée, au chapitre suivant, à la manière de tirer parti de structures quelconques pour construire des recommandations dans

¹ Sur les difficultés qu'il y a à définir, pour des relations valuées, des propriétés remarquables de transitivité ainsi que des parties symétriques et asymétriques, nous renvoyons à : Perny (1992), Barrett et Pattanaik (1985), Fodor (1991), Fodor et Roubens (1992), Montero et Tejada (1986), Ovchinnikov et Roubens (1991, 1992), Ovchinnikov (1981, 1990), Perny et Roy (1992). Pour une vue générale de l'intérêt et des difficultés soulevées par une modélisation floue des préférences, on pourra également consulter : Basu et al. (1992), Barret et Pattanaik (1989).

² Avec ELECTRE III ou PROMETHEE, on cherche à agréger des relations de préférence floues. La condition d'universalité demande alors à être reformulée pour prendre en compte le caractère spécifique de la modélisation des préférences sur chaque critère dans ces méthodes. Ceci ne va pas sans soulever de difficultés. Sur ce point, voir Perny (1992).

³ Prenons ELECTRE I à titre d'exemple. Une condition de type universalité est bien respectée puisque l'on peut appliquer ELECTRE I à tout tableau de performances. L'unanimité est également respectée puisque l'on constatera facilement que $a P_i b, \forall i \in F$, implique, avec (r.5.2.3) et (r.5.2.4), indépendamment du choix des poids et des seuils de veto, que $a S b$ et $\text{Non}(b S a)$. Dans la partie concordance d'ELECTRE I, la relation de surclassement liant a à b ne dépend que des relations de surclassement liant a à b au niveau de chaque critère. Toute autre paire d'actions liée par les mêmes relations sur chacun des critères se comparera de même que a et b . Une condition de type indépendance est donc également satisfaite pour la partie concordance d'ELECTRE I. L'introduction de la condition de non discordance préserve l'esprit de cette condition.

⁴ Cf., dans le cas de relations nettes, Bouyssou (1992b) et, dans le cas de relations valuées, Perny (1990 et 1992).

diverses problématiques.

c) Peut-on axiomatiser des PAMC de type II ?

De même qu'au chapitre 4 à propos des PAMC conduisant à un critère unique de synthèse, on peut s'intéresser à l'analyse axiomatique des PAMC présentées dans ce chapitre.

Considérons, à titre d'exemple, la PAMC ELECTRE I. Soit S une relation de surclassement sur un ensemble¹ d'actions évaluées sur une famille F de n vrai-critères. L'analyse axiomatique de la PAMC ELECTRE I vise à donner des conditions nécessaires et suffisantes sur S pour qu'il existe un jeu de paramètres comprenant :

- n coefficients d'importance $k_1, k_2, \dots, k_n$,
- n seuils de veto $v_1, v_2, \dots, v_n$ et
- un niveau exigé de concordance s tel que, pour toutes actions a et b :

$$a S b \Leftrightarrow \sum_{i \in F: g_i(a) \geq g_i(b)} k_i / \sum_{i \in F} k_i \geq s$$

et

$$g_j(b) < g_j(a) + v_j(g_j(a)), \forall j \in F.$$

Une telle analyse axiomatique² permettrait de plus de discuter l'unicité du jeu de paramètres ainsi exhibé³.

Même dans des cas simples comme celui d'ELECTRE I, peu de résultats concernant une telle analyse axiomatique sont disponibles à ce jour. On

¹ De même qu'au chapitre 4, on supposera ici que l'on raisonne sur un ensemble d'actions suffisamment riche d'actions fictives pour que l'ensemble des vecteurs de performances de ces actions soit confondu avec le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ des échelles des n critères.

² Notons que le problème de l'analyse axiomatique d'une PAMC diffère de celui de la caractérisation des résultats possibles d'une PAMC abordé au a). Dans ce dernier problème, il s'agit de bâtir un tableau de performances sur un nombre non précisé de critères ainsi qu'un jeu de paramètres de telle sorte que l'application dans la PAMC, sur le tableau de performances construit avec le jeu de paramètres exhibé, redonne pour résultat une relation de surclassement fixée au départ. Dans le premier problème, on spécifie dès le départ la relation de surclassement ainsi que le tableau de performances.

³ c'est-à-dire, par exemple, en déterminant l'ensemble des jeux de coefficients d'importance permettant de retrouver la relation de surclassement fixée au départ.

trouvera, dans Bouyssou et Vansnick (1986), une analyse axiomatique détaillée de TACTIC. Si cette analyse a permis de faire ressortir certaines caractéristiques cruciales des PAMC fondées sur un principe de concordance-discordance et de discuter l'unicité des coefficients d'importance, elle utilise également des conditions difficilement interprétables du même type que celles rencontrées à propos de l'analyse axiomatique de la PAMC additive au 4.2.1.2 b). Nous ne la présenterons donc pas en détail ici, nous contentant d'indiquer la démarche générale suivie qui vaut également pour toutes les PAMC de ce chapitre conduisant à une relation nette ¹ (cf. 5.2).

Considérons une relation (asymétrique) P sur un ensemble d'actions évaluées sur une famille cohérente F de n vrai-critères $g_1, g_2, \dots, g_n$. Soit deux actions a et b telles que $a P b$. Notons $I = C(a P b)$, $J = C(b P a)$.

Une condition nécessaire pour pouvoir trouver des coefficients d'importance k_i et un seuil ρ de telle sorte que l'on puisse regarder P comme ayant été obtenue avec TACTIC est donc, d'après (r.5.2.11), que :

$$\sum_{i \in I} k_i > \rho \cdot \sum_{j \in J} k_j.$$

Puisque ρ doit être supérieur ou égal à 1, l'existence de deux actions c et d telles que :

$$\begin{aligned} d P c, \\ C(c P d) = I \text{ et} \\ C(d P c) = J \end{aligned}$$

interdira donc à P de pouvoir s'obtenir avec TACTIC.

On a donc exhibé une condition nécessaire ² sur P pour être représentable

¹ A ce jour, l'analyse axiomatique des PAMC conduisant à une relation valuée semble être un problème ouvert. On trouvera, dans Suppes et al. (1989, ch. 17), des résultats importants pouvant se rattacher à ce problème.

² Cette condition est connue, dans la littérature, sous le nom de "non compensation généralisée". Sur ce point et sur la motivation de ce nom, voir Plott et al. (1975), Fishburn (1975, 1976), Bouyssou (1986), Bouyssou et Vansnick (1986), Vansnick (1986 a et b, 1988). Si l'on ne considère que la partie concordance de TACTIC, la relation ainsi construite satisfait à une condition plus forte, connue sous le nom de "non compensation" :

$$[C(a P b) = C(c P d) \text{ et } C(b P a) = C(d P c)] \Rightarrow [a P b \Rightarrow c P d].$$

Cette condition de non compensation entretient des liens étroits avec la condition d'indépendance en théorie du choix social. Sur ce point, voir Parks (1976), Pollack (1979), Roberts (1980), Bouyssou (1992b). La généralisation

avec TACTIC pour toutes actions a, b, c et d :

$$\begin{aligned} [C(a \text{ P } b) = C(c \text{ P } d) \text{ et } C(b \text{ P } a) = C(d \text{ P } c)] \\ \Rightarrow [a \text{ P } b \Rightarrow \text{Non}(d \text{ P } c)]. \end{aligned} \quad (\text{r.5.5.1})$$

Définissons, sur l'ensemble des sous-familles disjointes de critères, une relation $\triangleright$ au contenu sémantique "plus important que" en posant, $\forall I, J \subset F$, $I \cap J = \emptyset$:

$I \triangleright J \Leftrightarrow$ il existe deux actions a et b telles que $a \text{ P } b$, $C(a \text{ P } b) = I$ et $C(b \text{ P } a) = J$.

La condition (r.5.5.1) impose à $\triangleright$ d'être asymétrique. Axiomatiser complètement la partie concordance de TACTIC revient alors à trouver des conditions permettant de s'assurer de l'existence de coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n$ et ρ tels que, pour toute sous-famille disjointe de critères I et J, on ait :

$$I \triangleright J \Leftrightarrow \sum_{i \in I} k_i > \rho \sum_{j \in J} k_j.$$

Ces conditions sont classiques^{1 2}.

La détermination des seuils de veto s'effectue en examinant les situations pour lesquelles

de ces deux conditions au cas flou n'est pas une tâche aisée. Perny (1992) montre pourquoi on peut parler de "non compensation avec possibilité de compensation locale" avec ELECTRE III et PROMETHEE. Ceci tient au fait qu'avec ces deux méthodes, accroître la différence $g_j(b) - g_j(a)$ ne peut faire croître $\sigma_s(b, a)$ ou $\sigma_p(b, a)$ que si la différence $(g_j(b) - g_j(a))$ n'est pas déjà supérieure au seuil de préférence. Un tel accroissement ne pourra donc pas nécessairement compenser une augmentation des performances de a par rapport à b sur un autre critère.

¹ On notera qu'elles sont tout-à-fait semblables à celles utilisées pour garantir l'existence d'une mesure de probabilité représentant une relation de vraisemblance entre événements (cf. Krantz et al. (1971), Roberts (1979) et Suppes et al. (1989)). Elles sont du même type que celles rencontrées au Résultat 4.2.1 et donc peu attrayantes.

² Ce qui précède montre que la connaissance de $\triangleright$ permet d'inférer la relation de concordance de TACTIC. Connaissant $\triangleright$, on peut bâtir cette relation sans avoir à donner une valeur numérique aux coefficients d'importance. Cette idée a été exploitée, couplée à des techniques inspirées de l'intelligence artificielle pour construire $\triangleright$ à partir d'un nombre limité de questions, par Pasche (1987, 1991) et Rommel (1989).

$I \triangleright J, C(a P b) = I, C(b P a) = J$ et $\text{Non}(a P b)$

qui, lorsque (r.5.5.1) est vérifiée, traduisent l'existence de critères dans $C(b P a)$ interdisant le fait d'avoir $a P b$ et donc pour lesquels un effet de veto est à l'œuvre. Un tel raisonnement se transpose sans difficultés au cas d'ELECTRE I.

Mentionnons enfin que des développements théoriques récents ¹ sur la représentation numérique de structures de préférences non nécessairement transitives permettent d'espérer arriver à un cadre formel commun rassemblant les PAMC présentées aux chapitres 4 et 5. Ces travaux reposent sur l'idée simple suivante : il est possible de reformuler la plupart des PAMC des chapitres 4 et 5 comme opérant des comparaisons par paires où l'on "pèse le pour et le contre" pour accepter une proposition en termes de préférence. De plus, le calcul de ce "pour et contre" se fait généralement en sommant "les pour" et "les contre" au niveau de chaque critère. C'est cette "sommation" des pour et des contre qui semble constituer le noyau commun à toutes les PAMC présentées aux chapitres 4 et 5.

¹ Sur ces développements, voir Bouyssou (1986), Fishburn (1990a, 1991, 1992a), Vind (1991) et Suppes et al. (1989, ch. 17.2.5).

Chapitre 6

AIDE À LA DÉCISION FONDÉE SUR UNE PAMC DE TYPE ELECTRE

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, on explique comment tirer parti, en vue de l'aide à la décision, des modèles de préférences étudiés au chapitre 5. Cela conduit, au 6.1, à introduire le concept de procédures d'exploitation, procédures qui complètent celles d'agrégation. L'origine des difficultés auxquelles se heurte la conception de telles procédures d'exploitation est successivement mise en évidence pour les problématiques du choix, du tri et du rangement (cf. 6.1.4). Des conseils pratiques pour choisir une méthode achèvent cette première section.

Dans les trois sections suivantes, on présente les procédures d'exploitation qui ont été proposées dans le cadre des principales méthodes ELECTRE et apparentées (et on achève corrélativement la présentation de ces méthodes). Dans le même souci d'opérationnalité qu'au chapitre 5, chacune des procédures (et méthodes) étudiées donne lieu tout d'abord à une présentation à caractère essentiellement algorithmique, les commentaires théoriques et pratiques faisant l'objet de deux paragraphes ultérieurs.

Les procédures et méthodes étudiées sont successivement :

- au 6.2 (problématique du choix : procédure dite de sélection) : ELECTRE I et IS ;
- au 6.3 (problématique du tri : procédure dite d'affectation) : ELECTRE TRI ;
- au 6.4 (problématique du rangement : procédure dite de classement) : PROMETHEE I et II, ELECTRE II, III et IV.

Diverses considérations théoriques relativement à ces procédures sont présentées au 6.5.

6.1 GÉNÉRALITÉS

6.1.1 Précisions sur l'objet du chapitre

Dans ce chapitre, nous supposons qu'un modèle de préférences globales fondé sur un système relationnel de synthèse (résultat d'une PAMC de type II, cf. chapitre 5) a été élaboré. On s'intéresse à la façon de l'exploiter dans une perspective d'aide à la décision. Rappelons que le modèle de préférences dont il s'agit de tirer parti pour asseoir une recommandation ou, plus simplement, pour communiquer, argumenter au sein d'un processus de décision peut faire intervenir une ou plusieurs relations de synthèse. Il peut par exemple prendre l'une des formes (S, R) ou $(P, \sim)$, S et P étant des relations nettes ou floues.

Quelle que soit la nature des relations retenues pour modéliser un jugement de préférences globales entre une action b et une action a , ce jugement est directement fondé sur la comparaison des vecteurs de performances $g(b)$ et $g(a)$. Cette façon de procéder, paire d'actions par paire d'actions, pour apprécier la force des arguments capables d'asseoir un surclassement ou une préférence stricte n'est soumise à aucune contrainte visant à assurer la transitivité des relations S ou P . De surcroît, dans le système ainsi élaboré, figure, en complément des relations S ou P , au moins l'une des relations R ou $\sim$. La structure qui est de la sorte définie sur l'ensemble A des actions potentielles ne se prête pas à une exploitation immédiate, évidente pour l'aide à la décision, contrairement à ce qui est le cas avec une PAMC de type I qui définit, sur A , une structure de préordre complet, voire de pseudo-ordre (cf. 3.2.1, remarque 2). En effet, nous aurons l'occasion de mettre en évidence (cf. 6.1.2, 6.1.3 et 6.1.4) que la façon de tirer parti de telles structures pour élaborer une recommandation va naturellement de soi, sans risque d'être entravée (quelle que soit la problématique) par des difficultés d'ordre méthodologique. Nous avons déjà eu l'occasion (cf. 5.1) d'attirer l'attention du lecteur sur le fait qu'il en va tout autrement avec les PAMC de type II. Les méthodes qui utilisent ces PAMC doivent alors comporter une autre procédure, dite **procédure d'exploitation**, destinée à tirer parti, pour l'aide à la décision, du résultat de la procédure d'agrégation. Le présent chapitre est consacré à

l'étude de telles procédures d'exploitation.

Dans le titre, il est fait référence aux PAMC de type ELECTRE. Dans ce qui suit, nous mettons en effet l'accent sur les procédures d'exploitation qui ont été conçues dans le cadre des méthodes ELECTRE ou qui se veulent du même type, comme PROMETHEE¹. Toutefois, les développements qui suivent dans la présente section (ainsi que les considérations du 6.5) valent pour toute méthode prenant appui sur une PAMC de type II.

Les sections 2, 3 et 4 de ce chapitre sont consacrées à une présentation, dans un esprit opérationnel, des principales procédures d'exploitation conçues dans le cadre des méthodes de type ELECTRE. Chacune de ces procédures est ainsi originellement couplée à l'un des modèles de préférences globales présentés soit au 5.2, soit au 5.3. Il est cependant possible dans bien des cas, moyennant des aménagements mineurs, de coupler une procédure d'exploitation avec un modèle de préférences globales issu d'une PAMC différente de celle prise en compte dans la méthode originelle. Des précautions s'imposent cependant pour que les opérations qu'implique la procédure d'exploitation restent cohérentes avec les propriétés du modèle de préférences (point de vue de la "signifiante", cf. Roberts (1979) ou Vansnick (1990)). La section 6.5 abordera un certain nombre de questions théoriques relativement à ces procédures d'exploitation.

Avant de présenter ces diverses procédures d'exploitation, nous mettons en évidence, au 6.1, ce qui les rend nécessaires ainsi que l'origine des difficultés auxquelles se heurte leur conception. Cela nous conduira à aborder quelques uns des points de vue que l'on peut adopter pour apprécier la qualité, la validité, la fiabilité d'une telle procédure et/ou de l'ensemble de la méthode couplant procédure d'agrégation et procédure d'exploitation.

Nous ne reviendrons pas, dans ce chapitre, sur ce qui peut conduire à concevoir l'aide à la décision à partir d'une PAMC de

¹ En ce sens qu'elles fondent les relations S ou P sur l'analyse de la concordance et de la discordance (cf. 3.1.2 et 3.1.3).

type ELECTRE plutôt que sur la base d'un critère unique de synthèse. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur au 5.1.2 (conditions 1 à 4 notamment) ainsi qu'aux cas concrets présentés aux chapitres 8, 9 et 10.

A partir d'un modèle de préférences globales défini sur A, l'aide à la décision peut être envisagée de différentes manières. Celles-ci dépendent avant tout des termes dans lesquels le problème est abordé, de ceux dans lesquels on souhaite formuler une éventuelle recommandation ou de ce sur quoi on souhaite prendre appui pour simplement participer à un processus de décision. Sur ces bases, nous avons montré (cf. 1.7) qu'il convenait de distinguer quatre problématiques de référence pour caractériser ces différentes manières d'envisager l'aide à la décision. Les procédures d'exploitation ayant pour objet d'aider à tirer parti d'un modèle de préférences globales (soit en vue d'élaborer une recommandation, soit en vue de contribuer à une bonne communication et argumentation au sein d'un processus de décision) ont naturellement été conçues en relation directe avec ces problématiques. En fait, trois ¹ d'entre elles, seulement sont concernées : il s'agit des problématiques du choix, du tri, du rangement (dont nous rappelons ci-après les principales caractéristiques). Une procédure d'exploitation prendra le nom de **procédure de sélection, d'affectation ou de classement** selon que l'objectif visé relève de la première, de la seconde ou de la troisième de ces problématiques. Les trois paragraphes qui suivent leurs sont respectivement consacrés. Ils feront ressortir que, pour chacune de ces problématiques, la procédure d'exploitation devient triviale si S (ou P) est transitive, ce qui est le cas avec une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère unique de synthèse. On peut alors se demander si, malgré ce qui a été dit au 5.1, il ne serait pas plus judicieux de chercher à bâtir d'emblée une relation transitive. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur au 5.5 où ont été mises en évidence les difficultés profondes que pouvait présenter cette voie.

¹ La quatrième problématique, celle de la description (cf. 1.7), n'a pas pour ambition d'élaborer un modèle formel de préférences globales et donc, encore moins, d'en proposer une exploitation systématique.

Pour conclure la présente section, on donnera, au 6.1.5, des indications destinées à guider le choix d'une méthode en fonction du contexte d'aide à la décision concerné.

6.1.2 Cas de la problématique du choix (P. α)

La problématique du choix suppose que le problème soit posé en termes de **choix final d'une seule meilleure action**. A cette fin, on cherche à déterminer un sous-ensemble A' de A qui, étant donné un s.r.p. sur A :

1°) justifie que soit éliminée, en vue du choix final, toute action $a \notin A'$,

2°) soit aussi restreint que possible.

Une façon classique d'aborder ce problème consiste à adopter une **problématique d'optimisation**. Etant donné un s.r.p. (S, R) sur A , notons :

$$A^* = \{a^* \in A : a^* S b, \forall b \in A\},$$

l'ensemble des actions optimales a^* dans A .

Trois cas peuvent alors se produire :

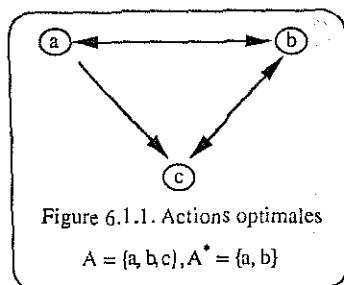
a) $\text{card}(A^*) = 1$. Il existe alors une unique action optimale a^* dans A étant donné le s.r.p. (S, R) . Cette action constitue alors un bon candidat pour le choix final. Notons cependant que le choix final de a^* ne sera pleinement justifié qu'après une analyse de robustesse.

b) $\text{card}(A^*) > 1$. Il existe alors plusieurs actions optimales dans A étant donné le s.r.p. (S, R) . Il découle de la définition de A^* que, $\forall a^*, b^* \in A^*$, $a^* S b^*$ et $b^* S a^*$, autrement dit $a^* I b^*$ et toutes les actions de A^* sont indifférentes. Notons cependant que la définition de A^* n'implique nullement que toutes les actions optimales soient de véritables ex æquo, autrement dit que, $\forall a^*, b^* \in A^*$, $\forall c \in A$:

$$a^* S c \Leftrightarrow b^* S c \text{ et}$$

$$c S a^* \Leftrightarrow c S b^*$$

comme le montre l'exemple de la figure 6.1.1.



Il est légitime, si le s.r.p. a été établi avec suffisamment de probance, d'éliminer les actions de $A \setminus A^*$ en vue du choix final. Si l'on souhaite retenir, en vue de ce choix, un ensemble aussi restreint que possible, rien n'interdit de sélectionner un sous-ensemble A' strictement inclus dans A^* . Ainsi, sur l'exemple de la figure 6.1.1, il semble raisonnable (après analyse de robustesse) de poser $A' = \{a\}$ puisque b , tout en étant optimale, se compare moins favorablement à c que a .

c) $A^* = \emptyset$. Ce cas est le plus vraisemblable dès lors que, dans le s.r.p. (S, R) considéré, S ne jouit pas de propriétés remarquables de transitivité et $R \neq \emptyset$, ce qui est généralement le cas avec des s.r.p. obtenus par application d'une PAMC de type II.

La problématique du choix est un élargissement de la problématique de l'optimisation. Elle permet de faire face aux cas, fréquents, où $A^* = \emptyset$ ou $\text{card}(A^*) > 1$.

Dans le cas général, les actions de A' se présentent comme pouvant être préconisées en vue d'une sélection sur la base de laquelle sera ultérieurement effectué le choix final. Une telle **procédure de sélection** (conçue selon P.α) doit permettre de justifier l'élimination de chacune des actions $a \notin A'$ par référence à la sélection faite. Cette justification ne peut pas faire abstraction des éléments de probance et, a contrario, de fragilité de la PAMC avec laquelle cette procédure d'exploitation est couplée. Si $\text{card}(A') > 1$, le choix final, parmi les actions sélectionnées ou

représentées, nécessitera ultérieurement une étude plus poussée, sur la base d'informations additionnelles, voire de critères complémentaires, des conséquences et du mode de comparaison des actions sélectionnées. Ceci doit faire l'objet d'une ultime phase d'étude portant sur un ensemble d'actions aussi restreint que possible. Le sous-ensemble A' ne doit donc comporter aucune action b dont l'élimination pourrait être justifiée par la sélection d'un ensemble plus restreint tel que $A' \setminus \{b\}$. C'est dire que si b est un tant soit peu, mais sans contestation possible, moins bonne, moins adaptée ou moins prioritaire que a , alors il est légitime d'éliminer b , même si l'écart de préférence entre a et b est si faible ou si peu probant que la modélisation aurait pu conduire à poser $a \succ b$. Nous nous référerons par la suite à une telle action b en la qualifiant de "brillant second". Il est important de conserver à l'esprit, aussi bien en vue des applications pratiques que pour l'étude du présent chapitre, cette logique de l'élimination systématique des brillants seconds.

Les procédures de sélection telles qu'elles viennent d'être définies ont pour objet d'isoler, sans nuance possible, un sous-ensemble A' dont les caractéristiques ont été précisées plus haut. Cette absence de nuance conduit à penser qu'il n'y a probablement pas grand intérêt à chercher à concevoir une procédure de sélection en relation avec une PAMC aboutissant à plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Les deux seules qui sont présentées au 6.2 (celle d'ELECTRE I et celle d'ELECTRE IS) exploitent le résultat d'une PAMC aboutissant à un unique système de type (S, R) (cf. 5.2). Toutefois, comme nous l'avons souligné plus haut, il est nécessaire, pour justifier la sélection et/ou l'élimination des actions, de faire référence aux éléments de probance du modèle de préférences globales, résultat de la PAMC. En vue d'apprécier cette plus ou moins grande probance, nous verrons qu'il peut être intéressant de faire appel à certains des concepts (indices de crédibilité notamment) introduits au 5.3.

Nous consacrons le reste de ce paragraphe à des explications visant à faire comprendre l'origine des difficultés qu'on rencontre pour concevoir des procédures de sélection (ainsi que pour apprécier les qualités d'une procédure proposée) en relation avec

un système de préférences de type (S, R) ¹. On commence pour cela par examiner le problème dans le cas simple où R serait vide et S transitive, ce qui est notamment le cas avec un vrai-critère unique de synthèse. On abandonne ensuite la première de ces hypothèses et enfin la seconde. On voit ainsi surgir, pas à pas, les difficultés.

a) S est transitive et $R = \emptyset$

Un tel système (réduit à une seule relation transitive S) définit sur A une structure de préordre complet (cf. 1.4.2). Il peut toujours, dans les problèmes réels, être vu comme le résultat d'une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère de synthèse. Avec un tel préordre complet :

1°) l'ensemble A peut être partitionné en classes d'indifférence, deux actions quelconques a et b appartenant à une même classe vérifiant $a S b$ et $b S a$ (donc $a I b$),

2°) ces classes d'indifférence sont des classes de véritables ex æquo,

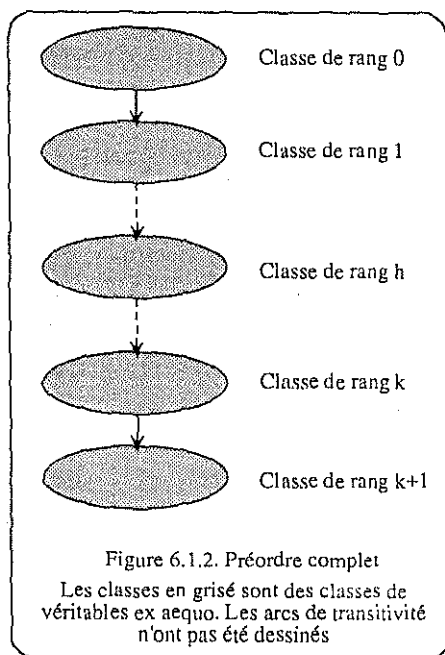
3°) les classes d'indifférence ainsi obtenues peuvent être rangées et numérotées les unes à la suite des autres le long d'un axe² de telle sorte que, si a_h et a_k appartiennent respectivement à des classes ayant pour numéro de rang h et k , on ait (cf. figure 6.1.2) : $a_h S a_k$ et $\text{Non}(a_k S a_h) \Leftrightarrow h < k$.

Par convention, nous affectons le rang 0 à la classe qui renferme les actions qui ne sont surclassées par aucune action appartenant à une autre classe. D'après les remarques ci-dessus, les actions de la classe de rang 0 surclassent toutes les autres. Celles de la classe 1 sont surclassées par toutes les actions de la

¹ Le problème est sensiblement différent avec un modèle de préférences de type $(P, \sim)$.

² Dans tout ce qui suit, nous supposons que les classes d'indifférence sont en nombre fini. A bien des égards, cette hypothèse n'est pas essentielle mais elle simplifie considérablement l'exposé sans être restrictive en pratique ; pour plus de précisions sur les structures de préférences ordonnées dans le cas général, nous renvoyons à Fishburn (1970a).

classe 0 et elles surclassent toutes celles des classes 2, ..., h, ..., k, ..., k + 1, ... Précisons que chacune de ces classes contient au moins une action. Rappelons que, dans le cas particulier où chaque de classe est réduite à une seule action, on dit que S définit sur A une structure d'ordre complet.



Notons c_0 l'ensemble des actions de rang 0. Il est aisé de constater que :

$$A^* = c_0.$$

Lorsque $\text{card}(c_0) = 1$, il est alors naturel de poser :

$$A' = A^* = c_0.$$

Lorsque $\text{card}(c_0) > 1$, toutes les actions optimales de c_0 sont nécessairement de véritables ex æquo. Sur la base du s.r.p. considéré, rien ne permet de différencier de telles actions. L'objectif d'une procédure de sélection étant d'aboutir à un

ensemble A' aussi restreint que possible, il semble raisonnable de ne retenir, dans A' , que l'une des actions de c_0 . Cette action est appelée **représentant** de c_0 et renvoie à l'ensemble des actions de cette classe. Le choix du représentant des actions de c_0 peut utilement prendre appui sur des considérations ayant trait à la façon dont S a été élaborée (probance, fragilité de certains surclassements). Ces considérations peuvent conduire à justifier, dans le cadre de l'information et des critères pris en compte, le fait de choisir telle action de c_0 plutôt que telle autre.

La procédure de sélection s'impose donc naturellement dans le cas d'un s.r.p. (S, R) ayant une structure de préordre complet. On la met implicitement en œuvre lorsque l'on cherche à élaborer une recommandation sur la base d'une PAMC de type I conduisant à un vrai-critère de synthèse ¹.

b) S est transitive et $R \neq \emptyset$

Il en est ainsi lorsque S est confondue ² avec Δ_F mais également dans bien d'autre cas. Le système (S, R) définit alors, sur A , une structure de **préordre partiel** ³. Cela revient à dire que :

1°) l'ensemble A peut être partitionné en classes d'indifférence (comme précédemment),

2°) ces classes d'indifférence sont des classes de véritables ex æquo,

3°) les classes d'indifférence ainsi obtenues peuvent être rangées selon un ordre partiel (cf. figure 6.1.3) : celui-ci est

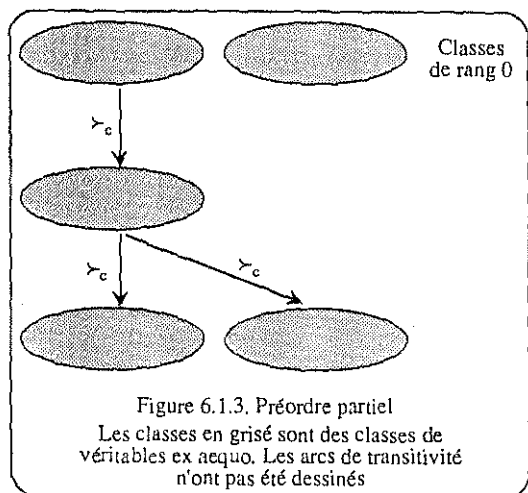
¹ Ces mêmes principes se transposent sans grandes difficultés au cas où il s'agit d'élaborer une recommandation sur la base d'un s.r.p. issu d'un critère de synthèse au pouvoir discriminant plus nuancé (quasi-critère ou pseudo-critère). On pourra notamment chercher à tirer parti du préordre complet sous-jacent aux structures de quasi-ordres ou de pseudo-ordres modélisées par ces critères (cf. MMCAD, 7.2 ou Roubens et Vincke (1985)).

² ce qui n'est pas possible lorsque l'on travaille avec une famille de vrai-critères, cf. 3.1.4.

³ Cf. MMCAD, 7.2.3.2 et 1.4.2 c).

caractérisé par la relation asymétrique et transitive $\succ_c$ définie sur l'ensemble C des classes d'indifférence par, $\forall c, c' \in C$:

$$c' \succ_c c \Leftrightarrow [c \neq c' \text{ et } a' S a, \forall a' \in c' \text{ et } \forall a \in c].$$



En prenant appui sur la transitivité de S , il est facile de démontrer que si deux classes d'indifférences $c, c' \in C$ sont telles que :

$$\text{Non}(c' \succ_c c) \text{ et } \text{Non}(c \succ_c c'),$$

alors

$$a' \in c' \text{ et } a \in C \Rightarrow a' R a.$$

Ces remarques peuvent être résumés comme suit : dans un système (S, R) avec S transitive, étant donné deux actions a et b appartenant à une même classe d'indifférence et une troisième, a' , non située dans cette classe, a se compare à a' exactement comme b se compare à a' .

Le rangement que constitue l'ordre partiel $\succ_c$ (cf. figure 6.1.3) ne permet pas de définir (comme dans le cas $R = \emptyset$) un alignement des classes d'indifférence le long d'un axe. Il permet

cependant de mettre en évidence l'existence d'une ou plusieurs classes d'indifférence renfermant des actions qui ne sont surclassées par aucune action appartenant à une autre classe. Ici encore, nous nous référerons à de telles classes d'indifférence en disant qu'elles sont de **rang 0**. Dire qu'une action b appartient à une classe de rang 0 équivaut à dire qu'aucune action $a \in A$ ne peut être telle que $a S b$ et $\text{Non}(b S a)$. Nous dirons encore d'une telle action b qu'elle est **S-efficace**¹.

S'il n'existe qu'une seule classe c_0 de rang 0 (ce qui est nécessairement le cas lorsque $R = \emptyset$ mais peut se produire même si $R \neq \emptyset$), alors il est aisé de constater que :

$$c_0 = A^*,$$

c_0 regroupant l'ensemble de toutes les actions optimales. On est alors ramené à la situation du a).

S'il existe plusieurs classes de rang 0 (cf. figure 6.1.3), il est facile de constater qu'alors, nécessairement, $A^* = \emptyset$ puisqu'aucune action appartenant à une classe de rang 0 ne peut surclasser une action se situant dans une autre classe de rang 0. En raison de la transitivité de S , il est cependant facile de montrer que si une action a n'appartient pas à une classe de rang 0, il existe nécessairement au moins une action S-efficace b telle que $b S a$.

Cette dernière remarque invite à opérer la sélection en prenant appui en priorité sur le sous-ensemble C_0 de C formé des classes de rang 0.

Lorsque $C_0 = \{c_0\}$, on a vu que la présence d'incomparabilités ne change rien par rapport à ce qui a été dit au a).

Considérons donc le cas $\text{card}(C_0) > 1$. Le sous-ensemble A' auquel conduit la procédure de sélection doit nécessairement

¹ Cette terminologie généralise le concept d'actions efficaces (cf. MMCAD, 10.4) qui apparaissent comme des actions Δ_F -efficaces avec Δ_F relation de dominance.

contenir au moins une action de chacune des classes de C_0 . En effet, rien ne peut justifier que toutes les actions d'une même classe de rang 0 soit éliminées puisqu'aucune de celles qui seraient sélectionnées ne pourrait les surclasser. Les éléments de C_0 sont des classes de véritables ex æquo. De même qu'au a), on est alors amené à retenir, dans A' , un représentant de chacune des classes de C_0 . Le choix de ces représentants s'effectue comme on l'a vu au a).

Tout ensemble A' constitué comme il vient d'être dit possède les deux propriétés suivantes :

- l'élimination de chacune des actions non sélectionnées est justifiée par le fait que A' est **surclassant**, ce qui signifie que si $a \notin A'$, alors il existe au moins une action $b \in A'$ telle que $b S a$;
- deux actions quelconques appartenant à A' sont incomparables selon le modèle (S, R) ; il est impossible, sur la base de l'information prise en compte, de restreindre davantage cet ensemble en éliminant davantage d'actions.

Il répond donc bien aux deux propriétés requises de la problématique du choix (cf. passage introductif du 6.1.2).

Nous avons donc mis en évidence le fait que, lorsque S est transitive, une procédure de sélection bien définie s'impose. Elle consiste :

- à rechercher l'ensemble C_0 des classes d'indifférence de rang 0 ;
- à choisir, dans chacune de ces classes, un représentant.

c) S est quelconque

Lorsque S n'est pas transitive, il n'existe pas nécessairement une unique partition de A en classes d'indifférence et les classes d'indifférence ne regroupent pas nécessairement des actions véritablement ex æquo, c'est-à-dire se comparant de la même façon à chacune des autres. L'existence d'actions optimales ou même de classes de rang 0 (c'est-à-dire d'actions S -efficaces)

n'est pas non plus assurée (cf. figure 6.1.4). La procédure décrite au b) n'est donc plus nécessairement applicable.

On peut cependant remarquer que l'ensemble A' auquel conduit la procédure de sélection dans le cas transitif jouit d'un certain nombre de propriétés qui s'énoncent indépendamment de la transitivité de S :

PROPRIÉTÉ $\alpha.1$: A' est surclassant.

PROPRIÉTÉ $\alpha.2$: Aucun des sous-ensembles stricts de A' ne possède la propriété $\alpha.1$. Un ensemble A' qui possède les propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.2$ est dit **surclassant minimal**.

PROPRIÉTÉ $\alpha.3$: Deux actions quelconques de A' sont incomparables.

PROPRIÉTÉ $\alpha.4$: Toute action de A' est S -efficace.

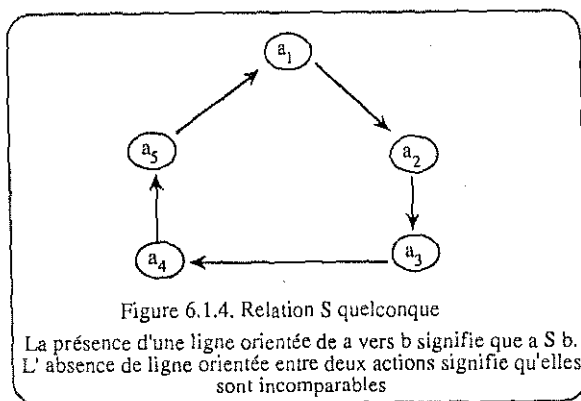
PROPRIÉTÉ $\alpha.5$: A' jouit de propriétés qui définissent ce sous-ensemble de façon unique à des substitutions près d'actions jugées *ex æquo*.

Rappelons que les propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.2$ ne font qu'exprimer, en termes formels, les deux exigences fondamentales de la problématique du choix. La propriété $\alpha.3$ interprète¹, de manière un peu restrictive, le fait que A' doit être aussi restreint que possible. Cette interprétation est néanmoins pertinente car, dans la phase d'étude ultérieure qui doit mener de A' au choix final, il est justifié de faire porter l'effort sur des actions incomparables (ou très difficilement comparables) avec les informations dont on dispose dans la présente phase d'étude. Les propriétés $\alpha.4$ et $\alpha.5$ paraissent devoir être naturellement vérifiées par le résultat de toute "bonne" procédure de sélection.

Pour définir une "bonne" procédure de sélection valable dans le cas général (S quelconque), on pourrait être tenté d'exiger

¹ Il est facile de prouver que si A' vérifie $\alpha.1$ et $\alpha.3$, alors il vérifie $\alpha.2$.

qu'elle aboutisse obligatoirement à un ensemble A' jouissant des cinq propriétés ci-dessus. Malheureusement, une telle procédure ne peut exister. L'exemple de la figure 6.1.4 montre que la propriété $\alpha.4$ ne peut être exigée. Il en est de même de $\alpha.3$ puisque, sur le même exemple, il n'existe aucun ensemble surclassant ne contenant que des actions deux à deux incomparables (tout ensemble surclassant contenant au moins trois actions). On pourrait se limiter à n'exiger que $\alpha.1$ et $\alpha.2$ (lesquelles sont toujours compatibles, comme il est facile de le prouver). Malheureusement, dans bien des cas, une très large indétermination demeure si l'on s'en tient là (dans l'exemple de la figure 6.1.4, il existe cinq ensembles surclassants minimaux).

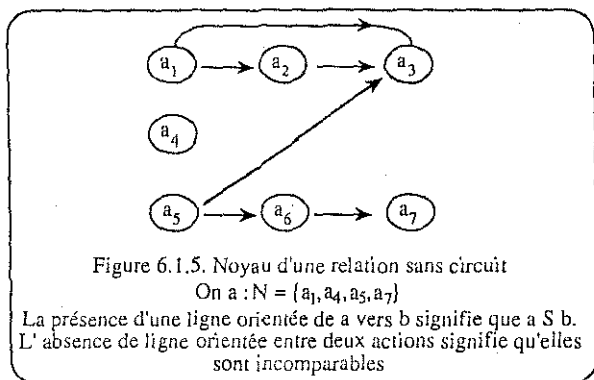


L'analyse précédente amène à penser que la présence d'un circuit tel que celui de la figure 6.1.4 peut être à l'origine de difficultés importantes. Afin d'approfondir cette hypothèse, examinons ce que deviennent les cinq propriétés ci-dessus relativement à une relation S sans circuits, c'est-à-dire telle qu'il soit impossible de trouver une suite d'actions $a_1, \dots, a_p$ telle que :

$$a_1 S a_2, \dots, a_i S a_{i+1}, \dots, a_{p-1} S a_p, a_p S a_1.$$

Un résultat classique en théorie des graphes (cf. Roy (1969-1970)) permet d'affirmer que si S est sans circuits, il existe (cf. figure 6.1.5) un sous-ensemble unique $N \subset A$, appelé **noyau** de S , jouissant des propriétés $\alpha.1$ et $\alpha.3$ (donc aussi de $\alpha.2$). Le sous-ensemble N étant unique, la propriété $\alpha.5$ est également

vérifiée. Il est enfin facile de prouver qu'il satisfait de plus à la forme affaiblie suivante de la propriété $\alpha.4$:



PROPRIÉTÉ $\alpha.4$ bis : Le nombre d'actions non S-efficaces sélectionnées est égal au nombre minimum d'actions non S-efficaces que renferme n'importe quel ensemble surclassant.

Il nous semble donc légitime d'exiger d'une bonne procédure de sélection qu'elle aboutisse à $A' = N$ lorsque S est sans circuit. Lorsque S est transitive et ne contient pas de circuits (c'est-à-dire lorsque S est un ordre partiel), le lecteur vérifiera sans peine que, dans ce cas, la procédure de sélection préconisée au b) aboutit bien au noyau de S.

En conclusion, nous avons montré que la procédure de sélection s'impose dans deux cas remarquables : S transitive ou S sans circuits. Il serait possible (mais sans doute un peu fastidieux) de montrer que la procédure s'impose encore dans le cas où les éventuels circuits regroupent chacun des actions véritablement ex æquo. La solution est alors obtenue en sélectionnant un représentant de chacune des classes du noyau d'une relation $\succ_c$ définie à partir de telles classes d'ex æquo. Les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ demeurent vérifiées. Nous verrons au 6.2 comment, avec ELECTRE IS, on peut surmonter la seule difficulté non examinée ici : celle qui provient de l'existence de circuits passant par des actions n'apparaissant pas comme de véritables ex æquo.

6.1.3 Cas de la problématique du tri (P.β)

On s'intéresse ici au cas où le problème est posé en termes de tri des actions de A, ce tri consistant à les répartir entre des catégories B, C, D, ... définies au préalable. Affecter une action a à une catégorie C signifie que l'on oriente, de façon bien définie, ce que doit devenir a. Autrement dit, chaque catégorie est caractérisée par la suite qui est réservée aux actions qui lui sont affectées. Soulignons enfin que, dans cette problématique, l'affectation d'une action à une catégorie donnée s'effectue indépendamment de l'affectation des autres actions à cette catégorie ou à d'autres catégories. C'est dire que la manière dont les actions de A se comparent entre elles n'influence en rien l'affectation. Voici brièvement évoquées ¹ trois situations concrètes dans lesquelles l'aide à la décision peut être abordée selon cette problématique.

– **Diagnostic médical** : les actions sont ici les patients et les catégories correspondent aux maladies répertoriées ; l'examen, en affectant un patient dans une catégorie, amène à lui prescrire un traitement bien défini.

– **Localisation d'usines** : dans une première phase d'étude, A peut comporter un très grand nombre de sites. On peut vouloir procéder à un premier tri en deux catégories, l'une C devant regrouper tous les sites qui présentent une insuffisance notoire et B tous les autres (à retenir en vue d'une seconde phase d'étude). Le très grand nombre de sites conduit, dans cette première phase, à ne faire intervenir que des critères faciles à évaluer ; l'affectation en classe B ou C repose sur la comparaison des performances des sites sur ces critères à des normes d'acceptabilité fixées pour l'affectation en catégorie B. Si le nombre des sites qui se trouvent ainsi affectés en catégorie B est jugé insuffisant, ceci peut soit conduire à réviser les normes, soit à entreprendre une nouvelle investigation pour découvrir de nouveaux sites. On remarquera que, dans cet exemple, la problématique conduit à une "sélection"

¹ Pour d'autres exemples et davantage de précisions sur cette problématique, voir MMCAD, chapitre 6 et Yu (1992).

mais l'ensemble B qui découle de la procédure d'affectation ne peut pas être confondu avec l'ensemble A' qui serait obtenu au terme d'une procédure de sélection correspondant à la problématique du choix. Dans ce dernier cas en effet, la comparaison entre actions de A jouerait un rôle capital.

– **Octroi de crédit** : l'ensemble A est ici constitué par des demandes de prêt d'un type donné qui parviennent à un organisme bancaire ; il s'agit de décider de la suite à donner à chaque demande. Sur la base d'un dossier, certaines de ces demandes peuvent être rejetées sans appel (catégorie J), d'autres peuvent être immédiatement acceptées (catégorie B). Pour d'autres enfin, un certain nombre de catégories intermédiaires C, D, ... peuvent être introduites (prêts susceptibles d'être acceptés moyennant un supplément de garantie ou une réduction du montant du prêt, dossiers nécessitant une étude plus approfondie ou un complément d'information, ...).

Cette problématique du tri conduit à mettre en place une **procédure d'affectation**. Celle-ci prend appui sur un modèle de préférences non pas pour comparer les actions de A entre elles mais pour les comparer à des normes qui servent à définir les conditions que doivent remplir les performances $g_1(a)$, ..., $g_n(a)$ pour que l'action a soit affectée en catégorie B, C, ou ... Nous supposons ici que de telles normes peuvent être définies en termes d'**actions de référence** b^h caractérisant la (ou les) action(s) centrale(s) ou encore les actions limites qu'il paraît justifié de devoir affecter dans une catégorie donnée C^h . Que l'action de référence b^h apparaisse comme devant caractériser une action centrale ou une action limite de la classe C^h , elle est toujours définie par les performances qu'elle obtient sur les n critères de F :

$$g(b^h) = (g_1(b^h), \dots, g_n(b^h))$$

encore appelée **profil de référence** b^h (central ou limite). L'affectation est par conséquent fondée sur la manière dont le modèle de préférence conduit à comparer les actions de A aux différentes actions ou profils de référence.

Nous commencerons par rappeler la façon à la fois naturelle et classique de procéder à l'affectation lorsqu'on prend appui sur un critère unique de synthèse. Nous examinerons ensuite pourquoi il n'existe plus de procédure naturelle lorsque le système de préférences, toujours supposé de type (S, R), fait intervenir une relation S non nécessairement transitive et complète ainsi que des profils b^h non réductibles à un seul nombre.

a) Affectation en présence d'un vrai-critère unique de synthèse g

A l'issue d'un examen (baccalauréat par exemple), il est habituel d'affecter le candidat a à l'une des catégories "admis sans mention", "mention assez bien", "mention bien", "mention très bien" en comparant sa performance $g(a)$ (moyenne pondérée des performances obtenues dans diverses disciplines) à des normes telles que 10/20, 12/20, 14/20, 16/20. Cette comparaison de $g(a)$ à des normes $g^0, g^1, \dots, g^k$ pour affecter a à une catégorie parmi k se retrouve dans beaucoup d'autres domaines (credit scoring notamment), toujours avec la même règle d'affectation (à l'emplacement près de l'inégalité large), $\forall h \in \{1, 2, \dots, k\}$:

a est affectée en catégorie $C^h \Leftrightarrow g^{h-1} \leq g(a) < g^h$.

L'échelle $[g^0 ; g^k]$ de variation du critère unique g se trouve donc (cf. figure 6.1.6) découpée en k intervalles sur la base des valeurs limites $g^1, \dots, g^{k-1}$ et l'on suppose que les actions (objets, individus, ...) conduisant à des valeurs d'un même intervalle du critère de synthèse méritent le même traitement ultérieur et doivent, par conséquent, être affectées à la même catégorie. Ceci appelle trois remarques.

– Les catégories auxquelles on s'intéresse sont naturellement complètement ordonnées depuis celle C^1 appelée à recevoir les actions les plus "mauvaises" jusqu'à C^k destinée à recevoir les "meilleures" actions. S'il en est bien ainsi dans deux des trois exemples (localisation et octroi de crédit) évoqués en début de paragraphe, cette hypothèse ne convient pas au cas du diagnostic médical.

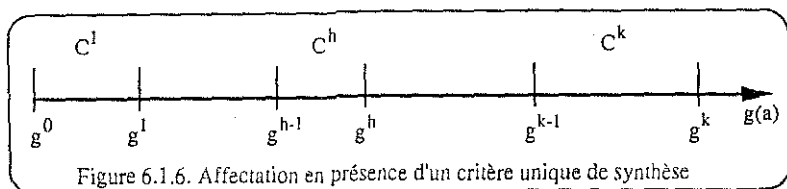


Figure 6.1.6. Affectation en présence d'un critère unique de synthèse

– L'idée, généralement vague, de ce que doivent avoir en commun les actions qui sont affectées à une même catégorie est appréhendée en étroite relation avec la procédure d'affectation puisque chaque catégorie C^h est caractérisée par les deux valeurs limites g^{h-1} et g^h du critère de synthèse. On peut justifier cette façon de faire en considérant des actions de référence $b^0, \dots, b^h, \dots, b^k$ telles que $g^h = g(b^h)$. La catégorie C^h est alors destinée à regrouper toutes les actions a telles que a est préférée à b^{h-1} et b^h est préférée à a . Sur la base de la relation S associée au critère 1 g , ce qui vient d'être énoncé s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & [a \ S \ b^{h-1} \ \text{et} \ \text{Non}(b^{h-1} \ S \ a)] \ \text{et} \ [b_h \ S \ a \ \text{et} \ \text{Non}(a \ S \ b^h)] \\
 & \Rightarrow a \in C^h.
 \end{aligned}
 \tag{r.6.1.1)$$

– L'affectation d'une action a indifférente à une action de référence, par exemple b^h ($g(a) = g^h$) doit être fixée, par convention, soit dans la classe inférieure notée ici C^h , soit dans la classe supérieure C^{h+1} . C'est ce dernier parti qui a été adopté ici. Nous traduirons cette convention en disant que chaque catégorie est **fermée en bas**². La convention inverse conduirait à des catégories **fermées en haut**.

¹ Nous supposons ici que g est un vrai-critère : S est transitive et définie par $a \ S \ b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$. Le cas d'un quasi-critère est traité au b) ci-après.

² Afin d'éviter toute difficulté pour affecter une éventuelle action potentielle indifférente à b^0 ou à b^k , il convient de donner à g^0 une valeur suffisamment petite et à g^k une valeur suffisamment grande pour que, en pratique, on n'ait pas à affecter des actions telles que b^0 ou b^k .

Grâce aux hypothèses contenues dans ces trois remarques, la procédure ci-dessus permet d'affecter chaque action potentielle à une catégorie unique.

b) Affectation en l'absence d'un vrai-critère unique de synthèse

Ici, comme au 6.2., nous nous intéresserons à des procédures d'affectation qui généralisent celle décrite au a). Généraliser veut dire ici que l'affectation prend explicitement appui sur les performances $g_1(a), \dots, g_n(a)$ auxquelles on ne substitue plus un unique nombre $g(a)$. Toutefois, nous demeurerons dans le cadre défini par les trois remarques qui terminent le 6.1.3 a). Celles-ci nous conduisent à énoncer les trois hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE $\beta.1$: Les catégories sont ordonnées et notées C^h , $h = 1, \dots, k$; C^1 est la catégorie la plus "basse" et C^k est la catégorie la plus "haute".

HYPOTHÈSE $\beta.2$: Pour délimiter les catégories, on introduit $k + 1$ profils de référence $\underline{g}^h = (g_1^h, \dots, g_n^h)$, $h = 0, \dots, k$ vérifiant, $\forall j \in F$:

$$\begin{aligned} g_j^0 &< g_j(a) \\ g_j^{h-1} &\leq g_j^h, \\ g_j(a) &< g_j^k. \end{aligned} \quad (r.6.1.2)$$

En outre, pour au moins une valeur de j , $g_j^{h-1} \neq g_j^h$; le profil $\underline{g}^h$ doit servir de référence pour limiter en bas la catégorie C^{h+1} (d'où son nom de profil bas de C^{h+1}) et en haut la catégorie C^h (d'où son nom de profil haut de C^h). Conformément à la conception de ces profils et sur la base d'une relation de surclassement S , on pose :

$[a S b^{h-1} \text{ et } \text{Non}(b^{h-1} S a), b^h S a \text{ et } \text{Non}(a S b^h)] \Rightarrow a \in C^h$
(cf. r.6.1.1)).

HYPOTHÈSE $\beta.3$ (version basse ¹) : La catégorie C^h ($h = 1, \dots, k$) est fermée en bas par l'action de référence b^{h-1} , autrement dit :

¹ Dans la version haute, on suppose C^h fermé en haut par b^h .

$$[a S b^{h-1} \text{ et } b^{h-1} S a] \Rightarrow a \in C^h. \quad (r.6.1.3)$$

Il est facile de démontrer le résultat suivant :

Si la relation de surclassement S est transitive et complète, alors, sous les hypothèses $\beta.1$, $\beta.2$, $\beta.3$, toute action a se trouve affectée sans ambiguïté à une classe et à une seule. On peut obtenir cette affectation en appliquant la procédure décrite ci-dessus au a) après avoir fait choix d'un critère g astreint seulement à vérifier ¹ :

$$g(a) \geq g(b) \Leftrightarrow a S b.$$

Si la relation S n'est pas transitive, alors les hypothèses $\beta.1$, $\beta.2$, $\beta.3$ ne définissent plus sans ambiguïté la catégorie à laquelle a doit être affectée. Nous le montrons ci-après à l'aide de quelques exemples qui mettent en évidence deux types de difficultés fondamentales.

Considérons en premier lieu le cas d'une relation S complète, non transitive, rendant possible l'existence d'une action c^h indifférente à la fois à b^h et b^{h+1} . De façon plus précise, supposons que S soit la relation de surclassement associée à un quasi-critère de synthèse g :

$$a S b \Leftrightarrow g(a) + q[g(a)] \geq g(b).$$

Considérons une action fictive c telle que :

$$g(c) = g(b^h) + q[g(b^h)] \text{ et } g(c) + q[g(c)] \geq g(b^{h+1}).$$

On a alors $c I b^h$ et $c I b^{h+1}$. D'après (r.6.1.3), l'action c^h doit être affectée à la fois en catégorie C^{h+1} et en catégorie C^{h+2} . Comme nous le montrerons au 6.3, (r.6.1.1) ne peut conduire, même avec S quelconque, à une semblable double affectation. Ceci laisse prévoir que, quelle que soit S , on doit pouvoir éliminer toute possibilité de double affectation en adoptant des profils dont l'"espace-ment" est suffisant pour ne pas créer d'ambiguïté eu égard aux valeurs des

¹ Sous des conditions non restrictives en pratique, il existe nécessairement au moins un vrai-critère g satisfaisant à cette condition (cf. 1.4.2) ; si g est une solution et χ une transformation monotone croissante, alors $\chi(g)$ est une solution conduisant à la même affectation.

seuils sur les différents critères.

Considérons en second lieu le cas d'un système (S, R) avec $R \neq \emptyset$ et S transitive (par exemple $S = \Delta_F$). Il est clair que rien ne s'oppose à ce qu'il existe une action a telle que :

$$a \Delta_F b^{h-1}, \text{ Non}(b^{h-1} \Delta_F a) \text{ et } a R b^h.$$

A quelle catégorie convient-il d'affecter une telle action a ? Les hypothèses faites n'apportent aucun élément de réponse à cette question. Dès que $R \neq \emptyset$ (que la relation de surclassement soit transitive ou non), le cadre d'hypothèses considérées laisse planer un arbitraire total quant à la façon d'affecter certaines actions.

Avant d'introduire quelques exigences naturelles susceptibles d'aider à contourner ces difficultés, nous allons reformuler, dans le cadre considéré ici, deux procédures d'affectation classiques afin de montrer qu'il serait vain de vouloir réduire complètement la part d'arbitraire dont il vient d'être question sans approfondir davantage la signification concrète des profils limites.

Les deux procédures d'affectation qui suivent (dites conjonctives et disjonctives ¹) sont profondément différentes de celle présentée ci-dessus au a) en ce sens que l'une comme l'autre prennent uniquement appui sur la relation de dominance Δ_F .

PROCÉDURE CONJONCTIVE : En posant successivement $i = k, k-1, \dots, 1$, on examine si $a \Delta_F b^{i-1}$. Soit h la plus grande valeur telle que $a \Delta_F b^{h-1}$. On affecte l'action a en catégorie C^h .

Puisque, par hypothèse, $a \Delta_F b^0$, la procédure permet d'affecter sans ambiguïté chaque action à une unique catégorie. Elle vérifie (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

Concrètement, cette procédure n'est pertinente que si le profil bas de la catégorie C^h , $\underline{g}^{h-1}$, est défini à partir de minima g_j^{h-1} qu'il

¹ Ces deux termes sont ici pris dans le même sens qu'au 5.2.2 b). Toutefois, les procédures d'écrémage ne sont pas à proprement parler des procédures d'affectation puisque le fait d'être affectée en catégorie B ou C dépend, pour une action donnée (cf. (r.5.2.14) et r.5.3.15)), de la présence ou de l'absence, dans A, d'autres actions.

est nécessaire d'atteindre conjointement pour être affectés en catégorie C^h . Dans l'exemple de l'octroi de crédit, on peut ainsi vouloir n'affecter un dossier dans la catégorie la plus haute (acceptation définitive sans autre examen) que si, sur chacun des critères considérés, il atteint une performance suffisante. Pour affecter les autres dossiers, on peut alors considérer que c'est la performance "la plus faible" qui doit déterminer la catégorie d'affectation.

PROCÉDURE DISJONCTIVE : En posant successivement $i = 0, 1, \dots, k$, on examine si $b^i \Delta_F a$. Soit h la plus petite valeur telle que $b^h \Delta_F a$. On affecte l'action a en catégorie C^h .

Puisque, par hypothèse, $b^k \Delta_F a$, la procédure permet d'affecter sans ambiguïté chaque action à une unique catégorie. Elle vérifie (r.6.1.1) et l'adaptation de (r.6.1.3) à des catégories fermées en haut ¹.

Concrètement, elle n'est pertinente que si le profil bas de la catégorie C^h , g^{h-1} , est défini à partir de minima g_j^{h-1} dont l'un au moins doit être dépassé pour permettre une affectation en catégorie C^h . Considérons par exemple divers niveaux de sécurité informatique correspondant à des dispositifs de plus en plus sophistiqués et coûteux auxquels on peut soumettre chaque application informatique a existant ou susceptible d'exister dans une entreprise. Les critères peuvent concerner le degré de confidentialité de a , les conséquences financières, juridiques sur l'image de l'entreprise, ... qu'aurait un vol ou une détérioration de a . Si, pour chacun d'eux, le fait de dépasser la norme g_j^{h-1} implique un niveau de sécurité correspondant au moins à C^h , alors l'affectation doit se faire selon la procédure disjonctive.

Il est clair que l'une et l'autre de ces deux procédures, en dépit de la similitude de leur technique, affectent différemment toute action a qui, vis-à-vis de la relation de dominance, se trouve être incomparable à un ou plusieurs profils. La différence

¹ Remplacer $b^i \Delta_F a$ par $[b^i \Delta_F a \text{ et } \text{Non}(a \Delta_F b^i)]$ conduirait à une procédure disjonctive adaptée à des catégories fermées en bas.

d'affectation est d'autant plus importante que le nombre des profils incomparables est plus grand. Cette différence provient de ce que les profils limites sont pris en compte selon deux logiques duales, lesquelles confèrent, à leurs positions limites, des significations différentes. Ces deux procédures ont pourtant en commun le fait de satisfaire à un certain nombre d'exigences que nous allons énoncer puis commenter.

EXIGENCE D'UNICITÉ : Chaque action est affectée à une et une seule des catégories ordonnées $C^1, \dots, C^k$.

EXIGENCE D'INDÉPENDANCE : La catégorie à laquelle une action a est affectée est indépendante de la manière dont les autres actions sont affectées aux diverses catégories.

EXIGENCE DE CONFORMITÉ AUX PROFILS LIMITES : Les catégories sont délimitées à partir de profils limites conformément à l'hypothèse $\beta.2$. L'affectation de toute action doit être conforme à (r.6.1.1) et au fait que les catégories sont soit fermées en bas, soit fermées en haut (hypothèse $\beta.3$).

EXIGENCE DE MONOTONICITÉ : Si $b \Delta_F a$, alors b doit être affectée à une catégorie C^y et a à une catégorie C^x telles que $y \geq x$.

EXIGENCE D'HOMOGÉNÉITÉ : Toutes les actions a vérifiant les conditions suivantes doivent être affectées à la même catégorie C^i avec $x \leq i \leq y$:

$a S b^{x-1}$, $\text{Non}(b^{x-1} S a)$, $b^x R a$,
 $b^y S a$, $\text{Non}(a S b^y)$, $a R b^{y-1}$.

EXIGENCE DE STABILITÉ : Si l'on réduit d'une unité le nombre des catégories en supprimant l'action de référence b^i , l'affectation des actions précédemment affectées aux catégories autres que C^i et C^{i+1} n'est pas modifiée. Les actions primitivement affectées à l'une de ces deux catégories se trouvent, après suppression de b^i , affectées dans la catégorie délimitée par les actions de référence b^{i-1} et b^{i+1} .

Les trois premières de ces six exigences ne font que reprendre des desiderata déjà exprimés. Elles traduisent des hypothèses dont on peut néanmoins vouloir s'affranchir dans certains cas. La première impose, en particulier, des catégories complètement ordonnées (cf. paragraphe introductif du 6.1.3) et excluent que certaines actions ne soient pas affectées à l'une d'elles (ce qui équivaldrait à les affecter à une catégorie à part qui ne pourrait être rangée par rapport aux autres). Les trois dernières exigences ont pour effet de restreindre l'arbitraire que laissent les hypothèses $\beta.1$ et $\beta.3$ pour l'affectation des actions qui sont incomparables, selon le système (S, R) pris en compte, à certains des profils de référence. L'exigence d'homogénéité impose en particulier d'affecter, à une même catégorie, toutes les actions qui se trouvent être incomparables à une même séquence de profils limites de la forme $b^x, b^{x+1}, \dots, b^{y-1}$, alors qu'elles surclassent strictement b^{x-1} et sont strictement surclassées par b^y . Faisons observer que, dans ces conditions, la procédure conjonctive affecte de telles actions en catégorie C^x alors que la procédure disjonctive affecte ces mêmes actions en catégorie C^y .

On présentera, au 6.3, deux procédures (ELECTRE TRI) qui généralisent les procédures conjonctives et disjonctives au cas d'un système de préférences de type (S, R) quelconque. On montrera que ces procédures vérifient bien les six exigences qui viennent d'être présentées.

6.1.4 Cas de la problématique du rangement (P. γ)

On s'intéresse ici au cas où l'aide à la décision est envisagée dans des termes tels que l'élaboration d'une prescription ou la communication, l'argumentation au sein du processus de décision passent par la mise en évidence préalable d'une structure de préordre sur l'ensemble A . Ce préordre peut être complet (cf. figure 6.1.2) ou seulement partiel (cf. figure 6.1.3). Il en est par exemple ainsi ¹ lorsque l'on cherche à échelonner dans le temps, conformément à un principe de priorité décroissante, des investis-

¹ Pour plus de précisions sur cette problématique et ses rapports avec les deux précédentes, voir 1.7 et MMCAD, chapitre 6.

sements concernant l'infrastructure routière d'un pays, l'aménagement hydraulique (adduction d'eau, irrigation, ...) d'une région, des projets de recherche et développement au sein d'une grande entreprise, ... Certains problèmes de recrutement de personnel, de média planning, de choix de localisation, ... conduisent également à aborder l'aide à la décision avec cette problématique.

Dès lors qu'il est question de classer les actions (c'est-à-dire de les regrouper en classes d'indifférence et d'ordonner ces classes), le praticien a naturellement tendance à rechercher un préordre complet. L'élaboration d'un vrai-critère de synthèse conduit directement à ce résultat. Il n'en demeure pas moins vrai que, en imposant d'emblée la recherche d'un préordre complet, on s'expose à masquer le caractère artificiel de certains regroupements en classes d'indifférence ainsi que la manière de comparer entre elles certaines de ces classes. Pour cette raison, il est généralement préférable de se donner d'abord comme objectif la recherche d'un préordre partiel ; ensuite, en fonction des incomparabilités observées, on pourra chercher à les supprimer afin d'aboutir à un préordre complet compatible avec le préordre partiel. Ce second objectif est toujours facile à atteindre à partir du premier mais il peut y avoir de très nombreuses façons de le faire. Le point délicat consiste donc à justifier, lorsque deux actions sont incomparables dans le préordre partiel, le fait de classer finalement l'une avant l'autre, l'autre avant l'une ou de les mettre *ex æquo*.

Nous appellerons procédure de **classement** la procédure par laquelle on passe d'un modèle de préférences résultant d'une PAMC de type II à un préordre que nous noterons dans la suite Z . La relation Z désigne par conséquent ici une relation binaire sur A soumise à une seule condition¹, à savoir être transitive :

$a Z b$ et $\text{Non}(b Z a)$ signifiant a avant b dans le préordre,

¹ Du fait de nos conventions, Z doit également être réflexive mais ceci est sans importance ici. Pour plus de précisions, voir 1.4.2 c) et MMCAD, 7.2.2 et 7.2.3.

$a Z b$ et $b Z a$ signifiant a et b dans la même classe d'indifférence du préordre,
 $\text{Non}(a Z b)$ et $\text{Non}(b Z a)$ signifiant a et b incomparables dans le préordre.

Adopter cette problématique conduit normalement à remettre en question certains des jugements de préférences qui découlent de la PAMC de type II considérée. Lorsque le résultat de cette dernière est de type (S, R) avec S transitive, ou de type $(P, \sim)$ avec P transitive, ou encore de type (P, I, R) avec $P \cup I$ transitive, cette remise en question n'a pas lieu d'être puisque le modèle de préférences sur lequel on prend appui définit d'emblée le préordre Z cherché. Au contraire, lorsque ce modèle de préférences initial ne jouit pas de la propriété de transitivité qui vient d'être rappelée, le préordre Z que l'on cherche finalement à obtenir présentera inévitablement des différences avec ce modèle de préférences initial. De façon plus précise, l'interprétation pour l'aide à la décision de :

$a Z b$ et $\text{Non}(b Z a)$ comme une préférence de a par rapport à b ,
 $a Z b$ et $b Z a$ comme une indifférence entre a et b ,
 $\text{Non}(a Z b)$ et $\text{Non}(b Z a)$ comme une incomparabilité entre a et b

peut fort bien ne pas être en concordance parfaite avec le modèle (S, R) , $(P, \sim)$, (P, I, R) initial. Cette interprétation fait apparaître Z comme un (nouveau) modèle de préférences sur A obtenu en deux étapes :

Première étape : La PAMC aboutissant au modèle initial de type (S, R) , $(P, \sim)$ ou (P, I, R) .

Deuxième étape : La procédure de classement permettant de passer du modèle initial à Z .

Cette analyse en deux étapes est certes correcte mais l'interprétation donnée ci-dessus de Z demande certaines précautions. En effet, Z est avant tout un instrument d'aide à la décision fondé sur un modèle de préférences initial obtenu par une PAMC de

type II. Alors que, dans un tel modèle, le jugement en termes de préférences entre deux actions b et a ne fait intervenir que les seules performances propres à ces deux actions, il ne peut en être de même dans Z . La relation Z devant être transitive, la comparaison de b et a peut devoir être influencée par la manière dont b et a se comparent à une action tierce, autrement dit par les performances d'actions autres que b et a . C'est pour pouvoir être un "bon instrument" d'aide à la décision (pour permettre d'asseoir une recommandation, pour participer efficacement à des débats, à l'élaboration de convictions, ...) que Z doit être transitive. En imposant cette contrainte, on ne peut éviter de faire apparaître des préférences strictes ou des indifférences qui, sans elle, seraient difficiles à justifier sur la seule base des performances propres au couple d'actions en cause. Cela n'a donc pas grand sens de chercher à savoir si le nouveau modèle de préférences Z est mieux fondé ou moins bien fondé que le modèle initial. L'un et l'autre ne sont pas conçus pour apporter des éléments de réponse à la même question ¹.

Lorsque le modèle initial est constitué d'un unique système de préférences de type (S, R) ou $(P, \sim)$, on peut concevoir Z comme une "approximation" de S ou de P . Les commentaires qui précèdent font apparaître cette conception comme relativement arbitraire (puisque le modèle initial n'est pas plus "vrai" que le nouveau modèle que l'on cherche à élaborer). Quoi qu'il en soit, pour comparer deux approximations (et définir Z comme la "meilleure" approximation), il faut introduire une notion de distance entre Z d'une part et S ou P d'autre part. Supposons qu'un mode de calcul bien précis ait été défini pour calculer une telle distance quelles que soient Z et S ou P . On peut alors adopter comme procédure de classement un algorithme qui recherche le préordre Z qui minimise une telle distance ².

Le choix du mode de définition de la distance pose évidemment problème. Il est clair que la solution finalement trouvée est très fortement conditionnée par ce choix. La distance définie à partir de la différence symétrique entre relations binaires a tout particulièrement retenu l'attention. Un fondement axiomatique en a même été proposé ³ mais cette axiomatique n'est guère

¹ Voir Définition 1.1.1.

² Voir par exemple Barthélémy et al. (1989).

³ Cf. Barthélémy (1979).

convaincante du fait que cette distance est appropriée pour fonder un algorithme de classement. Il peut en particulier être souhaitable ¹ de traiter différemment indifférence et incomparabilité.

De plus, avec cette façon de fonder une procédure de classement sur une recherche de préordre à distance minimum d'une relation de préférence initiale, des solutions très différentes et, dans certains cas, assez nombreuses, peuvent se trouver être à la même distance optimale (ou à des distances très voisines) de la relation initiale que l'on cherche à approximer. Or, de telles solutions peuvent être profondément différentes et rien ne permet de choisir l'une plutôt que l'autre comme résultat de la procédure de classement (cf. Perny (1992)).

Mentionnons enfin que cette recherche d'un préordre à distance minimum d'une relation donnée soulève des problèmes algorithmiques difficiles (cf. Hudry (1989)).

Compte-tenu de ce qui précède, nous ne développerons pas davantage, dans ce livre, la voie qui consiste à chercher à asseoir une procédure de classement sur cette idée d'approximation.

Le résultat Z que l'on cherche à atteindre avec la problématique du rangement est beaucoup plus complexe et nuancé que ne l'est la simple dichotomie $(A', A \setminus A')$ à laquelle conduit la problématique du choix. Cela amène à penser qu'il est préférable de chercher à asseoir la procédure de classement sur un modèle de préférences lui-même nuancé, c'est-à-dire formé de plusieurs systèmes de préférences (cf. 5.3). Les considérations qui suivent viennent encore renforcer ce point de vue.

Supposons que l'on prenne appui sur une PAMC de type II aboutissant à un unique système de préférences (S, R) ². Comme nous l'avons déjà souligné, le préordre Z que l'on cherche à obtenir ne peut, sauf si S est elle-même transitive, être en totale conformité avec S . Afin de limiter les divergences, une exigence naturelle semble être :

$$a S b \Rightarrow a Z b. \quad (r.6.1.4)$$

¹ Cf. Roy et Slowinski (1993).

² Ce qui suit vaut également pour un système (P, I, R) ou $(P, \sim)$.

Cette exigence ne tolère, comme divergence, que celle provenant des cas d'incomparabilité dans le modèle de préférences initial, $a R b$ pouvant donner naissance à $a Z b$ et/ou $b Z a$. La relation Z devant d'autre part être transitive, elle doit contenir la **fermeture transitive** $\hat{S}$ de S puisque, par définition, $\hat{S}$ vérifie :

$$a \hat{S} b \Leftrightarrow a S b \text{ ou } \begin{array}{l} \text{il existe } a_1, a_2, \dots, a_p \in A \text{ tels que} \\ a S a_1, a_1 S a_2, \dots, a_p S b. \end{array}$$

Dans ces conditions, la solution qui minimise les divergences entre Z et S consiste à poser ¹ $Z = \hat{S}$. Il est clair que cette solution n'est pas satisfaisante : $\hat{S}$ apparaît comme le pur produit d'un artifice qui repose sur la propagation, selon une règle purement formelle, d'éléments de conviction qui n'ont qu'un caractère local. On peut ainsi aboutir à rendre toutes les actions indifférentes entre elles dès lors qu'elles sont suffisamment nombreuses et proches deux à deux pour qu'il apparaisse un chemin du type $a_1 I a_2, a_2 I a_3, \dots, a_{m-1} I a_m$ avec un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

Ceci montre qu'en imposant à la procédure de classement de vérifier l'exigence (r.6.1.4), on s'expose à aboutir à un préordre mal justifié, ne correspondant pas au bon instrument d'aide à la décision que l'on recherche. Renoncer à (r.6.1.4), c'est accepter que la procédure conduise à $\text{Non}(a Z b)$ alors que l'on a $a S b$ dans le modèle de préférences. En fait, ce type de divergence est d'autant moins choquant que la crédibilité de $a S b$ est plus faible. De façon symétrique, le passage de $a R b$ à $a Z b$ sera d'autant plus acceptable que la force des arguments intervenant en faveur de $a S b$ est plus grande. Il importe donc d'asseoir la procédure de classement non pas sur un seul système de préférences mais sur plusieurs systèmes hiérarchisés ou un système flou (ce qui est équivalent, comme on l'a vu 5.3).

¹ Un algorithme très simple (cf. Roy (1969-1970)) permet de construire $\hat{S}$ connaissant S .

Au 6.4, nous présentons quatre procédures de classement :

- tout d'abord les deux plus simples : la plus récente, celle de PROMETHEE (fondée sur un modèle de préférences floues) et la plus ancienne, celle d'ELECTRE II (faisant intervenir deux systèmes de préférences),
- puis celle d'ELECTRE III (procédure dérivée de celle d'ELECTRE II mais plus sophistiquée),
- enfin celle d'ELECTRE IV (procédure relative au cas où il paraît difficile de quantifier l'importance relative des critères).

Comme on le verra, chacune de ces procédures a son propre domaine d'intérêt. Toutefois, aucune n'est véritablement pleinement satisfaisante. Chacune d'elles présente en effet des points faibles.

D'une façon générale, si l'on cherche à définir ce qu'est une "bonne" procédure de classement en termes de propriétés ou d'exigences à satisfaire (comme nous l'avons fait pour les procédures de sélection et d'affectation), on constate que ces propriétés ou exigences sont facilement contradictoires et que les plus simples (telles (r.6.1.4)) aboutissent à une impasse. Avec ce problème, on se heurte à des difficultés très profondes sur lesquelles nous reviendrons au 6.5. Pour les raisons qui précèdent, nous ne proposerons pas de liste d'exigences pour cette troisième problématique comme nous l'avons fait pour les deux autres.

6.1.5 Comment choisir une méthode ?

Nous nous mettons ici à la place de l'homme d'étude qui, dans le cadre d'un problème concret ¹, a opté en faveur d'une PAMC de type II ². Il lui faut maintenant choisir entre de nombreuses méthodes. L'origine de cette diversité a été expliquée à la fin du 5.1.2 (cf. a) à e)). Ci-après, nous adoptons un point de vue plus opérationnel destiné à guider l'homme d'étude en vue

¹ Eventuellement pour une phase d'étude bien spécifiée, cf. MMCAD, chapitre 4.

² Les raisons pouvant justifier une telle option ont été examinées au 5.1.2.

d'un choix effectif. Ce guide en trois étapes est complété en fin de section par le tableau 6.1.1 présentant, de façon synthétique, divers éléments caractéristiques des principales méthodes décrites en détail dans les trois sections ci-après.

i) L'homme d'étude peut commencer par faire intervenir la problématique retenue (cf. fin du 6.1.1 et autres paragraphes du 6.1) pour restreindre l'ensemble des méthodes a priori envisageables. Faisons observer que, dans le cas de la problématique β , il n'aura actuellement plus guère de possibilité de choix (cf. 6.3 et tableau 6.1.1). Ce qui suit ne concerne donc que les problématiques α et γ .

ii) On pourra restreindre encore l'éventail des méthodes possibles en prenant en considération les divers paramètres économiques (poids, seuils de veto et seuils de discrimination principalement, cf. 5.4.4) qu'il convient ou non de faire intervenir. Les options prises à ce niveau dépendent de la nature du problème mais aussi de la façon dont il est pris en charge par les divers intervenants, de leur personnalité, des sources d'information et du temps disponible. Le choix d'une méthode sera ainsi considérablement restreint s'il existe de bonnes raisons pour ne pas faire intervenir de poids (sans pour autant devoir considérer que les critères sont equi-pondérés). Une méthode qui fait intervenir des seuils de veto ainsi que des seuils de discrimination, peut (contrairement à ce qui se passe avec les poids) être aisément utilisée sans que de tels paramètres n'interviennent effectivement (il suffit d'attribuer une grande valeur aux seuils de veto et une valeur nulle aux seuils de discrimination). Il pourra cependant être préférable de recourir à une méthode plus simple : par exemple ELECTRE I ou ELECTRE II dans le cas où tous les critères sont des vrai-critères. Soulignons que, dans certains cas, la nécessité de recourir à une méthode simple ou encore familière à certains des intervenants peut imposer le choix d'une méthode, même si cela doit exclure la prise en compte de tel ou tel paramètre économique.

iii) Il est possible que l'homme d'étude ait encore, à ce niveau, le choix entre plusieurs méthodes. Il pourra alors faire intervenir son affinité pour les différentes méthodes, lesquelles,

jointes à quelques considérations d'ordre technique (cf. tableau 6.1.1), lèveront généralement sans peine ses dernières hésitations.

Tableau 6.1.1 : Caractéristiques des principales méthodes de type ELECTRE

Méthodes	Problématique	Paramètres économiques			Caractéristiques techniques du s.r.p.
		s., indif., pref.	poids	veto	
ELECTRE I	α	non	oui	oui	1 rel. nette de surclassement avec niveau de concordance
ELECTRE IS	α	oui	oui	oui	1 rel. nette de surclassement avec niveau de concordance + 1 (éventuel) indicateur de robustesse
ELECTRE TRI	β	oui	oui	oui	1 rel. nette de surclassement + des profils limites
ELECTRE II	γ	non	oui	oui	2 rel. emboîtées de surclassement avec niveaux de concordance
PROMETHEE	γ	oui	oui	non	1 rel. floue de préférence
ELECTRE III	γ	oui	oui	oui	1 rel. floue de surclassement
ELECTRE IV	γ	oui	non	oui	de 2 à 5 rel. emboîtées de surclassement

Les considérations théoriques du 5.5 et du 6.5 suggèrent également des motifs de préférer telle ou telle méthode. Faisons

cependant observer que des considérations d'ordre axiomatique se prêtent mal à des recommandations d'ordre général en vue du choix d'une méthode, en particulier dans le cas d'une démarche qui n'est pas entièrement descriptive. Dans ce cas, l'attrait que peut conférer à telle ou telle méthode une analyse axiomatique relève d'un jugement essentiellement subjectif (cf. Roy (1992)). Précisons enfin que toutes les méthodes présentées dans ce livre ont fait, dans de nombreuses applications, la preuve de leur viabilité.

6.2 PROCÉDURES D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU CHOIX : ELECTRE I ET ELECTRE IS

Cette section et les deux suivantes sont consacrées à une présentation des procédures d'exploitation propres aux méthodes les plus connues et les plus appliquées ¹. Cette présentation est faite dans une optique opérationnelle visant à éclairer les utilisateurs de telles méthodes.

Chacune des procédures d'exploitation ci-après a été originellement conçue en relation avec une définition particulière précise d'un système de préférences (cf. 5.2 et 5.3). Rappelons qu'il n'est pas interdit de vouloir appliquer ces procédures à des systèmes de préférences de même nature ² découlant de PAMC différentes, voire de comparaisons par paires effectuées directement, sans référence explicite à un tableau de performances.

6.2.1 ELECTRE I

La procédure d'exploitation ci-après concerne la problématique du choix (cf. 6.1.2). Elle s'applique à un système de préférences nettes, de type (S, R), dont la définition originelle a été présentée au 5.2.1.1.

¹ Ce sont des raisons pédagogiques et historiques qui nous ont amenés à faire figurer ci-après ELECTRE I et ELECTRE IS.

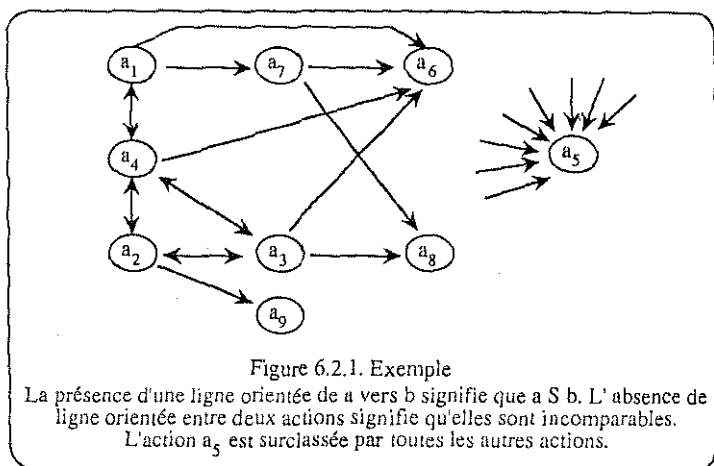
² Sous réserve des précautions de cohérence, déjà évoquées au 6.1.1, entre opérations de la procédure d'exploitation et propriétés du modèle de préférences.

a) Présentation

Cette procédure de sélection comporte quatre étapes successives.

Première étape : Identification des circuits maximaux

Un circuit maximal σ est un circuit de S (cf. 6.1.2 c) qui n'est inclus dans aucun autre circuit. Le circuit $\sigma' = (a_2, a_3, a_4, a_2)$ sur l'exemple de la figure 6.2.1 n'est pas maximal car il est inclus dans le circuit maximal $\sigma = (a_2, a_3, a_4, a_1, a_4, a_2)$. Le lecteur vérifiera sans peine que, étant donné une relation binaire nette S définie sur A , A peut être partitionné de façon unique en circuits maximaux $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ (tout ou partie de ces circuits pouvant être réduits à une seule action).



L'obtention de cette partition de A en circuits maximaux ne présente pas de difficultés. Elle se fait de façon empirique et sans risque d'erreur lorsque le nombre d'actions est de l'ordre de une, voire deux ou trois, dizaines. On peut commencer par éliminer de A toute action qui n'est pas surclassée ainsi que toute action qui n'en surclasse aucune autre. On itère ce processus jusqu'à ce que toute action restante soit à la fois surclassée et surclassante. Chacune des actions ainsi éliminées constitue, à elle seule, un

circuit maximal. On considère alors le sous-ensemble des actions non éliminées (s'il n'est pas vide). Celui-ci contient nécessairement au moins un circuit contenant plus d'une action. On en cherche un qui sera maximal. On élimine à nouveau les actions formant ce circuit et on répète la procédure sur le sous-ensemble des actions restantes (pour plus de précisions, voir Roy (1969-1970)).

Deuxième étape : Passage de S à $\succ_\sigma$

Notons $A_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ l'ensemble des circuits maximaux disjoints obtenus à l'étape précédente. On définit sur cet ensemble la relation de préférence $\succ_\sigma$ en posant, $\forall \sigma_j, \sigma_i \in A_\sigma$:

$$\sigma_j \succ_\sigma \sigma_i \Leftrightarrow [\sigma_i \neq \sigma_j \text{ et } [\exists b \in \sigma_j \text{ et } \exists a \in \sigma_i : b S a]]. \quad (r.6.2.1)$$

Troisième étape : Détermination du noyau N

La relation $\succ_\sigma$ est, par construction, non seulement asymétrique mais sans circuits. Elle admet par conséquent (cf. 6.1.2 c) un unique noyau $N \subset A_\sigma$. Pour l'obtenir, on peut procéder comme suit :

Chercher les éléments de A_σ tels qu'aucun autre ne leur est préféré selon $\succ_\sigma$: notons N^1 le sous-ensemble de tous les éléments ayant cette propriété. On élimine alors de A_σ les éléments de N^1 ainsi que tout autre élément tel qu'il existe dans N^1 un élément qui lui soit préféré. Soit A_σ^1 le sous-ensemble des éléments restants. S'il n'est pas vide, on recommence la procédure à partir de ce nouvel ensemble. On met ainsi en évidence successivement des ensembles $N^1, N^2, \dots, N^k$. La procédure s'arrête lorsque $A_\sigma^k = \emptyset$; on a alors :

$$N = N^1 \cup N^2, \dots, \cup N^k.$$

Quatrième étape¹ : Détermination de A'

Lorsque N ne comporte que des circuits réduits à une seule action, on pose $A' = N$. Supposons qu'il en soit autrement et que $\sigma \in N$ soit un circuit non réduit à une seule action. Lorsque les

¹ Dans la version originelle d'ELECTRE I, cette quatrième étape était réduite à $A' = N$.

actions de σ sont véritablement ex æquo, on choisit un représentant de ces actions comme indiqué au 6.1.2 a). Dans les cas où il en est autrement, il est recommandé de choisir ce représentant de σ dans A' de telle sorte que sa sélection justifie au mieux :

- d'une part l'élimination des autres actions du circuit σ ;
- d'autre part l'élimination des actions n'appartenant pas à σ qui se trouvent être telles que σ est le seul élément de N qui leur soit préféré selon $\succ_{\sigma}$.

b) Commentaires théoriques

La procédure de sélection d'ELECTRE I n'est pleinement justifiée que dans la mesure où il apparaît légitime de regarder les différentes actions d'un circuit maximal comme de véritables ex æquo. Les deux dernières règles de la quatrième étape ne sont que des palliatifs permettant de faire face, le moins mal possible, aux cas où il en est autrement. Il s'ensuit que leur mise en application peut présenter des difficultés comme on va le montrer sur l'exemple de la figure 6.2.1.

Les quatre étapes ci-dessus conduisent successivement à :

- *Première étape* : $A_{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\}$ avec :

$\sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\sigma_i = \{a_i\}$ pour $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

- *Deuxième étape* : La relation $\succ_{\sigma}$ vérifie : $\sigma_1 \succ_{\sigma} \sigma_i \forall i \neq 1$ ¹.

- *Troisième étape* : $N = \{\sigma_1\}$.

- *Quatrième étape* : a_4 est la seule action de σ_1 qui soit indifférente aux trois autres actions du circuit (à savoir a_1, a_2, a_3). Toutefois, si on se reporte à la relation de surclassement initiale S (cf. figure 6.2.1), poser $A' = \{a_4\}$ ne se justifie que si l'on fait appel successivement à a_1, a_2, a_3 en tant qu'actions indifférentes

¹ La relation $\succ_{\sigma}$ est vérifiée par d'autres couples mais cela est sans intérêt pour la suite.

à a_4 pour expliquer l'élimination respective de a_7 , a_9 , a_8 . Ce faisant, on a recours à une forme de transitivité certes limitée mais absente de S . Le circuit σ_1 n'est ici manifestement pas une classe de véritables ex æquo : non seulement σ_1 n'est pas une clique mais deux actions distinctes de σ_1 ne se comparent pas de la même façon avec une quelconque action extérieure à σ_1 . Un tel exemple montre les limites de la procédure de sélection d'ELECTRE I.

Revenons à une relation S quelconque définie sur A d'où l'on en a déduit A_σ et $\succ_\sigma$ conformément aux deux premières étapes de la procédure d'exploitation d'ELECTRE I. Notons S_σ la relation définie sur A en posant, $\forall b \in \sigma_j$ et $\forall a \in \sigma_i$:

$$b S_\sigma a \Leftrightarrow [\sigma_j = \sigma_i \text{ ou } \sigma_j \succ_\sigma \sigma_i].$$

On a $S \subset S_\sigma$. Appliquons maintenant la procédure non plus à S mais à S_σ . Il est clair que l'on aboutit à la même partition en circuits maximaux A_σ et à la même relation de préférences $\succ_\sigma$; le noyau N est donc, lui aussi, invariant. Relativement à S_σ , les diverses actions d'un circuit maximal sont véritablement ex æquo et peu importe la manière dont le représentant d'un tel circuit est choisi en quatrième étape. Par conséquent, l'ensemble A' auquel conduit la procédure appliquée à S convient aussi pour S_σ . Or, il est facile de vérifier que, relativement à S_σ , un tel ensemble A' possède les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ du 6.1.2.

Ce qui précède prouve que l'ensemble A' auquel conduit la procédure d'exploitation d'ELECTRE I possède toutes les propriétés requises au 6.1.2 pour une procédure de sélection à condition de pouvoir considérer qu'il est aussi légitime de l'appliquer à S_σ qu'à S . Lorsque S_σ apparaît comme nettement moins justifiée que S , on peut chercher à modifier S de façon à trouver une relation S' substituable à S et vérifiant $S'_\sigma = S'$: telle est (concernant la procédure d'exploitation) ce qu'apporte ELECTRE IS par rapport à ELECTRE I (cf. 6.2.2).

c) Commentaires pratiques

Il importe de ne pas perdre de vue que cette procédure (au même titre que les autres présentées dans cette section) ne constitue qu'une aide à la décision. Souvent, le caractère conflic-

tuel des critères, l'imprécision qui entoure les performances, la part d'arbitraire que recèlent les informations inter-critères (coefficients d'importance et seuils de veto) rendent impossible la mise en évidence d'un sous-ensemble suffisamment restreint A' d'actions à sélectionner de façon indiscutable. Face aux difficultés illustrées au b) relativement à une relation S donnée, on peut certes songer à surmonter les ambiguïtés d'application de la quatrième étape en sélectionnant, dans A' , l'ensemble des actions de N .

Dans l'exemple de la figure 6.2.1, on serait ainsi amené à poser $A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. On conçoit qu'une telle façon de faire conduise fréquemment à n'éliminer qu'un trop petit nombre d'actions et à ne faire que déplacer le problème. Pour le choix final, il convient en effet de procéder à une analyse plus fine de chacune des actions de A' afin de mettre en évidence leurs avantages et inconvénients respectifs et de permettre au décideur de se faire une conviction sur la solution à retenir.

Revenons à l'exemple et à la solution qui vient d'être suggérée : $A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Rien ne s'oppose à ce qu'on élimine a_4 qui est indifférente à a_1, a_2 et a_3 . Cela peut paraître choquant puisque, au b) ci-dessus, a_4 était seule sélectionnée. Il n'y a pourtant là aucune incohérence : l'homme d'étude, tout comme le décideur, sont simplement en droit d'hésiter entre une solution rapide : $A' = \{a_4\}$ ou une solution plus longue et, sans doute, plus coûteuse nécessitant une analyse fine de a_1, a_2 et a_3 afin de procéder à une comparaison plus poussée. Cette hésitation trouve son origine dans le fait que, d'après S , la substitution de a_1, a_2 ou a_3 à a_4 constitue un changement non significatif alors que la substitution de a_2 ou a_3 à a_1 en constitue un qui l'est davantage. Comme nous allons le montrer maintenant, cette analyse est toutefois incomplète puisqu'elle ne prend pas en compte ce qu'il peut y avoir de fragile, de discutable dans le fait d'avoir accepté ou refusé chacune des affirmations $a_j S a_i$.

La discussion critique à laquelle il convient de soumettre les résultats d'ELECTRE I n'a pas pour seule raison d'être les ambiguïtés de l'étape 4. La dichotomie $A', \bar{A}A'$ n'a été envisagée jusqu'ici que relativement à une seule relation nette S (ou S_σ).

Comme on l'a déjà évoqué au b), d'autres relations de surclassement peuvent apparaître tout aussi légitimes. Pour obtenir de telles relations, il suffit de modifier, dans (r.5.2.3) et (r.5.2.4), les valeurs :

- du niveau de concordance s ;
- de certains coefficients d'importance k_j et/ou veto v_j ;
- de certaines performances $g_j(a)$.

En combinant de diverses manières de telles modifications justifiées par les éléments d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination, on est amené à bâtir des relations de surclassement $S_1, S_2, \dots$. Ces relations sont toutes à peu près aussi légitimes que la relation initiale S . Cette dernière doit cependant être bâtie de façon à pouvoir servir de relation de référence. L'analyse de robustesse telle que nous l'avons introduite au 5.4.4 conduit ici à apprécier la robustesse de la sélection A' à laquelle conduit S lorsqu'on lui substitue successivement $S_1, S_2, \dots$. Il s'agit donc de comparer, non seulement à N mais aussi entre eux, les divers noyaux $N_1, N_2, \dots$. On peut ainsi vérifier si la sélection initiale A' est justifiée dans tous les cas ou presque. Si tel n'est pas le cas, il convient de modifier A' de façon à préconiser un sous-ensemble qui ne soit pas justifié que pour la seule relation de référence. Nous verrons au chapitre 8, sur un cas concret, comment procéder en pratique.

Il est clair qu'une telle analyse de robustesse peut être poussée plus ou moins loin. Dans tous les cas, il est indispensable d'en entreprendre une, même sommaire, afin de ne pas risquer d'aboutir, sur la base d'une relation initiale S trop particulière, à des conclusions résistant mal à des changements mineurs dans la définition de S . En tout premier lieu, il convient de faire varier, dans une plage raisonnable, le niveau de concordance s . Les éventuelles modifications du noyau qui en résultent sont généralement faciles à interpréter et riches d'enseignement.

6.2.2 ELECTRE IS

La procédure d'exploitation qui suit est encore une procédure de sélection. Nous avons déjà indiqué au b) ci-dessus ce qu'elle

apportait de nouveau par rapport à la précédente. Nous conserverons les mêmes notations qu'au 6.2.1.

Cette procédure s'applique encore à un système de préférences nettes de type (S, R) (voir la définition originelle au 5.2.1.2). Elle fait en outre intervenir des informations concernant la robustesse de chacune des conclusions $b \text{ S } a$ ou $\text{Non}(b \text{ S } a)$ qui découlent de la prise en considération de S. De façon plus précise, il s'agit d'apprécier, à l'aide d'un nombre ou d'un vecteur $\rho(b, a)$ appelé **indicateur de robustesse**, s'il est plus ou moins justifié de modifier la conclusion de S relativement au couple (b, a), autrement dit de substituer à S une relation S' dans laquelle on a :

- soit $b \text{ S' } a$ au lieu de $\text{Non}(b \text{ S } a)$;
- soit $\text{Non}(b \text{ S' } a)$ au lieu de $b \text{ S } a$.

Nous examinerons au b) ci-après les bases sur lesquelles le nombre ou le vecteur $\rho(b, a)$ peut être défini. Bornons-nous à préciser ici que si $\rho(b, a)$ est un nombre vérifiant :

$$0 \leq \rho(b, a) \leq 1,$$

il est souhaitable, pour la clarté de son utilisation, de le concevoir de telle sorte que l'on puisse interpréter :

- $\rho(b, a) = 1/2$ comme : il est tout aussi justifié de conserver que de modifier la conclusion de S ;
- $\rho(b, a) > 1/2$ comme : il est plus justifié de modifier $\text{Non}(b \text{ S } a)$ en $b \text{ S' } a$ que $b \text{ S } a$ en $\text{Non}(b \text{ S' } a)$ (et cela d'autant plus que $\rho(b, a)$ est plus proche de 1) ;
- $\rho(b, a) < 1/2$ comme : il est plus justifié de modifier $b \text{ S } a$ en $\text{Non}(b \text{ S' } a)$ que $\text{Non}(b \text{ S } a)$ en $b \text{ S' } a$ (et cela d'autant plus que $\rho(b, a)$ est plus proche de 0).

Faisons observer qu'un indicateur de robustesse ainsi conçu diffère sensiblement d'un indice de crédibilité tel qu'il a été défini dans le paragraphe introductif du 5.3.2 (rapprocher notamment l'exigence 2 des interprétations de ρ préconisées ci-dessus).

Notons qu'une version extrêmement simplifiée d'ELECTRE IS consiste à appliquer, au système (S, R) de la PAMC d'ELECTRE IS (cf. 5.2.1.2), la procédure d'exploitation d'ELECTRE I. Dans cette version, l'indicateur de robustesse $\rho(a, b)$ n'intervient pas.

a) Présentation

La procédure de sélection d'ELECTRE IS comporte, comme celle d'ELECTRE I, quatre étapes successives :

- la première a pour objet l'identification des classes présumées ex æquo, ce qui conduit à accorder une attention particulière aux circuits qui ne sont pas des cliques ;
- la seconde a pour objet la définition d'une relation sans circuits sur les classes de présumés ex æquo, ce qui oblige à s'interroger sur la signification qu'il convient d'accorder aux éventuelles différences dans la manière dont les actions d'une même classe de présumés ex æquo se comparent aux actions extérieures à cette classe ;
- la troisième consiste, exactement comme dans ELECTRE I, à déterminer le noyau de la relation sans circuits qui a finalement pu être défini sur un ensemble de classes d'actions désormais regardées comme ex æquo ;
- la quatrième concerne la détermination de A' (sur des bases tout-à-fait similaires à celles d'ELECTRE I).

Chacune des deux premières étapes d'ELECTRE IS peut être plus ou moins simplifiée jusqu'à devenir identique à son homologue dans ELECTRE I (ce qui revient à ne plus faire jouer aucun rôle à l'indicateur de robustesse).

Première étape : Identification des classes de présumés ex æquo

Soit A_σ la partition de A en circuits maximaux de S obtenue comme avec ELECTRE I. Tout circuit maximal réduit à une seule action est regardé comme une classe d'ex æquo. Tout circuit maximal comportant deux actions est regardé comme une classe de présumés ex æquo (cette présomption pouvant être remise en

question à l'étape suivante). Soit σ un circuit maximal comportant au moins trois actions. Si σ est une clique ¹, alors σ est regardé comme une classe de présumés ex æquo.

Considérons maintenant un circuit maximal σ comportant au moins trois actions et qui n'est pas une clique. On doit choisir entre l'une des deux possibilités suivantes :

1ère possibilité : Transformation de σ en clique : On modifie localement ² S en $\bar{S}$ en posant, $\forall a, b \in \sigma, b \bar{S} a$.

2e possibilité : Rupture du circuit σ : On modifie localement ³ S en $\bar{S}$ en posant $\text{Non}(b S a)$ pour un (voire plusieurs) couple(s) d'actions de σ vérifiant $b S a$ de façon à ce que σ ne soit plus un circuit de $\bar{S}$.

Pour choisir entre ces deux possibilités, on prend appui sur l'indicateur de robustesse.

Il s'agit de savoir s'il est plus justifié :

– d'ajouter les surclassements $b \bar{S} a$ nécessaires à la transformation de σ en clique

– ou de supprimer le (voire les) surclassement(s) $b S a$ assurant, de la façon la plus justifiée, la rupture du circuit σ .

¹ c'est-à-dire si l'on a $a S b$ et $b S a$ quel que soit le couple d'actions (b, a) que l'on considère dans σ .

² Pour les couples d'actions de σ ne donnant pas lieu à modification, $\bar{S} = S$.

³ Pour les couples d'actions de σ ne donnant lieu à aucune modification, $\bar{S} = S$.

Ce choix peut être laissé au libre arbitre de l'homme d'étude ¹. Il peut aussi être intégré à la procédure ².

Lorsque $\rho(b, a)$ est un simple nombre s'interprétant comme il a été indiqué ci-dessus, il paraît légitime de fonder le choix entre les deux possibilités précédentes en faisant intervenir prioritairement les nombres ρ_1 et ρ_2 définis comme suit :

– parmi tous les surclassements $b \in \mathcal{S}$ a qu'il est nécessaire d'ajouter pour transformer σ en clique, on recherche celui qui est le moins justifié, c'est-à-dire pour lequel $\rho(b, a)$ est minimum ; on note ρ_1 la valeur de ce minimum ;

– pour assurer la rupture du circuit σ , on peut s'y prendre de différentes façons, certaines d'entre elles faisant intervenir la suppression de plus d'un surclassement ; on caractérise chacune de ces façons par la robustesse maximum du surclassement supprimé et on retient la façon de faire pour laquelle ce maximum est minimum ; on note ρ_2 la valeur de ce minimum.

On peut par exemple décider d'adopter la première des deux possibilités si et seulement si ³ :

$$1/2 - \rho_1 < \rho_2 - 1/2. \quad (r.6.2.2)$$

Précisons maintenant ce qu'il advient dans chacune de ces deux possibilités :

– avec la première, $\mathcal{S}$ est modifiée localement comme il a été dit et σ est regardé comme une classe de présumés *ex æquo* c ;

– avec la seconde, il convient d'analyser ce que devient σ suite à la modification locale de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$: le sous-ensemble d'actions formant σ peut, relativement à $\mathcal{S}'$, ne comporter aucun circuit maximal qui ne soit pas une clique, auquel cas chacun de ces circuits maximaux donne naissance à des classes d'*ex æquo* lorsqu'ils sont réduits à une seule action ou de présumés *ex æquo* lorsqu'ils en comportent au moins deux ; si, relativement à $\mathcal{S}'$, il subsiste au moins un circuit maximal $\bar{\sigma}$ qui n'est pas une clique, alors il faut répéter, sur $(\bar{\sigma}, \mathcal{S}')$, la procédure qui vient d'être appliquée à $(\sigma, \mathcal{S})$. On remarquera que $\bar{\sigma}$

¹ Tel est le cas du logiciel ELECTRE IS actuellement disponible au LAMSADE.

² Des recherches sont actuellement menées au LAMSADE dans ce sens dans une direction faisant appel à l'intelligence artificielle.

³ Cette règle peut paraître arbitraire en cas d'égalité ou en cas de différence très faible entre les deux membres ; nous reviendrons sur ce point au c).

comporte nécessairement moins de sommets que σ , ce qui garantit la convergence de la procédure.

Lorsque A_σ contient plus d'un circuit maximal qui n'est pas une clique, la procédure précédente doit être appliquée successivement à chacun d'eux. On procède ainsi localement et de façon disjointe à la modification de S . On note $\overline{S}$ la relation de surclassement finalement obtenue et A_c l'ensemble des classes d'ex æquo (réduites à une seule action) et de présumés ex æquo résultant de cette étape.

Deuxième étape : Construction d'une relation sans circuits sur les classes de présumés ex æquo

Notons $A_c = \{c_1, \dots, c_q\}$ l'ensemble des classes obtenues à la fin de l'étape précédente. Faisons-lui correspondre la relation $\overline{>}_c$ définie par (cf. (r.6.2.1)), $\forall \sigma_j, \sigma_i \in A_c$:

$$c_j \overline{>}_c c_i \Leftrightarrow [c_j \neq c_i \text{ et } [\exists b \in c_j, \exists a \in c_i : b \overline{S} a]].$$

Par construction, $\overline{>}_c$ est asymétrique et sans circuits.

Si chacune des classes de présumés ex æquo de A_c renfermait de véritables ex æquo, on aurait, $\forall c_j, c_i \in A_c, \forall a \in c_i$ et $\forall b \in c_j$:

$$c_j \overline{>}_c c_i \Rightarrow b \overline{S} a. \quad (\text{r.6.2.3})$$

Lorsque (r.6.2.3) est vérifiée, on définit $S', A'_c, >'_c$ en posant :

$$S' = \overline{S}, A'_c = A_c, >'_c = \overline{>}_c$$

et l'on passe à la troisième étape.

Lorsque (r.6.2.3) n'est pas vérifiée, on considère l'ensemble Δ des couples (c_j, c_i) qui mettent (r.6.2.3) en défaut. Pour tous les couples n'appartenant pas à Δ , on pose $>'_c = \overline{>}_c$. Pour achever de

définir $\succ'_c$ relativement aux autres couples, on itère la procédure suivante, laquelle peut conduire à diviser certaines des classes de présumés ex æquo.

Considérons un couple $(c_j, c_i) \in \Delta$. On doit choisir entre l'une des trois possibilités suivantes :

1ère possibilité : Acceptation de $c_j \succ_c c_i$, ce que l'on traduit en posant $c_j \succ'_c c_i$: cela équivaut à modifier localement $\mathcal{T}$ en S' en posant, $\forall b \in c_j$ et $\forall a \in c_i$:

$b S' a$.

2e possibilité : Refus de $c_j \succ_c c_i$, ce que l'on traduit par $\text{Non}(c_j \succ'_c c_i)$: ceci équivaut à modifier localement $\mathcal{T}$ en S' en posant, $\forall b \in c_j$ et $\forall a \in c_i$:

$\text{Non}(b S' a)$.

3e possibilité : Division de c_j ou c_i en au moins deux sous-classes (cette possibilité n'est à envisager que dans la mesure où aucune des deux possibilités précédentes ne conduit à une relation S' aussi justifiée que $\mathcal{T}$) : ceci conduit à modifier localement $\mathcal{T}$ en S' comme suit : supposons que la division porte sur c_j et notons c^- et c^+ deux des classes nées de cette division¹ (A_c doit être modifiée en conséquence). On pose, $\forall b \in c^+$ et $\forall a \in c^-$:

$\text{Non}(b S' a)$

($S' = \mathcal{T}$ pour tous les autres couples d'actions de c_j) et on élabore la division de c_j de telle sorte que (cf. figure 6.2.2) la première possibilité convienne à l'un des couples (c, c_j) ou (c^+, c_j) et la seconde à l'autre couple.

Pour choisir entre ces trois possibilités, on prend encore appui sur l'indicateur de robustesse.

Il s'agit de savoir s'il est plus justifié :

– d'ajouter les surclassements $b S' a$ qu'implique $b \succ'_c a$ lorsqu'on opte pour la première possibilité ou de supprimer les surclassements $b \mathcal{T} a$ qu'implique $\text{Non}(b \succ'_c a)$ lorsqu'on opte pour la seconde possibilité

¹ Le cas où elle porte sur c_i s'en déduit de façon évidente.

— ou de supprimer les surclassements b $\bar{S}$ a qu'implique la division de l'une des classes en au moins c^- et c^+ ainsi que les éventuelles modifications subséquentes de $\bar{S}$ définissant la manière dont les nouvelles classes se comparent à celle des deux classes initiales qui n'a pas été divisée (cf. figure 6.2.2).

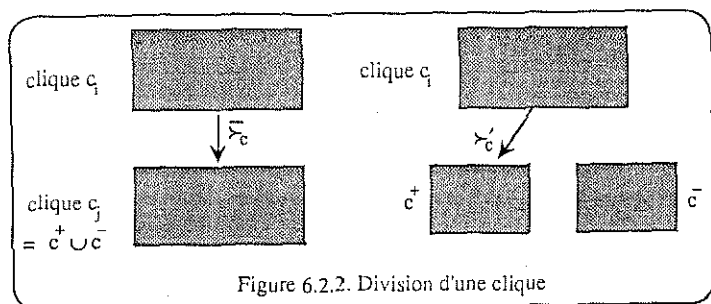


Figure 6.2.2. Division d'une clique

Ce choix peut, comme dans la première étape, être laissé au libre arbitre de l'homme d'étude ou être intégré dans la procédure ¹.

Faisons observer que la division d'une classe c_i ne remet pas en question la manière dont elle a été comparée (avant sa division) avec d'autres classes selon $\succ_c$. Il se peut toutefois que c_i ait été à l'origine de la division d'une autre classe c_h ; il faut alors examiner si, après division de c_i , la division de c_h reste justifiée.

Les modifications locales mais sans cesse disjointes de $\bar{S}$ introduites au cours des applications de la procédure précédente successivement à chacun des couples $(c_j, c_i) \in \Delta$ aboutissent finalement à une relation de surclassement S' définie sur A . La partition en classes d'ex æquo A_c' déduite de A_c par division éventuelle de certaines des classes de présumés ex æquo possède les trois propriétés suivantes :

1°) Chaque élément de A_c' est une clique maximale de S' .

¹ Dans le cas où $p(b, a)$ est un nombre, le lecteur pourra chercher à énoncer des règles dans le même esprit que celles proposées en première étape pour fonder cette fois le choix entre les trois possibilités de cette seconde étape.

2°) Etant donné deux cliques distinctes c'_j et c'_i de A'_c , on a, $\forall b \in c'_j$ et $\forall a \in c'_i$:

$$\begin{aligned} b S' a &\Rightarrow c'_j \succ_c c'_i \text{ et} \\ \text{Non}(b S' a) &\Rightarrow \text{Non}(c'_j \succ_c c'_i) \end{aligned} \quad (r.6.2.4)$$

3°) La relation $\succ'_c$ ainsi définie est sans circuits.

Troisième étape : Détermination du noyau N

La relation $\succ'_c$ étant sans circuits, elle admet un unique noyau $N \subset A'_c$ (il s'obtient en procédant comme indiqué au 6.2.1, troisième étape).

Quatrième étape¹ : Détermination de A'

Dans chacune des classes formant le noyau N, on choisit un représentant. A' est l'ensemble de ces représentants.

Pour une classe $c_j \in N$ non réduite à une seule action, le choix de son représentant importe peu si, localement (c'est-à-dire relativement au surclassement $b S' a$ avec $b \in c_j$ et a quelconque), S' est aussi justifiée que S . Lorsqu'il en est autrement, la sélection du représentant de c_j doit permettre de justifier au mieux :

- d'une part l'élimination des autres actions de c_j ;
- d'autre part l'élimination des actions n'appartenant pas à c_j qui se trouvent être telles que c_j est le seul élément de N qui leur soit préféré selon $\succ'_c$.

Ces justifications doivent pouvoir être fondées sur les surclassements $b S' a$ les mieux justifiés compte-tenu de l'indicateur de robustesse $p(b, a)$.

¹ Dans un premier temps, pour l'analyse de robustesse, cette étape peut être omise.

b) Commentaires théoriques

La procédure de sélection d'ELECTRE IS n'est pleinement satisfaisante que dans la mesure où, à la seconde étape, on aboutit à une relation de surclassement S' que l'on peut regarder comme aussi bien justifiée (ou presque) que S . Dans ces conditions en effet, la quatrième étape ne présente aucune difficulté et l'ensemble A' auquel elle conduit vérifie les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ (cf. 6.1.2) vis-à-vis de S' . Supposons au contraire que l'obtention d'une partition en classes d'ex æquo A'_c ayant les trois propriétés requises en fin de deuxième étape ne puisse être fondée sur une relation S' nettement plus difficile à justifier que S . Dans une telle situation, on peut encore espérer (en prenant appui sur les deux dernières règles de la quatrième étape) aboutir à un ensemble A' jouissant des propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$ et $\alpha.5$ au regard des seuls surclassements bien justifiés de S' (c'est dire que A' n'est peut-être pas aussi restreinte que possible, $\alpha.3$ et $\alpha.4$ bis pouvant être mises en défaut du fait de surclassements justifiés éliminés de S').

Quoi qu'il en soit, le fait de ne pas aboutir à coup sûr à une sélection A' ayant toutes les propriétés requises semble être moins imputable à la méthode ELECTRE IS proprement dite qu'à la nature des "données". L'analyse conduite au 6.1.2 a en effet montré que les propriétés $\alpha.1$, $\alpha.2$, $\alpha.3$, $\alpha.4$ bis et $\alpha.5$ ne sont compatibles à coup sûr que vis-à-vis d'une relation de surclassement S' conforme aux trois propriétés qui servent d'objectifs à la deuxième étape.

Distinguons, dans S' , sa partie asymétrique $\succ'$ et sa partie symétrique I . Les trois propriétés visées en fin de deuxième étape équivalent respectivement à :

$$I^2 \subset I, I \cdot \succ' \cdot I \subset \succ', \succ' \text{ est sans circuits.}$$

ELECTRE IS repose donc sur une tentative pour substituer, à un système de préférences de départ de type (S, R) , un système de type $(\succ', I, R')$ aussi justifié que le premier et possédant les trois propriétés ci-dessus.

Imaginons qu'on applique la procédure de sélection d'ELECTRE I à la relation S' obtenue en fin de seconde étape d'ELECTRE IS. On aurait $A_\sigma = A'_c$ et $\succ_\sigma = \succ'_c$. Le noyau N serait le même dans les deux cas. ELECTRE I serait pleinement légitime puisque $S_\sigma = S'$.

Examinons pour terminer ce paragraphe les bases sur lesquelles l'indicateur de robustesse $\rho(b, a)$ peut être défini. Deux cas sont à considérer :

Premier cas : $\rho(b, a)$ fait explicitement référence à la façon dont S est définie.

Deuxième cas : $\rho(b, a)$ appréhende la robustesse du surclassement en empruntant une voie légèrement différente de celle qui sert à définir S .

Ici, nous nous bornons à présenter deux façons de procéder se rapportant à l'un et l'autre cas. Pour l'un comme pour l'autre, nous supposons que S est définie par (r.5.2.8) et (r.5.2.9) (d'autres possibilités sont évoquées au c) ci-après).

Posons (par référence à (r.5.2.8) et (r.5.2.9)) :

$$\rho_c(b, a) = c(b, a) - s,$$

$$\rho_d(b, a) = g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) - q_j(g_j(a)) \cdot w[s, c].$$

Pour que $b S a$ soit validée, on doit avoir $\rho_c(b, a) \geq 0$ et, $\forall j \in F$, $\rho_d(b, a) \geq 0$. Il est clair que plus ces nombres positifs sont grands et plus les conditions de validation sont robustes face à des modifications du niveau de concordance s , des coefficients d'importance k_j , des seuils de veto v_j ou encore des performances $g_j(b)$ et $g_j(a)$. En revanche, lorsque l'un de ces nombres positifs est voisin de 0, l'affirmation n'est plus robuste et le changement de $b S a$ en $\text{Non}(b S' a)$ n'a rien d'injustifié. De même, lorsque l'un de ces nombres est négatif et voisin de 0, le changement de $\text{Non}(b S a)$ en $b S' a$ peut être accepté. On peut donc poser¹ :

$$\rho(b, a) = \{\rho_c(b, a), \rho_d(b, a), \dots, \rho_d(b, a)\}.$$

Une telle définition de ρ peut paraître difficile à manier (sauf peut-être sur la base d'une famille de règles de type "si ... alors") et l'on peut lui préférer un indicateur plus synthétique réduit à un nombre. Pour réaliser cette synthèse, on peut songer à faire appel à l'indice de crédibilité d'ELECTRE III $\sigma(b, a)$ (cf. (r.5.3.12)). Cet indice ne peut pas être pris tel quel comme indicateur de robustesse. Il est certes satisfaisant lorsque, $\forall j \in F$, $d_j(b, a) \leq c(b, a)$: on a alors $\sigma(b, a) = c(b, a)$ qui, dans ces conditions, constitue un bon indicateur de robustesse (la valeur 1/2 pouvant s'interpréter comme dans le paragraphe introductif du 6.2.2). Il ne convient plus dès lors que, pour un critère au moins, $d_j(b, a)$ devient proche de 1 : l'affirmation $b S a$ est évidemment d'autant moins justifiée que $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a)$ s'approche de 0 (par valeur positive) mais, du point de vue de la robustesse, cela ne signifie nullement que l'on doive poser $\rho(b, a) = 0$ dès l'instant où $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) = 0$. Pour avoir un indicateur mieux adapté, définissons $d'_j(b, a)$ conformément à (r.5.3.11) mais en substituant au veto (entrant dans la définition de S) une quantité $v'_j(g_j(b)) >$

¹ Soulignons que les composantes de cet indicateur ne sont pas normées pour ne varier qu'entre 0 et 1.

$v_j(g_j(b))$. Le nombre $\sigma'(b, a)$ défini par (r.5.3.12) en substituant $d'_j(b, a)$ à $d_j(b, a)$ ne s'annule plus aussitôt que $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a)$ devient négatif. Sous réserve d'adopter une définition appropriée de $v'_j(g_j(b))$, il nous paraît possible de transposer les principes du 5.3.2 b2) en vue de justifier le choix de $\rho(b, a) = \sigma'(b, a)$.

La quantité $v'_j(g_j(b))$ peut être définie en fonction du principe additionnel suivant :

Lorsque $c(b, a)$ est voisin de s et que seul le critère j est discordant avec $g_j(b) + v_j(g_j(b)) - g_j(a) = 0$, alors la robustesse est choisie égale à $s/2$ ($< 1/2$).

Ce résultat est obtenu en posant :

$$v'_j(g_j(b)) = v_j(g_j(b)) + \frac{1-s}{1+s} [v_j(g_j(b)) - p_j(g_j(b))]$$

(dans les conditions d'application du principe ci-dessus, il vient : $d'_j(b, a) = s + 0,5/(1-s)$, d'où le résultat cherché).

Ce qui précède souligne la différence entre indice de crédibilité et indicateur de robustesse. Le premier apprécie la crédibilité d'un surclassement par rapport à des valeurs de paramètres strictement définies. L'appréciation de la robustesse tient compte du fait que les valeurs de ces paramètres sont sujettes à caution.

c) Commentaires pratiques

Ces commentaires accompagnent tout d'abord le déroulement pas à pas d'un exemple numérique. Celui-ci reprend, en le complétant, l'exemple qui a déjà servi à illustrer ELECTRE I. Le paragraphe s'achève en attirant l'attention sur quelques points importants en pratique concernant notamment l'analyse de robustesse et le mode de définition de la relation S .

Revenons à l'exemple de la figure 6.2.1. Complétons cette définition de S par celle d'un indicateur de robustesse défini comme il vient d'être indiqué au b) ci-dessus en posant $\rho(a_j, a_i) = \sigma'(a_j, a_i)$ (cf. tableau 6.2.1). La procédure ELECTRE IS peut alors se dérouler comme suit.

Première étape : $A_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\}$ (mêmes notations qu'au 6.2.1 b)). Le circuit maximal $\sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ n'est pas une clique. Examinons successivement les deux possibilités prévues au 6.2.2 a) :

— La transformation de σ_1 en clique conduit à prendre en compte, dans $\bar{S}$, quatre surclassements nouveaux : $a_1 \bar{S} a_2, a_2 \bar{S} a_1, a_1 \bar{S} a_3, a_3 \bar{S} a_1$; ils correspondent respectivement aux valeurs suivantes de ρ : 0,717 ; 0,692 ;

Tableau 6.2.1 : Valeurs de $p(a_j, a_i)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1,000	0,717	0,665	0,794	0,922	0,742	0,691	0,246	0,053
a_2	0,692	1,000	0,871	0,717	0,922	0,635	0,000	0,265	0,666
a_3	0,615	0,922	1,000	0,845	0,922	0,768	0,208	0,794	0,589
a_4	0,692	0,845	0,794	1,000	0,999	0,717	0,239	0,080	0,042
a_5	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
a_6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,948	1,000	0,423	0,000	0,000
a_7	0,769	0,573	0,296	0,589	0,871	0,922	1,000	0,794	0,087
a_8	0,453	0,205	0,166	0,205	0,666	0,273	0,273	1,000	0,640
a_9	0,115	0,178	0,059	0,166	0,743	0,000	0,000	0,479	1,000

Remarque : Comme on le verra au chapitre 8, les chiffres qui figurent dans ce tableau, de même que les surclassements de la figure 6.2.1, sont issus d'un cas réel d'aide à la décision. Précisons que, à l'époque où le cas a été traité, la condition de veto (r.5.2.9) ne faisait pas intervenir le terme $-k/k[F]$ dans $w(s, c)$. La prise en compte de ce terme aurait conduit à l'adjonction de a_1 S a_2 et a_7 S a_1 dans la figure 6.2.1.

0,665 ; 0,615. C'est donc l'adjonction de $a_3 \overline{S} a_1$ qui apparaît comme la moins justifiée des quatre, d'où : $\rho_1 = 0,615$.

— La rupture du circuit σ peut se faire en ne prenant plus en compte, dans $\overline{S}$, soit $a_1 \overline{S} a_4$, soit $a_4 \overline{S} a_1$ ¹. On a : $\rho(a_1, a_4) = 0,794$ et $\rho(a_4, a_1) = 0,692$. C'est donc la suppression du surclassement $a_4 \overline{S} a_1$ qui apparaît comme la plus justifiée (même si elle ne l'est guère), d'où : $\rho_2 = 0,692$.

La comparaison de $1/2 - \rho_1 = -0,115$ avec $\rho_2 - 1/2 = +0,192$ (cf. (r.6.2.2)) préconise de choisir, sans hésitation, la première de ces deux possibilités. De plus, la relation $\overline{S}$ ainsi définie (ne différant de S que par l'adjonction des quatre surclassements mentionnés plus haut) paraît aussi justifiée que S . Dans ces conditions, $A'_c = A_c$.

A titre d'exemple, indiquons que le choix de la seconde des deux possibilités aurait conduit à poser :

$$A'_c = \{c_1, c_2, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\} \text{ avec } c_1 = \{a_1\}, c_2 = \{a_2, a_3, a_4\},$$

$\overline{S}$ ne différant de S dans ce cas que par $\text{Non}(a_4 \overline{S} a_1)$.

Deuxième étape : Il vient :

$$\Delta = \{(\sigma_1, \sigma_6), (\sigma_1, \sigma_7), (\sigma_1, \sigma_8), (\sigma_1, \sigma_9)\}.$$

Considérons tout d'abord le couple (σ_1, σ_6) et commençons par comparer les deux premières des trois possibilités offertes (cf. a), deuxième étape) :

— Acceptation de $\sigma_1 \overline{S}_c \sigma_6$: Ceci équivaut à l'adjonction du seul surclassement $a_2 \overline{S}' a_6$ avec $\rho(a_2, a_6) = 0,635$.

— Refus de $\sigma_1 \overline{S}_c \sigma_6$: Ceci équivaut à la suppression des trois surclassements $a_1 \overline{S} a_6$, $a_3 \overline{S} a_6$, $a_4 \overline{S} a_6$ ayant respectivement pour robustesse 0,742 ; 0,768 ; 0,717. Pour juger de cette possibilité, on peut encore prendre en considération le maximum de robustesse des arcs à supprimer, ce qui conduit à poser $\rho_2 = 0,768$.

¹ Il existe trois autres possibilités qui, par suppression de deux surclassements, détruisent la clique a_2, a_3, a_4 : le lecteur qui voudrait les prendre en considération vérifiera sans peine qu'elles conduisent à des solutions moins justifiées que celles examinées ici.

Il est clair que la seconde possibilité n'est pas acceptable alors que la première l'est. Cette dernière peut être caractérisée par la robustesse $\rho_1 = 0,635$ du surclassement le moins robuste qu'elle conduit à ajouter. On pose par conséquent $\sigma_1 \succ_c \sigma_6$, ce qui donne naissance à une relation S' aussi justifiée que S dont elle ne diffère que par $a_2 S' a_6$. Il paraît ici inutile d'envisager la troisième possibilité.

Considérons maintenant le second élément de $\Delta : (\sigma_1, \sigma_7)$. En procédant comme ci-dessus, on trouve :

$$\rho_1 = 0 \text{ et } \rho_2 = 0,691.$$

Sans même faire appel à (r.6.2.2), on constate que la seconde de ces deux possibilités est meilleure que la première, laquelle paraît inacceptable. La seconde n'est toutefois pas très satisfaisante puisqu'elle conduit à supprimer un surclassement de forte robustesse. Il est donc nécessaire de lui comparer la troisième possibilité. Il n'existe ici qu'une seule façon de diviser σ_1 en deux sous-classes (qui sont des cliques) ; elle consiste à poser :

$$c^- = \{a_1\}, c^+ = \{a_2, a_3, a_4\}.$$

Cette division s'obtient par la suppression de $a_4 S a_1$ (de robustesse 0,692 égale à celle de $a_1 S a_7$), de $a_2 S a_1$ (0,692) et de $a_3 S a_1$ (0,615). Cette troisième possibilité paraît donc encore moins justifiée que la seconde et l'on conservera (au moins provisoirement) σ_1 comme classe d'ex æquo avec $\text{Non}(\sigma_1 \succ_c' \sigma_7)$.

Examinons, à titre d'exemple, à quoi conduirait la division de σ_1 en c^- et c^+ en posant :

$$c^- \succ_c' \sigma_7, c^+ \succ_c' \sigma_7, \text{Non}(c^+ \succ_c' \sigma_7).$$

Comme on l'a fait remarquer, aucun changement ne doit intervenir dans la comparaison avec σ_6 . On aurait autrement dit $c^- \succ_c' \sigma_6$ et $c^+ \succ_c' \sigma_6$.

Les deux couples (σ_1, σ_8) et (σ_1, σ_9) de Δ qui restent à étudier donneraient alors naissance à :

- d'une part (c^-, σ_8) et (c^-, σ_9) pour lesquels on aurait, de façon évidente, $\text{Non}(c^- \succ_c' \sigma_8)$ et $\text{Non}(c^- \succ_c' \sigma_9)$,
- d'autre part (c^+, σ_8) et (c^+, σ_9) qui devraient être étudiés (comme on va le faire maintenant) en lieu et place de (σ_1, σ_8) et (σ_1, σ_9) .

Venons-en à l'étude de (σ_1, σ_8) . Les deux premières possibilités conduisent respectivement à :

- ajouter trois surclassements $a_1 S' a_8$, $a_2 S' a_8$ et $a_4 S' a_8$ dont le moins robuste conduit à poser $\rho_1 = 0,080$;
- supprimer un surclassement en posant $\text{Non}(a_3 S' a_8)$, ce qui conduit à $\rho_2 = 0,794$.

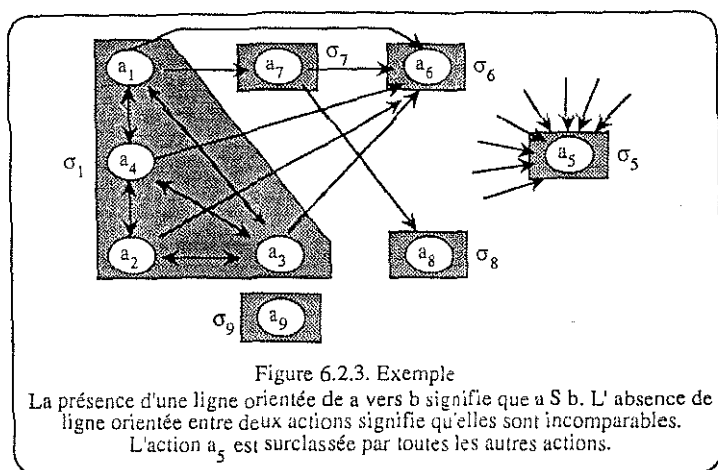
Ici encore, la seconde solution est la mieux justifiée même si, comme dans le cas précédent, elle conduit à supprimer un surclassement relativement robuste. Une analyse de la troisième possibilité montre que la division de σ_1 en $\{a_3\}$ d'une part et en $\{a_1, a_2, a_4\}$ d'autre part conduit (que l'on identifie $\{a_3\}$ à c^- ou à c^+) à supprimer au minimum deux surclassements de robustesse au moins égale à 0,794. On conserve donc encore σ_1 comme classe d'ex æquo avec $\text{Non}(\sigma_1 \succ_e' \sigma_8)$.

Le dernier élément de : $\Delta(\sigma_1, \sigma_9)$ amène à comparer :

- l'adjonction des trois surclassements $a_1 S' a_9$, $a_3 S' a_9$ et $a_4 S' a_9$ dont le moins robuste conduit à poser $\rho_1 = 0,042$;
- la suppression du seul surclassement $a_2 S' a_9$ de robustesse $\rho_2 = 0,666$.

Dans ce dernier cas, la seconde possibilité est à nouveau la mieux justifiée (la troisième, en isolant $\{a_2\}$, conduirait à supprimer des surclassements nettement plus robustes) : σ_1 reste donc définitivement une classe d'ex æquo avec $\text{Non}(\sigma_1 \succ_e' \sigma_9)$.

La partition A_c' et la relation S' (cf. (r.6.2.4)) qui découlent de cette deuxième étape sont représentées figure 6.2.3.



Notons que, pour choisir entre les différentes possibilités offertes, l'application de la règle définie par (r.6.2.2) peut fort bien amener à comparer des nombres ρ_1 et ρ_2 très proches. Lorsque leur différence ne paraît pas significative, on peut songer à faire jouer, de façon lexicographique, un second critère faisant intervenir les autres surclassements ajoutés ou supprimés (nombre de surclassements en cause, robustesse du second dans l'ordre de classement, ...). Une telle procédure lexicographique employée avec deux critères dont le premier est un quasi-critère peut conduire à des intransitivités (cf. 3.2.2 a)). Cela ne crée toutefois aucune gêne puisqu'il s'agit d'opter entre deux possibilités et deux seulement.

Troisième étape : Il vient (cf. figure 6.2.3) :

$$N = \{\sigma_1, \sigma_7, \sigma_9\}.$$

Quatrième étape : A' est formée de a_7 , a_9 et d'un représentant de σ_1 . Le choix de ce représentant semble être de peu d'importance puisque l'indifférence entre les quatre éléments de σ_1 est relativement bien établie avec les valeurs des coefficients d'importance et des seuils pris en compte. On peut cependant attirer l'attention sur les deux points suivants :

– Le surclassement initial a_1 S a_7 est assez robuste. Etant donné $\rho(a_7, a_1) = 0,769$, l'adjonction de a_7 S' a_1 aurait été justifiée¹ si a_1 avait été isolée de σ_1 . Dès lors que a_7 est sélectionnée, il peut paraître judicieux de ne pas sélectionner a_1 comme représentant de σ_1 .

– L'incomparabilité entre a_4 et a_9 qui découle de S s'avère robuste si l'on en juge par $\rho(a_4, a_9)$ et $\rho(a_9, a_4)$; ceci, joint au fait que $\rho(a_2, a_9)$ et $\rho(a_3, a_9)$ sont de l'ordre de 0,6, incite à sélectionner a_4 plutôt que a_2 ou a_3 (a_9 étant sélectionnée).

Pour conclure cet exemple, on peut affirmer que, sur la base de la relation S considérée :

- les actions a_5 , a_6 , a_8 peuvent être éliminées,
- a_1 ou a_7 mérite d'être sélectionnée,
- a_9 mérite d'être sélectionnée,

¹ Tout en ayant $\rho(a_7, a_1)$ significativement supérieur à s, on peut avoir $\text{Non}(a_7 \text{ S } a_1)$ s'il existe un critère j tel que $g_j(a_7) + v_j(g_j(a_7)) - g_j(a_1)$ est légèrement inférieur à $q_j(g_j(a_1))$ (cf. (r.5.2.9)). Une modification minime de la valeur d'une des performances ou du veto amènerait à poser a_7 S a_1 . Il en aurait été ainsi si la relation de la figure 6.2.1 avait été établie conformément à (r.5.2.9). Rappelons que, à l'époque où le cas a été traité, la condition de veto ne faisait pas intervenir le terme $-k/k[F]$ dans $w(s, c)$.

– l'une des actions a_2 , a_3 ou a_4 doit être sélectionnée (quelques éléments jouant en faveur de a_4).

Le lecteur pourra utilement rapprocher ces conclusions avec celles obtenues avec ELECTRE I au 6.2.1 b).

La procédure de sélection d'ELECTRE IS, tout comme celle d'ELECTRE I, fait ressortir ce que pourrait avoir d'illusoire une procédure qui prétendrait, à coup sûr et dans tous les cas, sélectionner la "meilleure" ou, à défaut, un très petit nombre de "meilleures" actions. C'est pourquoi l'aide à la décision, telle qu'elle peut être menée sur la base d'ELECTRE IS (dans le cadre de la problématique du choix), ne paraît pas pouvoir, sans une part d'arbitraire assez grande, être complètement automatisée. La mise en oeuvre de la procédure présentée ici peut néanmoins être grandement facilitée par l'emploi d'un logiciel approprié. Elle constitue un instrument d'analyse de données assez puissant, même s'il paraît un peu lourd à manier.

La procédure de sélection ELECTRE IS ne dispense certes pas d'une analyse de robustesse mais elle permet de la réduire considérablement par rapport à ce qu'elle doit être avec ELECTRE I. En effet, grâce au rôle joué par l'indicateur de robustesse, la relation finale S' n'est pas trop tributaire des éléments d'arbitraire qui ont joué dans la définition de S . Il convient néanmoins de répéter la procédure conformément aux principes introduits à propos d'ELECTRE I (cf. 6.2.1 c)) à partir de relations $S_1, S_2, \dots$ conçues notamment en tenant compte des éléments de fragilité mis en évidence par l'application d'ELECTRE IS à la relation initiale S .

Pour termine, attirons l'attention sur le fait que la procédure de sélection d'ELECTRE IS s'applique sans difficultés à des relations de surclassement définies autrement que par (r.5.2.8) et (r.5.2.9). On peut par exemple prendre appui sur :

– un système de préférences nettes défini à l'aide d'une procédure par compensation probante (cf. 5.3.2 c)), procédure qui se prête bien à la définition d'un indicateur de robustesse ;

– un système de préférences obtenu par enquête auprès d'une population P d'individus auxquels on soumet successivement toutes ou seulement certaines des paires à comparer (sans faire nécessairement référence à une famille F de

critères) ; notons $P(a, b)$ la sous-population consultée à propos de la paire (a, b) ; on pourra alors poser :

b S a si et seulement si la moitié au moins de la population $P(a, b)$ s'est déclarée en accord avec l'affirmation b S a ,
 $p(b, a) =$ proportion de $P(a, b)$ en accord avec l'affirmation b S a .

6.3 PROCÉDURE¹ D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU TRI : ELECTRE TRI

La procédure d'exploitation ci-après concerne la problématique du tri (cf. 6.1.3). Elle fait intervenir un système de préférences net de type (S, R) dont la définition originelle² revêt la forme générale suivante :

$$b \text{ S } a \Leftrightarrow \sigma_s(b, a) \geq \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{r.6.3.1})$$

où $\sigma_s(b, a)$ est l'indice de crédibilité d'ELECTRE III (cf. (r.5.3.12)). Précisons que la procédure d'affectation ELECTRE TRI (cf. a) peut être appliquée, comme nous le verrons au b) à des relations de surclassement S définies autrement que par (r.6.3.1)).

Dans ce qui suit comme dans toute problématique du tri, la relation de surclassement S ne sert pas à comparer les actions de A entre elles mais à les comparer indépendamment les unes des autres à des actions de référence b^h ($h = 1, \dots, k - 1$). Ces dernières désignent, dans ce qui suit, les actions limites qu'il a été jugé approprié de faire intervenir pour marquer les frontières successives qui séparent les catégories $C^1, \dots, C^k$ constituant la famille complètement ordonnée de catégories auxquelles on veut affecter les actions de A (cf. 6.1.3 b), hypothèse $\beta.1$). Chacune des actions de référence b^h est entièrement définie par son vecteur

¹ Nous ne présentons ci-après qu'une seule méthode. A notre connaissance, il n'en existe pas beaucoup d'autres. Mentionnons Yu (1992), Massaglia et Ostanello (1991), Roy (1981), Roy et Moscarola (1977), Moscarola (1977).

² Il est fait ici référence à un logiciel d'aide à la décision en matière d'octroi de crédit conçu par B. Roy en 1986 pour répondre aux préoccupations d'un grand groupe bancaire français, logiciel toujours exploité de façon régulière.

de performances :

$$\underline{g}^h = (g_1^h, \dots, g_n^h),$$

lequel est appelé profil de référence ou profil limite. Pour appliquer ELECTRE TRI, il faut préalablement avoir défini les catégories, c'est-à-dire élaboré la famille de profils $\underline{g}^h$ en accord avec les hypothèses $\beta.2$ et $\beta.3$ (cf. 6.1.3). Ce point sera abordé au c) sur un plan pratique après avoir approfondi, au b), les propriétés et la signification d'ELECTRE TRI sur un plan théorique. Il est enfin commode et nullement restrictif d'introduire, conformément aux conventions de l'hypothèse $\beta.2$, deux profils supplémentaires $\underline{g}^0$ et $\underline{g}^k$ de telle sorte que les actions irréalistes b^0 et b^k dont ils constituent les performances vérifient, $\forall a \in A$:

$$\left. \begin{array}{l} a S b^0 \text{ et } \text{Non}(b^0 S a), \\ b^k S a \text{ et } \text{Non}(a S b^k). \end{array} \right\} \quad (\text{r.6.3.2})$$

a) Présentation

ELECTRE TRI est le jumelage de deux procédures qui conduisent, la première à une affectation pessimiste (logique conjonctive), la seconde à une affectation optimiste (logique disjonctive). Pour certaines actions, les deux affectations peuvent coïncider mais il se peut aussi qu'une action a soit affectée en catégorie C^h par la procédure pessimiste et en catégorie C^f par la procédure optimiste avec $f \neq h$. On verra au b) ci-après qu'on a alors $f > h$.

1°) ELECTRE TRI pessimiste

– Poser successivement $i = k, k-1, \dots$ pour tester si $a S b^{i-1}$ est vraie.

– Arrêter la procédure à la première valeur de i pour laquelle le test est positif : soit h cette valeur.

– Affecter a en catégorie C^h .

Par construction, C^h est donc la catégorie la plus haute telle que $a \succ b^{h-1}$.

2°) ELECTRE TRI optimiste

– Noter $\succ$ la relation ¹ définie par :

$$b \succ a \Leftrightarrow b \succ a \text{ et Non}(a \succ b). \quad (r.6.3.3)$$

– Poser successivement $i = 0, 1, \dots$ pour tester si $b^i \succ a$ est vraie.

– Arrêter la procédure à la première valeur de i pour laquelle le test est positif : soit f cette valeur.

– Affecter a en catégorie C^f .

Par construction, C^f est donc la catégorie la plus basse telle que $b^f \succ a$.

b) Commentaires théoriques

Considérons une famille d'actions de référence $b^0, b^1, \dots, b^k$ conçue conformément aux hypothèses $\beta.1, \beta.2$ et $\beta.3$ du 6.1.3 b). On a donc en particulier :

$$b^k \Delta_F b^{k-1}, b^{k-1} \Delta_F b^{k-2}, \dots, b^1 \Delta_F b^0.$$

Soit S une relation de surclassement permettant de comparer des actions à ces actions de référence. On a vu qu'il n'était pas restrictif de supposer que, pour toute action a :

$$a \succ b^0 \text{ et } b^k \succ a \text{ (cf. (r.6.3.2)).}$$

Dans ces conditions, commençons par examiner quel peut être le résultat de la comparaison d'une action a aux $k+1$ actions de

¹ Rappelons que, en toute rigueur, cette relation ne peut être interprétée sans précautions comme une relation de préférence stricte (voir notamment à ce sujet le passage en petits caractères au début du 5.1.1).

référence. La comparaison de a à l'action de référence b^x peut prendre une et une seule des quatre formes suivantes :

$b^x S a$ et $\text{Non}(a S b^x)$, c'est-à-dire $b^x \succ a$,
 $a S b^x$ et $\text{Non}(b^x S a)$, c'est-à-dire $a \succ b^x$,
 $a S b^x$ et $b^x S a$, c'est-à-dire $a I b^x$,
 $\text{Non}(a S b^x)$ et $\text{Non}(b^x S a)$, c'est-à-dire $a R b^x$.

Le résultat qui suit montre que la comparaison de a à $b^0, b^1, \dots, b^k$ peut prendre trois formes distinctes. Ce résultat servira de base pour analyser comment les procédures optimiste et pessimiste se comportent vis-à-vis des exigences introduites au 6.1.3.

RÉSULTAT 6.3.1 : Considérons une famille d'actions de référence $b^0, b^1, \dots, b^k$ telles que :

$$b^k \Delta_F b^{k-1}, b^{k-1} \Delta_F b^{k-2}, \dots, b^1 \Delta_F b^0$$

et une relation de surclassement S telle que, pour toute action a à affecter :

$$b^k \succ a \text{ et } a \succ b^0.$$

Le résultat de la comparaison de a à $b^0, b^1, \dots, b^k$ prend alors une et une seule des trois formes suivantes :

$$a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, b^{x+1} \succ a, b^{x+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$$

avec $x \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, (r.6.3.4)

$$a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, a R b^{x+1}, a R b^{x+2}, \dots, a R b^y, b^{y+1} \succ a, b^{y+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$$

$$\text{avec } x \in \{0, 1, \dots, k-2\} \text{ et } y \in \{x+1, x+2, \dots, k-1\}, \quad (\text{r.6.3.5})$$

$$a \succ b^0, a \succ b^1, \dots, a \succ b^x, a I b^{x+1}, a I b^{x+2}, \dots, a I b^y, b^{y+1} \succ a, b^{y+2} \succ a, \dots, b^k \succ a$$

$$\text{avec } x \in \{0, 1, \dots, k-2\} \text{ et } y \in \{x+1, x+2, \dots, k-1\}. \quad (\text{r.6.3.6})$$

Démonstration

On a , par hypothèse :

$$b^k \succ a \text{ et } a \succ b^0.$$

De plus, S étant une relation de surclassement, le résultat 2.2.2 implique que :

$b^x \succ a \Rightarrow b^{x+1} \succ a$ pour $x = 1, 2, \dots, k-1$ et
 $a \succ b^y \Rightarrow a \succ b^{y-1}$ pour $y = 1, 2, \dots, k-1$.

Soit h la valeur minimum de x telle que $b^x \succ a$ et f la valeur maximum de y telle que $a \succ b^y$. En vertu de ce qui précède, les valeurs de h et f sont bien définies. De plus, on a nécessairement $h > f$, la relation $\succ$ étant asymétrique.

Si $h = f+1$, on est alors dans la situation (r.6.3.4).

Si $h > f+1$, on a soit $a S b^{f+1}$, soit $\text{Non}(a S b^{f+1})$.

Supposons $a S b^{f+1}$. On ne peut avoir $a \succ b^{f+1}$ car cela contredirait la définition de f . On a donc $a I b^{f+1}$.

On sait alors que :

$b^x S a$ pour $x = f+1, f+2, \dots, k$.

La définition de h implique donc que :

$a I b^{f+1}, a I b^{f+2}, \dots, a I b^{h-1}$

et l'on est dans le cas (r.6.3.6).

Supposons à présent que $\text{Non}(a S b^{f+1})$. Si $b^{f+1} S a$, on aurait alors $b^{f+1} \succ a$, ce qui contredirait la définition de h . On a donc nécessairement $a R b^{f+1}$.

On sait par conséquent que :

$\text{Non}(a S b^x)$ pour $x = f+2, f+3, \dots, k$.

La définition de h implique alors nécessairement que :

$a R b^{f+1}, a R b^{f+2}, \dots, a R b^{h-1}$.

On est donc dans le cas (r.6.3.5), ce qui achève la démonstration.

Examinons, dans chacun des trois cas du résultat 6.3.1, ce à quoi conduit l'application des procédures optimiste et pessimiste.

i) Cas (r.6.3.4). L'action a est affectée par les deux procédures à l'unique catégorie C^x telle que $a \succ b^x$ et $b^{x+1} \succ a$. Cette affectation est conforme à (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

ii) *Cas (r.6.3.5).* L'action a est affectée par la procédure pessimiste à l'unique catégorie C^x telle que $a > b^x$ et $a R b^{x+1}$. L'action a est affectée par la procédure optimiste à l'unique catégorie C^y telle que $b^{y+1} > a$ et $a R b^y$. On a nécessairement $y > x$. Ces affectations sont conformes à (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

iii) *Cas (r.6.3.6).* L'action a est affectée par les deux procédures à l'unique catégorie C^x telle que $a I b^x$ et $b^{x+1} > a$. Cette affectation est conforme à (r.6.1.1). Elle n'est conforme à (r.6.1.3) que dans le cas particulier où a n'est indifférente qu'à une seule action de référence.

Quelle que soit la façon dont une action a se compare aux actions de référence, la procédure pessimiste (resp. optimiste) conduit à affecter a à une catégorie unique C^f (resp. C^h). On a toujours $h \geq f$, ce qui justifie les appellations "pessimiste" et "optimiste". Seul le cas (r.6.3.5) conduit à une divergence d'affectation entre les procédures optimiste et pessimiste. L'affectation d'une action a réalisée par les deux procédures est toujours conforme à (r.6.1.1). Elle l'est également à (r.6.1.3), sauf dans le cas où a est indifférente à plus d'une action de référence. Cette non conformité avec (r.6.1.3) provient du fait que l'intervalle qui sépare deux profils limites est trop petit eu égard à la relation de surclassement utilisée. Cette relation constitue alors un instrument de différenciation trop grossier pour trier les actions avec la finesse que requiert la définition adoptée pour les catégories. Ceci justifiera l'introduction d'une **condition de compatibilité des données** reliant la finesse du tri recherché, telle qu'elle ressort des profils limites, à certaines des caractéristiques de l'instrument de différenciation que constitue la relation de surclassement S .

Sur la base des remarques qui précèdent et du résultat 6.3.1, il est aisé d'examiner comment les deux procédures optimiste et pessimiste se comportent vis-à-vis des exigences introduites au 6.1.3.

RÉSULTAT 6.3.2 : Considérons une famille d'actions de référence conçues conformément aux hypothèses $\beta.1$, $\beta.2$ et $\beta.3$ du 6.1.3 b) et une relation de surclassement S vérifiant (r.6.3.2).

Alors :

i) Les procédures ELECTRE TRI optimiste et pessimiste vérifient les exigences d'unicité, d'indépendance, de monotonie, d'homogénéité et de stabilité.

ii) Les procédures ELECTRE TRI optimiste et pessimiste vérifient l'exigence de conformité au profil si et seulement si la condition de compatibilité des données suivante est satisfaite pour toute action a :

$$a I b^x \Rightarrow \text{Non}(a I b^{x+1}) \text{ pour } x = 1, 2, \dots, k-2. \quad (r.6.3.7)$$

iii) Si une action a est affectée en catégorie C^h par la procédure pessimiste et en catégorie C^f par la procédure optimiste, alors $h \leq f$. De plus,

$$h < f \Leftrightarrow a R b^h, a R b^{h+1}, \dots, a R b^{f-1}. \quad (r.6.3.8)$$

Démonstration

i) Considérons la procédure pessimiste, la démonstration se transposant de façon immédiate au cas de la procédure optimiste.

Unicité. Par définition, toute action est affectée à au plus une catégorie. Considérons une action quelconque a . D'après (r.6.3.2), on a $a > b^0$. Une telle action peut donc bien être affectée à une catégorie unique.

Indépendance. Par définition, l'affectation d'une action a ne dépend que de la manière dont elle se compare aux actions $b^0, b^1, \dots, b^k$.

Monotonie. Supposons a affectée en catégorie C^x . On a donc $\text{Non}(a S b^x), \text{Non}(a S b^{x-1}), \text{Non}(a S b^{x-2}), \dots, \text{Non}(a S b^0)$ et $a S b^{x-1}$. La relation S étant une relation de surclassement,

$$b \Delta_F a \Rightarrow [a S b^{x-1} \Rightarrow b S b^{x-1}]$$

et l'action b est alors nécessairement affectée à une catégorie C^y telle que $y \geq x$.

Stabilité. Supposons a affectée en catégorie C^x et donc : $\text{Non}(a S b^x), \text{Non}(a S b^{x-1}), \text{Non}(a S b^{x-2}), \dots, \text{Non}(a S b^0)$, $a S b^{x-1}$, $a S b^{x-2}$, ..., $a S b^0$. Supprimons l'action de référence b^1 . Si $x > i+1$ ou si $x < i$, il est clair que l'affectation de a est inchangée. Si $x = i+1$ ou si $x = i$, on a :

$$\text{Non}(a S b^{k-1}), \text{Non}(a S b^{k-2}), \dots, \text{Non}(a S b^{i+1}), a S b^{i-1}, \dots, a S b^0.$$

L'action a est alors bien affectée à la catégorie délimitée en haut par b^{i+1} et en bas par b^{i-1} .

Homogénéité. Considérons une action a telle que :

$$\begin{aligned} a &> b^{h-1}, b^h R a, \\ b^f &> a, a R b^{f-1}. \end{aligned}$$

On est alors dans le cas (r.6.3.5) du résultat 6.3.1. L'action a , de même que toutes celles se comparant identiquement à b^{h-1} , b^h , b^{f-1} et b^f , est alors affectée en catégorie C^h par la procédure pessimiste.

ii) La nécessité de (r.6.3.7) est évidente compte-tenu de (r.6.1.3). Sa suffisance résulte, de façon immédiate, du résultat 6.3.1 et des commentaires qui l'accompagnent.

iii) Ce point résulte de façon immédiate du résultat 6.3.1 et des commentaires qui l'accompagnent.

Remarque importante : ELECTRE TRI demeure une procédure digne d'intérêt même si la condition de compatibilité des données (r.6.3.7) n'est pas satisfaite. Dans ce cas, il peut exister des actions indifférentes à plus d'une action de référence, c'est-à-dire telles que (cf. (r.6.3.6)) :

$$\begin{aligned} a &> b^0, a > b^1, \dots, a > b^{x+1}, a I b^x, a I b^{x+1}, \dots, a I b^y, b^{y+1} > a, \\ \dots, b^k &> a. \end{aligned}$$

D'après (r.6.1.3), l'exigence de conformité au profil voudrait que a soit affectée à C^x , C^{x+1} , ..., C^y . Afin de respecter l'exigence d'unicité, ELECTRE TRI opère un choix entre ces diverses possibilités. La procédure optimiste, comme la procédure pessimiste, affecte a en catégorie C^y , catégorie la plus haute telle que a soit indifférente à l'action de référence qui la ferme en bas. Un tel choix est compatible avec l'esprit de l'exigence de conformité au profil.

Rappelons que les résultats qui précèdent sont valables quelle que soit la définition du surclassement S choisie. Examinons, pour achever ce paragraphe, ce qu'apporte le choix de (r.6.3.1). Commençons par examiner le cas où chacun des n critères est un vrai-critère.

Posons tout d'abord $\lambda = 1$: $S = \Delta_F$ et, quelles que soient $b^0, \dots, b^k$, la condition de compatibilité (r.6.3.7) est satisfaite ; dans ces conditions :

– ELECTRE TRI pessimiste n'est autre que la procédure conjonctive du 6.1.3 b) ;

– ELECTRE TRI optimiste n'est autre que la procédure disjonctive du 6.1.3 b) appliquée en substituant à Δ_F la relation de dominance stricte $\tilde{\Delta}_F$ définie par : $b \tilde{\Delta}_F a \Leftrightarrow [b \Delta_F a \text{ et Non } (a \Delta_F b)]$ (la seule raison d'être de cette substitution est de retrouver des catégories fermées en bas).

Faisons maintenant diminuer progressivement λ . La condition de compatibilité n'est alors automatiquement satisfaite que si $g_j > g_j^{h-1}$, $\forall j \in F$ et $\forall h \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pour qu'une action a soit affectée par ELECTRE TRI pessimiste à C^h ou à une catégorie supérieure, il n'est plus nécessaire d'avoir $g_j(a) \geq g_j^{h-1}$, $\forall j \in F$ (comme c'est le cas avec la procédure conjonctive). Il suffit que la sous-famille $C(a \text{ S } b^{h-1})$ des critères qui vérifient l'inégalité précédente ait une importance au moins égale à λ et que, pour chacun de ceux qui mettent en défaut les différences $g_j^{h-1} - g_j(a)$, reste suffisamment proche de 0 pour que l'indice de discordance $d_j(a, b^{h-1})$ ne dépasse pas λ . ELECTRE TRI pessimiste conserve donc un caractère conjonctif mais, au lieu d'exiger, pour une affectation en catégorie C^h ou supérieure, de voir tous les critères atteindre ou dépasser la performance fixée par le profil g^{h-1} , on se contente ici d'avoir une majorité de critères qui atteignent la performance fixée par le profil, les autres ne devant pas trop lui être inférieurs. La majorité requise est d'autant plus faible que λ est plus petit ; c'est pourquoi l'affectation de a ne peut aller que vers des catégories supérieures lorsque λ diminue.

De façon similaire, pour que, dans les mêmes conditions, une action a soit affectée par ELECTRE TRI optimiste à C^h ou à une catégorie supérieure, il n'est plus suffisant d'avoir, pour une valeur de j au moins, $g_j(a) \geq g_j^{h-1}$ (comme c'est le cas dans la procédure disjonctive avec Δ_F). Il est ici nécessaire que la sous-famille $C(b^{h-1} > a)$ des critères qui violent l'inégalité précédente ait une importance inférieure à λ ou, à défaut, que les critères qui

vérifient l'inégalité fassent apparaître des différences ($g_j(a) - g_j^{h-1}$) suffisamment grandes pour que le mécanisme de veto s'oppose à $b^{h-1} \succ a$. ELECTRE TRI optimiste conserve donc un caractère disjonctif mais, au lieu de se contenter, pour une affectation en catégorie C^h ou supérieure, de voir un seul critère atteindre ou dépasser la performance fixée par le profil g^{h-1} , on exige ici de surcroît qu'une règle de majorité combinée à un mécanisme de veto justifie le refus de $b^{h-1} \succ a$. Lorsque λ diminue, l'affectation de a ne peut aller que vers des catégories inférieures. Ainsi, réduire λ conduit à réduire l'écart entre les affectations d'ELECTRE TRI pessimiste et d'ELECTRE TRI optimiste lorsque celles-ci ne coïncident pas.

Prendre en compte des pseudo-critères au lieu de vrai-critères conduit à faire intervenir des seuils d'indifférence et/ou de préférence non nuls. Il suffit de se reporter aux formules (r.5.3.1), (r.5.3.2), (r.5.3.11), (r.5.2.8) et (r.5.2.7) pour constater que le traitement de ces seuils reste en profondeur conforme avec ce qui vient d'être dit concernant les principes d'affectation par ELECTRE TRI. Tout comme la substitution du surclassement à la dominance, l'introduction de seuils permet de nuancer (possibilité de "rachat légèrement en-dessous de la barre") la logique conjonctive qui sous-tend ELECTRE TRI pessimiste et la logique disjonctive qui sous-tend ELECTRE TRI optimiste.

c) Commentaires pratiques

Considérons une situation concrète d'aide à la décision où l'on a adopté la problématique du tri. Que l'on envisage ou non d'utiliser ELECTRE TRI, il importe, en tout premier lieu, de cerner les catégories pertinentes. Fondamentalement, chacune d'elles se définit par référence à ce qui doit advenir aux actions qui lui seront affectées. Dans un problème d'octroi de crédit, on pourra par exemple prendre appui sur les quatre catégories suivantes :

E : rejet,

D : décision différée car nécessité d'une étude plus approfondie,

C : acceptation sous condition d'obtention de quelques modifications,

B : acceptation sans condition ¹.

L'utilisation d'ELECTRE TRI n'est envisageable que si les catégories prises en considération sont naturellement ordonnées (cf. 6.1.3). Supposons qu'il en soit ainsi. Il faut alors cerner chaque catégorie C^h par son profil haut $\underline{g}^h$ et son profil bas $\underline{g}^{h-1}$ (profil haut de C^{h-1}), étant entendu que si une action a vérifie $\underline{g}(a) = \underline{g}^{h-1}$, alors a doit être affectée à C^h . De façon plus générale, il doit en être de même pour toute action a vérifiant $a \in S^{b^{h-1}}$ et $b^h > a$ (S et $>$ étant ici respectivement définies par (r.6.3.1) et (r.6.3.3)).

Les valeurs $\underline{g}_j^{h-1}$ sont des performances limites qui marquent la frontière entre C^{h-1} et C^h . Ces valeurs doivent être fixées de façon à rendre compatible, avec l'affectation à C^h , de toute action a vérifiant $a \in S^{b^{h-1}}$ et $b^{h-1} S a$ et à justifier l'affectation à une catégorie inférieure de toute action a vérifiant $b^{h-1} > a$. La place exacte d'une telle frontière ne peut que, dans des cas très exceptionnels (même pour $n = 1$), être déduite rigoureusement de l'idée que l'on se fait du contenu des catégories C^h et C^{h-1} . Il importe avant tout que les valeurs attribuées aux $\underline{g}_j^{h-1}$ soient jugées "convenables" dans le cadre de la procédure retenue. Pour cela, il peut être utile de se souvenir que ELECTRE TRI pessimiste et ELECTRE TRI optimiste ne conduisent à des affectations différentes que dans le cas d'actions incomparables à certaines des actions de référence. Lorsqu'on souhaite que l'affectation de telles actions se fasse dans une logique de type conjonctif, on doit adopter ELECTRE TRI pessimiste et, si l'on souhaite qu'elle se fasse dans une logique de type disjonctif, on doit adopter ELECTRE TRI optimiste. Ce choix peut influencer les valeurs qu'il convient d'attribuer aux $\underline{g}_j^{h-1}$.

Ce qui précède conduit à formuler les règles pratiques suivantes.

¹ Dans MMCAD, les exemples 7, 8, 9 et 10 illustrent, dans d'autres contextes et de façon plus détaillée, ce que peuvent être de telles catégories.

Pour un critère j donné, la performance limite g_j^{h-1} correspond :

– En logique conjonctive à la performance minimale que $g_j(a)$ doit atteindre (au seuil près) ou dépasser pour justifier l'affectation de a en catégorie C^h ou supérieure sachant que cette affectation n'aura lieu que s'il existe suffisamment d'autres critères (règle de majorité paramétrée par λ) vérifiant (au seuil près) la condition similaire $g_i(a) \geq g_j^{h-1}$ et que les éventuels critères ne vérifiant pas cette condition ne la violent pas assez pour que le mécanisme du veto s'oppose à $a \in S^{h-1}$.

– En logique disjonctive, à la performance minimale que $g_j(a)$ doit atteindre (au seuil près) ou dépasser pour justifier l'affectation de a en catégorie C^h ou supérieure sachant que cette affectation n'aura lieu que s'il n'existe pas trop de critères (règle de majorité paramétrée par λ) vérifiant (au seuil près) la condition opposée $g_i(a) < g_j^{h-1}$ ou, lorsqu'il en existe trop, que si la différence $g_j(a) - g_j^{h-1}$ est suffisamment grande pour que (éventuellement conjugué à des différences similaires positives dues à d'autres critères) le mécanisme du veto s'oppose à $b^{h-1} \succ a$.

Plus on souhaite marquer le caractère conjonctif ou disjonctif de la procédure et plus :

- la valeur de λ doit être choisie proche de 1 (renforcement de la majorité requise) ;
- la valeur de chaque veto v_j doit être choisie proche du seuil de préférence p_j (renforcement du mécanisme de veto).

Les cas où l'affectation par ELECTRE TRI pessimiste diffère de celle par ELECTRE TRI optimiste sont d'autant plus rares que λ est plus faible et que chaque v_j est plus élevé. Ils disparaissent complètement pour $\lambda = 1/2$ joint à des valeurs des v_j suffisamment élevées pour que toute possibilité de veto disparaisse ($v_j \geq 2 \cdot (g_j^k - g_j^0)$ par exemple).

Il n'est pas essentiel de chercher à savoir si la condition de compatibilité des données (r.6.3.7) est ou non satisfaite ¹. En effet, lorsqu'elle ne l'est pas (cf. fin du b) ci-dessus), l'affectation demeure cohérente avec l'esprit de l'exigence de conformité énoncée à la fin du 6.1.3. Il est en outre aisé de compléter la procédure pour diagnostiquer, au fur et à mesure, celles des actions a qui mettent en défaut (r.6.3.7) et qui, de ce fait, pourraient être affectées à une catégorie inférieure. Rappelons qu'il ne peut s'agir que d'actions affectées dans la même catégorie C^h par ELECTRE TRI optimiste et ELECTRE TRI pessimiste et qui vérifient par conséquent :

$$a S b^{h-1}, b^{h-1} S a, b^h \succ a.$$

Le diagnostic de telles actions consiste tout simplement à tester si l'on a :

$$a S b^{h-i} \text{ et } b^{h-i} S a \text{ pour } i = 2, 3, \dots$$

Lorsqu'il en est ainsi, a est indifférente à l'action de référence qui ferme en bas la catégorie C^{h-i} , ce qui, d'après (r.6.2.3), justifierait son affectation à C^{h-i+1} tout aussi bien qu'à C^h .

6.4 PROCÉDURES D'EXPLOITATION EN PROBLÉMATIQUE DU RANGEMENT : PROMETHEE I ET II, ELECTRE II, III ET IV

Parmi les procédures d'exploitation, les quatre dont il est question ci-après sont propres aux méthodes qui ont été le plus utilisées en pratique. Elles présentent un certain nombre de traits communs et des différences que nous soulignerons au fur et à mesure dans les commentaires qui suivent leur présentation. Ce sont ces différences qui doivent normalement amener à choisir l'une plutôt que l'autre dans un contexte concret donné. On a vu, au 6.1.4, que la définition d'une "bonne" procédure de classement se heurte à de sérieuses difficultés. Aucune des quatre présentées

¹ Pour plus de précisions sur ce point, voir Yu (1992).

ci-après n'est donc pleinement satisfaisante. Nous reviendrons sur ce point au 6.5.

6.4.1 PROMETHEE I et II (cf. Brans et al. (1984))

Les auteurs de PROMETHEE ont proposé quatre variantes pour la procédure d'exploitation de la méthode PROMETHEE. Ici, nous ne présenterons que celles de PROMETHEE I et de PROMETHEE II¹. L'une comme l'autre concernent la problématique du rangement (cf. 6.1.4). Elles s'appliquent à un système de préférences floues de type $(P, \sim)$ caractérisé par un indice de crédibilité $\sigma_p(b, a)$ reflétant la crédibilité de l'affirmation $b P a$ (cf. (r. 5.3.8) et (r.5.3.9)).

a) Présentation

Dans chacune des variantes de PROMETHEE, la procédure de classement repose sur ce que les auteurs appellent les flux sortants et les flux entrants d'une action quelconque $b \in A$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Flux sortants : } \phi^+(b) = \sum_{a \in A} \sigma_p(b, a). \\ \text{Flux entrants : } \phi^-(b) = \sum_{a \in A} \sigma_p(a, b). \end{array} \right\} \quad (\text{r.6.4.1})$$

PROMETHEE I et PROMETHEE II diffèrent dans la manière de faire intervenir ces flux pour construire le préordre Z qui est l'aboutissement de toute procédure de classement. Alors que Z peut être un préordre partiel dans PROMETHEE I, la procédure PROMETHEE II aboutit obligatoirement à un préordre complet (que nous noterons Z' pour le différencier du précédent).

1°) PROMETHEE I : Z est ici obtenu en trois étapes comme intersection de deux préordres complets Z_1 et Z_2 .

¹ PROMETHEE III aboutit non pas à un préordre partiel mais à un ordre d'intervalle ; PROMETHEE IV généralise PROMETHEE II au cas A infini.

– Z_1 s'obtient en rangeant les actions de A par valeur décroissante de leurs flux sortants :

$$b Z_1 a \Leftrightarrow \phi^+(b) \geq \phi^+(a). \quad (\text{r.6.4.2})$$

– Z_2 s'obtient en rangeant les actions de A par valeur croissante de leurs flux entrants :

$$b Z_2 a \Leftrightarrow \phi^-(b) \leq \phi^-(a). \quad (\text{r.6.4.3})$$

– $Z = Z_1 \cap Z_2$ est alors défini par :

$$b Z a \Leftrightarrow [b Z_1 a \text{ et } b Z_2 a]. \quad (\text{r.6.4.4})$$

2°) *PROMETHEE II* : Le préordre complet Z' est ici obtenu en rangeant les actions de A par valeur décroissante de leurs flux nets :

$$\text{Flux nets : } \phi(b) = \phi^+(b) - \phi^-(b). \quad (\text{r.6.4.5})$$

$$b Z' a \Leftrightarrow \phi(b) \geq \phi(a). \quad (\text{r.6.4.6})$$

b) Commentaires théoriques

Commençons par expliquer pourquoi les préordres Z et Z' , obtenus par *PROMETHEE*, peuvent être regardés comme l'instrument d'aide à la décision recherché compte tenu de la problématique adoptée (cf. 6.1.4). Analysons tout d'abord le cas, certes exceptionnel, dans lequel $\sigma_p(b, a)$ ne prend que les valeurs 0 et 1. D'après (r.5.3.9) et (r.5.3.8) (et conformément à l'exigence 2 que doit vérifier tout indice de crédibilité σ_p), $\sigma_p(b, a) = 1$ signifie que l'affirmation $b P a$ est solidement établie. Dans ces conditions :

- $\phi^+(b)$ représente le nombre d'actions auxquelles b est strictement préférée ;
- $\phi^-(b)$ représente le nombre d'actions qui sont strictement préférées à b .

Dans Z_1 (cf. (r.6.4.2)), b est placée avant a si et seulement si le nombre d'actions auxquelles b est préférée est supérieur au

nombre d'actions auxquelles a est préférée ; b et a sont rangées dans la même classe si et seulement ces deux nombres sont égaux. C'est une approche duale qui est adoptée avec Z_2 (cf. (r.6.4.3)) : b est d'autant mieux placée dans ce préordre que le nombre des actions qui lui sont préférées est plus faible. Lorsqu'on cherche, dans une approche opérationnelle, à ranger les actions de A , les préordres Z_1 et Z_2 peuvent être regardés, aussi bien l'un que l'autre, comme une réponse convenable. Pourtant, ils ne sont pas nécessairement identiques. Ils le sont en particulier si la relation P définie par $b P a \Leftrightarrow \sigma_P(b, a) = 1$ est elle-même un préordre complet (on a alors $Z_1 = Z_2 = P$). Lorsque Z_1 et Z_2 font apparaître des différences, il apparaît légitime de regarder a et b comme incomparables si (et seulement si) b est placé strictement avant a dans l'un de ces deux préordres et a strictement avant b dans l'autre. De même, il semble raisonnable de ne regarder a et b comme ex æquo que si a et b le sont dans Z_1 et dans Z_2 . Dans tous les autres cas, Z_1 et/ou Z_2 déterminent l'ordre sans ambiguïté. Ces principes définissent un préordre partiel qui n'est autre que $Z = Z_1 \cap Z_2$ (cf. (r.6.4.4)). Il se peut que le praticien réclame un préordre complet. Dans ce cas, rien ne semble pouvoir justifier le choix de Z_1 plutôt que celui de Z_2 . Les auteurs de PROMETHEE II, afin de prendre en compte conjointement $\phi^+(b)$ et $\phi^-(b)$ de telle sorte que le rangement de b soit influencé favorablement par le nombre d'actions auxquelles b est strictement préférée et défavorablement par le nombre d'actions qui lui sont strictement préférées, ont proposé de prendre appui sur le flux net (cf. (r.6.4.5)) pour définir Z' (cf. (r.6.4.6)). Le lecteur vérifiera sans peine (et cela même en-dehors du cas particulier considéré jusqu'ici) que $b Z_1 a$ et $b Z_2 a \Rightarrow b Z' a$, d'où $Z \subset Z'$.

Venons-en maintenant au cas général où $\sigma_P(b, a)$ peut prendre des valeurs autres que 0 et 1. On ne peut plus alors interpréter $\phi^+(b)$ et $\phi^-(b)$ en termes de dénombrement d'actions. Quelle signification donner aux sommations (r.6.4.1) ? Comment justifier le fait qu'une action b doive être placée au moins aussi bien qu'une action a lorsque la comparaison de sommes, difficilement interprétable, conduit au système $\phi^+(b) \geq \phi^+(a)$, $\phi^-(b) \leq \phi^-(a)$? On peut certes faire valoir que, si chacun des termes de la somme est proche soit de 0, soit de 1, on ne s'écarte pas trop des conditions du cas particulier examiné ci-dessus et la procédure reste interpré-

table. Malheureusement, les valeurs prises par $\sigma_p(b, a)$ n'ont aucune raison d'être concentrées aux extrémités de l'intervalle $[0 ; 1]$ (bien au contraire, cf. 5.3.2.1 b)). Les deux questions qui viennent d'être posées sont donc pertinentes et les premiers éléments de réponse qui suivent sont essentiels si l'on veut comprendre ce qui, dans la définition des procédures d'exploitation de PROMETHEE I et PROMETHEE II, gêne le théoricien.

Dans PROMETHEE, l'indice de crédibilité $\sigma_p(b, a)$ a une signification ordinale que l'on peut considérer comme conforme aux trois exigences¹ introduites au début du 5.3.2. Pour que, en toute rigueur, les sommes ϕ^+ et ϕ^- puissent jouer le rôle qui leur est dévolu dans la définition des préordres Z_1, Z_2, Z et Z' , il faudrait que ces préordres demeurent invariants face à toute transformation de $\sigma_p(b, a)$ qui préserverait la conformité aux trois exigences du 5.3.2. Comme tel n'est pas le cas, il faudrait pouvoir attribuer à σ_p une signification quantitative conforme à des exigences beaucoup plus fortes que celles dont il vient d'être question.

Dans des termes moins abstraits, on peut faire valoir que ϕ^+ (tout comme ϕ^- ou ϕ) peut prendre la même valeur à partir de deux séries de termes très différents : la première peut combiner des valeurs voisines de 0 avec d'autres voisines de 1 alors que la seconde comporte essentiellement des valeurs voisines de 1/2 (reflétant l'incomparabilité). L'égalité ou l'inégalité des valeurs obtenues dans ces conditions est-elle porteuse de sens pour fonder un classement ? Pas nécessairement, comme le montrent les deux exemples ci-après.

Considérons en premier lieu les données du tableau 6.4.1 relatives à cinq actions comparées selon sept quasi-critères supposés d'égale importance. Sur les quatre premiers critères, il y a indifférence entre deux actions quelconques à une exception près : pour chacun d'eux, a est strictement préférée à e . Sur les trois autres critères, a est indifférente à e ainsi qu'à b, c et d (entre lesquelles il y a encore indifférence) mais e est strictement préférée à b, c et d . Les critères étant d'égale importance, on peut considérer que a doit être placée en tête du classement suivie de e (qui, sur aucun critère, n'est préférée à a), b, c et d venant ex æquo à la fin. La figure 6.4.1 visualise (à l'aide d'un graphe) les valeurs de l'indice de crédibilité lorsqu'il est non nul ; elle schématise également les résultats de PROMETHEE I et PROMETHEE II qui s'en déduisent. On remarquera que Z_1 , comme Z' , place e en tête et non a . Quant

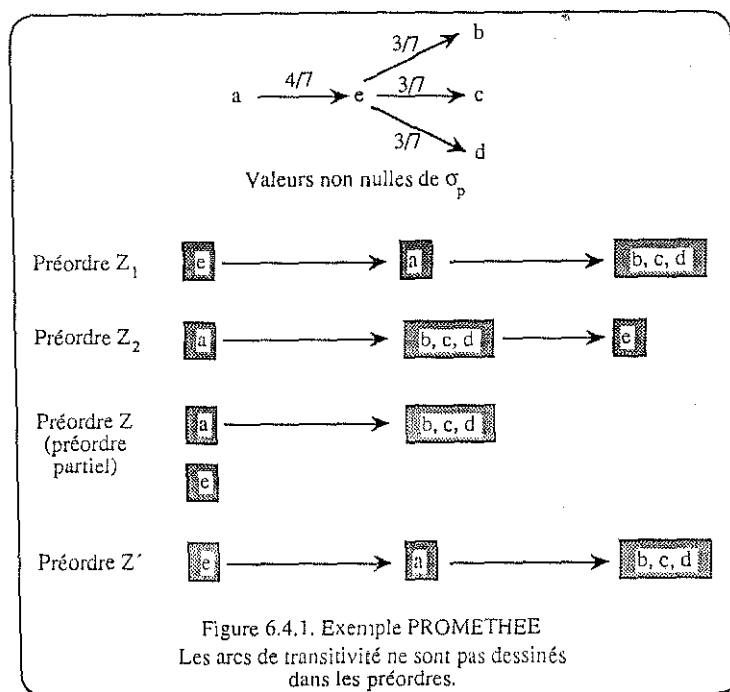
¹ Il est toutefois impossible de prouver, en toute rigueur, que l'exigence 3 est satisfaite : les éléments de preuve en sa faveur ne peuvent se passer de considérations empiriques discutables.

à Z, il place certes a avant b, c, et d mais pas avant e qui lui est incomparable. Dans tous les cas, l'avantage donné à e repose sur la somme $\phi^*(e) = 3/7 + 3/7 + 3/7 = 9/7$.

Tableau 6.4.1

Critères	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
Actions							
a	14	14	14	14	12	12	12
b	12	12	12	12	10	10	10
c	12	12	12	12	10	10	10
d	12	12	12	12	10	10	10
e	10	10	10	10	14	14	14

g_j est un quasi-critère avec $q_j = 2$ et $0 \leq g_j(a) \leq 20$ pour $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$.



Considérons en second lieu le cas de trois actions a , b , c comparées selon trois critères supposés encore d'égale importance. Les résultats de la figure 6.4.2 découlent de tout tableau de performances tels que :

- sur les deux premiers critères, b est indifférente à a et à c alors que a est strictement préférée à c ;
- sur le troisième critère, b est strictement préférée à a et à c alors que a et c sont indifférentes.

Sur ces bases, il est clair que (cf. tableau 6.4.2) b se compare mal à a puisque, selon les deux premiers critères, b devrait être entre a et c alors que, selon le troisième, b devrait être avant a et c (a étant clairement placée avant c). Le préordre final devrait donc être :

" a et b incomparables, toutes les deux placées avant c ".

Ce préordre ne correspond ni à Z , ni à Z' qui, pourtant, sont identiques (cf. figure 6.4.2).

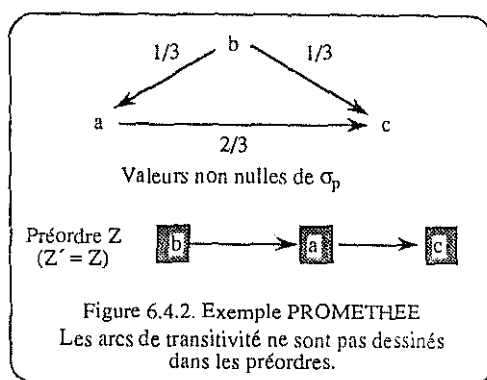
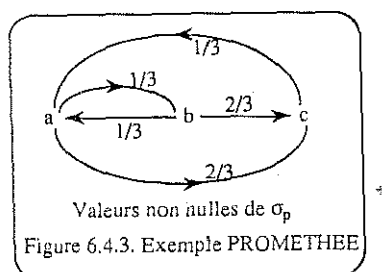


Tableau 6.4.2

Critères			
Actions	g_1	g_2	g_3
a	15	16	10
b	13	14	13
c	11	12	10

g_j est un quasi-critère avec $q_j = 2$ et $0 \leq g_j \leq 20$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$.

Faisons encore observer¹ que, face à certaines variations de l'indice de crédibilité σ_p consécutives à des modifications du tableau des performances, la manière dont certaines actions d'un groupe se comparent entre elles dans le préordre peut demeurer invariante (la manière dont les actions du groupe se comparent aux autres pouvant, en revanche, être modifiée). C'est ainsi que, si l'on ajoute ou si l'on retranche une même constante ε à la valeur de σ_p pour une séquence d'actions formant un circuit ($a_1, a_2, \dots, a_p, a_1$), alors la position relative des actions $a_1, a_2, \dots, a_p$ ne sera modifiée dans aucun des quatre préordres Z_1, Z_2, Z, Z' . De plus, Z' restera invariant. Il s'ensuit par exemple que le système de valeurs de l'indice de crédibilité montré à la figure 6.4.3 conduit aux préordres Z et Z' de la figure 6.4.2 puisque l'on passe du système de valeurs de σ_p indiqué sur cette figure à celui de la figure 6.4.3 en ajoutant $\varepsilon = 1/3$ aux valeurs de σ_p le long du circuit (a, b, c, a). Soulignons au passage que l'on entrevoit difficilement la nature des transformations qu'il faut faire subir aux performances pour obtenir de telles modifications de σ_p .



Il découle de la remarque précédente que, lorsque l'on aboutit, dans le préordre Z ou Z' , à l'indifférence plutôt qu'à l'incomparabilité (ou vice-versa) de deux actions a et b , cela ne doit rien au fait qu'elles sont indifférentes plutôt qu'incomparables (ou vice-versa) dans le système de préférences floues. Rappelons en effet (cf. fin du 5.3.2.1 b)) que l'indifférence est caractérisée par $\sigma_p(b, a) = \sigma_p(a, b) = 0$ alors que l'incomparabilité est caractérisée par $\sigma_p(b, a) = \sigma_p(a, b) = 1/2$. L'addition d'une constante $\varepsilon = 1/2$ le long du circuit (b, a, b) correspond au passage de l'indifférence à l'incomparabilité dans le système de préférences floues et cela ne modifie en rien la manière dont a et b se comparent dans Z_1, Z_2, Z et Z' .

c) Commentaires pratiques

Soulignons en premier lieu la simplicité des procédures d'exploitation de PROMETHEE I et de PROMETHEE II. Le

¹ Voir Bouyssou (1992) et Bouyssou et Perny (1992).

praticien qui utilise l'une quelconque de ces méthodes peut aisément suivre la séquence de calcul qui aboutit au préordre final. Signalons en second lieu que les auteurs ont développé des logiciels particulièrement conviviaux : PROMCALC ¹ rend particulièrement aisée une analyse de sensibilité aux valeurs des coefficients k_j et GAIA ² fournit une représentation géométrique des actions et des critères sur la base d'une analyse en composantes principales.

Précisons que l'analyse de sensibilité dont il vient d'être question ne doit être ni confondue avec, ni substituée à, ce que nous avons appelé une analyse de robustesse (cf. 5.4.4). L'homme d'étude doit en effet, dans cette problématique comme dans les autres, chercher à savoir dans quelle mesure les conclusions (ici le préordre ou la tête de ce préordre) demeurent robustes face à des variations concomitantes et raisonnables des paramètres dont la valeur est mal déterminée. Il s'agit ici non seulement des coefficients k_j mais aussi des seuils q_j et p_j , voire de certaines performances.

Cette analyse de robustesse est d'autant plus nécessaire que tout écart, même faible, entre deux valeurs de ϕ^+ , ϕ^- ou ϕ est regardé comme significatif (aucun seuil n'étant ici pris en considération, cf. 6.4.1 a)). C'est dire que Z , comme Z' , peuvent être facilement perturbés par de petites variations de σ_p : pour s'en convaincre, le lecteur peut analyser ce qui se passe dans le cas de la figure 6.4.4 lorsqu'on affecte, aux divers surclassements, des valeurs de σ_p légèrement différentes et voisines de 1.

6.4.2 ELECTRE II

La procédure d'exploitation d'ELECTRE II a été historiquement (cf. Roy et Bertier (1971 et 1973)) la première à aborder la problématique du rangement à partir d'un système de préférences "floues" de type (S, R). Elle fut aussi la première à déterminer le

¹ Cf. Mareschal (1988).

² Cf. Mareschal et Brans (1988).

préordre partiel final comme intersection de deux préordres complets conçus selon deux variantes du même principe : l'une tendant à "tirer les actions flottantes (c'est-à-dire dont la place dans le classement est, a priori, mal déterminée du fait des incomparabilités) vers le haut", l'autre tendant à "tirer ces mêmes actions flottantes vers le bas" du classement. Certes, le système de préférences floues est réduit, dans ELECTRE II, à deux relations de surclassement emboîtées $S^1 \subset S^2$ (cf. 5.3.1 a1)). Ultérieurement, ELECTRE III, ELECTRE IV ou PROMETHEE ont davantage nuancé la crédibilité du surclassement et utilisé des principes de classement quelque peu différents.

a) Présentation

La procédure de rangement d'ELECTRE II comporte quatre étapes conduisant successivement à définir :

- une relation de préférence sans circuits relative à un ensemble A_σ ayant pour élément des classes d'actions jugées ex æquo ;
- un préordre complet Z_1 ;
- un préordre complet Z_2 ;
- le préordre partiel final Z .

Première étape : Détermination de $(A_\sigma, \succ_\sigma)$

On ne fait intervenir ici que le surclassement le plus crédible S^1 ; soit A_σ la partition de A définie par les circuits maximaux de S^1 . Si cette relation est sans circuits, $A_\sigma = A$. Sinon, pour obtenir A_σ , il suffit d'appliquer à (A, S^1) la première étape de la procédure d'exploitation d'ELECTRE I (cf. 6.2.1 a)). Lorsqu'une classe de A_σ n'est pas réduite à une seule action, celles qu'elle renferme ne seront plus différenciées dans la suite et regardées comme obligatoirement ex æquo.

Afin de comparer les classes de A_σ , on déduit, de S^1 , la relation de préférence $\succ_\sigma^1$ selon la même règle que celle qui, dans ELECTRE I, fait passer de S à $\succ_\sigma$ (cf. 6.2.1 a) deuxième étape, (r.6.2.1)).

Deuxième étape : Détermination de Z_1

La relation $\succ_{\sigma}^1$ est sans circuits. Le sous-ensemble B^1 des éléments de A_{σ} tel que "aucun autre ne leur est préféré" selon $\succ_{\sigma}^1$ n'est, par conséquent, jamais vide. Si l'on retire de A_{σ} tous les éléments de B^1 , on peut déterminer¹ le sous-ensemble B^2 des éléments restants tels que "aucun autre ne leur est préféré" dans $A_{\sigma} \setminus B^1$ (selon $\succ_{\sigma}^1$). En itérant ce procédé, il est aisé de construire la partition de A_{σ} : $\{B^1, B^2, \dots\}$.

On définit, sur ces bases, ce que nous appellerons une **version grossière** du préordre complet Z_1 en plaçant en tête et en position ex æquo toutes les classes de B^1 , ensuite (c'est-à-dire en seconde position) celles de B^2 et ainsi de suite. Pour achever de définir Z_1 , on examine s'il est possible d'affiner ce préordre sur la base de la relation S^2 . Cet **affinement** consiste à utiliser l'information qu'apporte ce surclassement moins crédible pour départager les diverses classes d'un sous-ensemble B^j chaque fois qu'il en contient plusieurs (celles-ci étant nécessairement incomparables selon S^1). Cet affinement de la version grossière de Z_1 est obtenu en utilisant S^2 pour définir, sur B^j , un préordre complet qui prend place entre B^{j-1} et B^{j+1} .

C'est en utilisant sur (B^j, S^2) la procédure qui, appliquée à (A, S^1) , a permis de définir la version grossière du préordre Z^1 sur A que l'on définit le préordre sur B^j . Il s'agit par conséquent, en premier lieu, de mettre en évidence les éventuels circuits maximaux de B^j selon S^2 et de définir la relation de préférence $\succ_{\sigma}^{2j}$; sur la base de cette dernière relation et conformément à la procédure décrite en début de la présente deuxième étape, on détermine, en second lieu, le préordre complet sur B^j (il y a réellement affinement dès l'instant où $\succ_{\sigma}^{2j} \neq \emptyset$). La version définitive du préordre complet Z_1 est ainsi obtenue après avoir traité de la sorte chacun des sous-ensembles B^j non réduits à une classe de A_{σ} .

Troisième étape : Détermination de Z_2

Cette étape consiste à répéter la précédente avec les deux modifications ci-après :

¹ Notons que $B^1 \neq A_{\sigma}$ implique $B^2 \neq \emptyset$.

- remplacer la propriété "aucun autre ne leur est préféré" par "ils ne sont préférés à aucun autre" ; soit $\{B^1, B^2, \dots\}$ la partition ainsi obtenue ;
- définir la version grossière de Z_2 en plaçant, en queue de classement et en position ex æquo, tous les éléments de B^1 puis, en avant-dernière position, ceux de B^2 et ainsi de suite.

Quatrième étape : Détermination de Z

$Z = Z_1 \cap Z_2$ est défini par (cf. (r.6.4.4)) :

$$b \text{ Z } a \Leftrightarrow [b \text{ Z}_1 a \text{ et } b \text{ Z}_2 a].$$

Les aspects essentiels de cette procédure sont illustrés dans le cadre des commentaires théoriques qui suivent.

b) Commentaires théoriques

Faisons tout d'abord observer que S^2 ne joue qu'un rôle très local : cette relation (la moins crédible des deux) sert, tout au plus, à "inter-classer" certains groupes d'éléments incomparables selon S^1 et placés en position ex æquo dans la version grossière de Z_1 ou de Z_2 . Le principe de cet inter-classement étant le même que celui qui, à partir de S^1 , conduit précisément à cette version grossière de Z_1 ou de Z_2 , nous n'insisterons pas davantage sur la manière dont S^2 intervient dans la procédure.

Comme dans ELECTRE I, les actions qui forment un circuit selon S^1 sont regardées comme des actions ex æquo dans le préordre Z d'ELECTRE II. L'indifférence qui découle de l'acceptation conjointe de $b \text{ S}^1 a$ et $a \text{ S}^1 b$ est ici tout spécialement justifiée en raison de la forme particulière donnée à la condition de concordance complétée par la condition de non veto (cf. 5.3.1 a1)). Les circuits plus longs, même lorsqu'ils ne correspondent pas à une clique de S^1 , sont traités comme s'ils étaient formés d'actions toutes deux à deux indifférentes. C'est là un premier aspect critiquable de la procédure, surtout lorsqu'on l'applique à une famille F comportant des pseudo-critères (cf. 5.3.1 a2)). Il peut conduire à placer, dans Z , un grand nombre d'actions en position ex æquo. Ce phénomène peut être illustré par les données du tableau 6.4.1 : en l'absence de veto et quel que soit s^1 , la relation S^1 fait, des quatre actions a , b , c , et d , une clique à laquelle viennent s'ajouter les surclassements suivants :

$$a \text{ S}^1 e, e \text{ S}^1 b, e \text{ S}^1 c, e \text{ S}^1 d.$$

Les cinq actions sont donc classées ex æquo dans Z .

La façon dont ELECTRE II traite les circuits a cependant un mérite, au moins en ce qui concerne ceux de longueur 2. Dès lors que deux actions sont indifférentes selon le surclassement le plus fortement crédible, elles sont obligatoirement placées en position *ex æquo* dans Z (tel n'est pas le cas avec PROMETHEE).

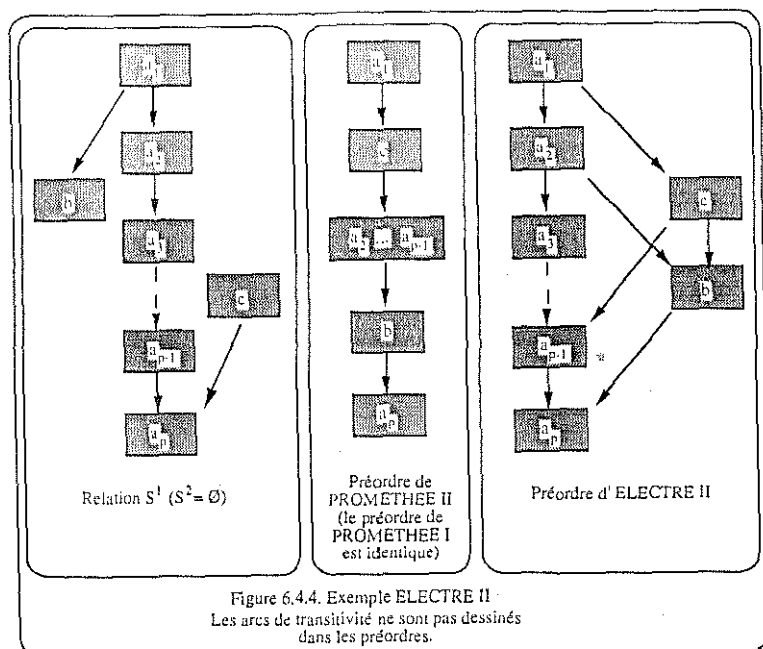
Les actions qui sont placées en tête de la version grossière de Z_1 , autrement dit celles constituant les classes de B^1 , ne sont autres que les actions S^1 -efficaces¹ (cf. 6.1.2 a)). Cette propriété explique que ces actions soient regardées comme étant candidates aux premières places et départagées selon le même principe sur la base de S^2 . A la suite des actions de B^1 , la procédure place celles qui sont S^1 -efficaces dans $A_0 \setminus B^1$ après les avoir à nouveau départagées sur la base de S^2 et ainsi de suite. Abstraction faite de la manière de traiter les circuits, autrement dit en l'absence de tout circuit, le préordre Z_1 trouve sa légitimité dans la hiérarchie d'actions S^1 - S^2 -efficaces mises progressivement en évidence par la procédure. Il peut paraître tout aussi légitime de procéder à l'envers : les actions ne surclassant strictement aucune autre action de A selon S^1 étant candidates aux dernières places (avec départage selon S^2) et ainsi de suite en remontant vers la tête de classement.

Les actions flottantes du type de celles notées b et c sur la figure 6.4.4 sont traitées de façon antagoniste, par rapport aux actions $a_1, a_2, \dots, a_p$, selon que la hiérarchie est établie en allant de la tête vers la queue (préordre Z_1) ou de la queue vers la tête (préordre Z_2). Il s'ensuit que des actions telles que b et c se comparent difficilement aux actions a_2, a_{p-1} dans Z (cf. figure 6.4.4). Ceci a le mérite de mettre en évidence le fait que l'information contenue dans la relation de surclassement considérée est insuffisante pour déterminer avec précision la place de ces actions flottantes. Rappelons que les raisons qui justifient la définition du préordre partiel final Z comme intersection des préordres complets Z_1 et Z_2 ont déjà été présentées au 6.4.1 b).

L'exemple de la figure 6.4.4 met en évidence le fait (facile à établir en toute rigueur) que, dans la version grossière de Z_1 , la place d'une action quelconque a est complètement déterminée par la longueur du plus long chemin de S^1 dont a est l'aboutissement ; dans la version grossière de Z_2 , la place de a est de même complètement déterminée par la longueur du plus long chemin dans S^1 dont a est l'origine. Ces résultats mettent en évidence un second point critiquable de cette procédure de classement. Soit en effet $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$ un plus long chemin dont a_1 soit l'origine, a_p l'aboutissement et tel que les seuls surclassements entre les actions qu'il comporte soient ceux qui forment le chemin (cf. figure 6.4.4). Le fait de placer a_1 avant a_p dans Z_1 aussi bien que

¹ Afin de mieux faire comprendre ce qui est essentiel, nous supposons ici implicitement S^1 sans circuits, ce qui permet d'écrire S^1 là où il faudrait écrire $\succ_{\sigma}^1$. Nous ferons ci-après de même avec S^2 .

dans Z_2 ne repose sur aucune information directement explicitée par S^1 : c'est l'extrapolation implicite du surclassement par fermeture transitive le long du chemin qui sous-tend le raisonnement. On peut en déduire que la fermeture transitive (cf. 6.1.4) de $>_a^1$ est nécessairement incluse dans Z (l'inclusion étant généralement stricte, même en faisant abstraction de S^2). Une telle extrapolation implicite n'existant pas dans les procédures d'exploitation de PROMETHEE I et II, cela explique que ces dernières aboutissent, à propos de la relation nette de la figure 6.4.4, à un préordre final très différent de celui d'ELECTRE II.



Le lecteur vérifiera sans peine que le passage de S^1 à sa fermeture transitive $\hat{S}^1$ laisse invariante la partition en circuits maximaux de même que la longueur des plus longs chemins de $>_a^1$. D'après ce qui précède, le résultat auquel conduit ELECTRE II n'est donc pas modifié lorsqu'on substitue $\hat{S}^1$ à S^1 et/ou $\hat{S}^2$ à S^2 .

c) Commentaires pratiques

La procédure de classement d'ELECTRE II, derrière l'apparente complexité de la présentation rigoureuse qui en est faite au a), repose, comme on l'a montré au b), sur un principe très simple. Pour le praticien qui utilise cette procédure, il est de ce fait facile (tout comme avec PROMETHEE) de suivre et de comprendre le déroulement des calculs. Soulignons que la PAMC d'ELECTRE II est assez peu discriminante puisqu'elle conduit à ne distinguer que deux niveaux de crédibilité. Rien n'interdit d'en ajouter d'autres. La procédure de classement se généralise alors de façon évidente.

Avec ELECTRE II comme avec les autres procédures de rangement, une analyse de robustesse est normalement nécessaire. Les paramètres dont la valeur est mal déterminée, qui conditionnent par conséquent cette analyse de robustesse, sont d'une part ceux déjà mentionnés à propos de PROMETHEE (cf. 6.4.1 c)) et, d'autre part, les niveaux de concordance s^1 et s^2 . Rappelons enfin que les relations de surclassement S^1 et S^2 peuvent prendre en compte des seuils d'indifférence et/ou de préférence constants ou variables (cf. 5.3.1 a2)).

6.4.3 ELECTRE III (cf. Roy (1978))

ELECTRE III a été conçue avec le souci d'exploiter, de façon plus significative que ne le fait ELECTRE II, les informations contenues dans un tableau de performances faisant intervenir des pseudo-critères (et cela toujours dans le cadre d'une problématique du rangement). La procédure de classement s'applique ici à un système de préférences floues non limité, comme dans ELECTRE II, à deux niveaux de crédibilité. Ce système de préférences est de type (S, R) et non de type (P, ~) comme dans PROMETHEE.

Dans ELECTRE III, comme dans ELECTRE II, le préordre partiel final Z est obtenu comme intersection de deux préordres complets. Comme auparavant, ceux-ci sont notés Z_1 et Z_2 et conçus selon deux variantes d'un même principe, l'une et l'autre agissant de façon antagoniste sur les actions flottantes.

a) *Présentation*1°) *Schéma d'ensemble*

Le préordre complet Z_1 est caractérisé par une partition de A en r classes notées $\overline{C}_h$ ordonnées de $h = 1$ (classe de tête) à $h = r$ (classe de queue). Par définition, les actions d'une classe $\overline{C}_h$ sont regardées comme ex æquo selon Z_1 . Le préordre complet Z_2 est de même caractérisé par une partition de A en p classes notées $\underline{C}_h$ ordonnées de $h = p$ (classe de tête) à $h = 1$ (classe de queue).

Chacune de ces classes est obtenue comme **distillat final** d'une **distillation**. Chaque distillation consiste, une fois défini un ensemble initial $D_0 \subset A$, à construire une suite de sous-ensembles D_k appelés distillats, chacun étant inclus dans le précédent. La procédure permettant de passer de D_k à D_{k+1} est décrite au 4°) ci-après. Les règles d'arrêt de chaque distillation et, par conséquent, les conditions d'obtention d'un distillat final sont précisées au 5°).

Pour obtenir Z_1 , on prend, comme point de départ de la première distillation, $D_0 = A$; celle-ci conduit au premier distillat final $\overline{C}_1$. Pour initialiser la distillation de rang $h+1$, laquelle fait suite à celle ayant abouti à $\overline{C}_h$, on pose $D_0 = A \setminus (\overline{C}_1 \cup \dots \cup \overline{C}_h)$. Les conditions qui permettent d'initialiser chaque distillation sont précisées au 3°) ci-après. Les classes ainsi obtenues sont telles que les actions de $\overline{C}_h$ sont, au sens de Z_1 , préférables à celles de $\overline{C}_{h+1}$; pour cette raison, les distillations qui aboutissent à ces classes seront qualifiées de **descendantes**.

L'obtention des classes de Z_2 procède de règles presque en tous points identiques : la première distillation est initialisée en posant $D_0 = A$ et l'enchaînement des distillations s'effectue encore en posant $D_0 = A \setminus (\underline{C}_1 \cup \dots \cup \underline{C}_h)$ mais le distillat final $\underline{C}_{h+1}$ qui en découle renferme des actions qui, selon Z_2 , sont préférables à celles de $\underline{C}_h$. Pour cette raison, les distillations servant à produire Z_2 seront qualifiées d'**ascendantes**. Le seul point qui différencie distillations ascendante et descendante est indiqué au 4°) ci-après.

L'une et l'autre de ces deux **chaînes de distillations** font intervenir trois concepts-clés définis ci-après :

- le seuil de discrimination $s(\lambda)$ de l'indice de crédibilité $\lambda = \sigma_s(b, a)$ caractérisant la crédibilité de l'affirmation $b \text{ S } a$;
- la λ -qualification d'une action sur laquelle reposent les sélections successives aboutissant aux distillats finals ;
- les paliers de séparation servant à définir les λ -coupes successives de la relation floue (cf. passage introductif du 5.3.2) qui structurent le processus de distillation.

2°) Définitions et notations

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il est impossible de prétendre que l'indice de crédibilité d'ELECTRE III (de même que de celui de PROMETHEE) est rigoureusement conforme à l'exigence 3 énoncée dans le passage introductif du 5.3.2. Il est par exemple difficile de conclure qu'un surclassement $b \text{ S } a$ est indubitablement plus solidement argumenté qu'un surclassement $d \text{ S } c$ du seul fait que $\sigma_s(b, a) = 0,97$ alors que $\sigma_s(d, c) = 0,91$. L'indice $\sigma_s(b, a)$ doit en fait être regardé comme un critère servant à apprécier la plus ou moins grande crédibilité de l'affirmation $b \text{ S } a$. Ici, plus encore que dans bien d'autres cas, seul l'ordre de grandeur est porteur de signification. C'est dire que le pouvoir discriminant de ce critère n'est pas absolu et qu'il convient de repérer, par un seuil non nul, l'écart maximum qui peut exister entre $\sigma_s(b, a) = \lambda$ et $\sigma_s(d, c)$ sans que l'affirmation $b \text{ S } a$ puisse, de façon indéniable, être jugée plus solidement établie que l'affirmation $d \text{ S } c$. Ce seuil est noté $s(\lambda)$ avec $\lambda = \sigma_s(b, a)$ et sera appelé **seuil de discrimination de l'indice de crédibilité**.

Ce seuil, s'il n'est pas choisi constant, doit être ¹ tel que $\lambda - s(\lambda)$ soit une fonction monotone non décroissante de λ . La valeur qu'il convient d'attribuer à ce seuil ne peut, en aucun cas (mais il en va de même pour beaucoup d'autres seuils), découler de

¹ Cf. MMCAD, 9.3 ; attirons l'attention sur le fait que $s(\lambda)$ désigne un seuil inverse.

l'observation. On est ici en présence d'un "paramètre technique" dont il faut "raisonner" la valeur afin qu'elle soit adaptée au rôle qui lui est dévolu. Sur la base de (r.5.3.12), on peut ainsi estimer qu'un surclassement d'indice de crédibilité 0,99 peut être regardé comme plus solidement établi qu'un autre d'indice 0,80 mais peut-être pas qu'un troisième d'indice 0,85. Pour les petites valeurs de λ , la valeur du seuil semble devoir être plus élevée, tout surclassement de crédibilité égal ou inférieur à 0,25 pouvant n'être pas jugé mieux fondé qu'un surclassement de crédibilité nul mais un surclassement de crédibilité 0,30 pouvant peut-être l'être. Avec de telles hypothèses et en procédant par interpolation linéaire, on est amené à poser :

$$s(\lambda) = 0,30 - 0,15 \lambda. \quad (\text{r.6.4.7})$$

Considérons $D \subset A$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Définissons sur D la relation de λ -préférence, $\succ_D^\lambda$, en posant, $\forall a, b \in D$:

$$\begin{aligned} a \succ_D^\lambda b &\Leftrightarrow [\sigma_s(a, b) - s(\sigma_s(a, b)) > \sigma_s(b, a)] \\ &\text{et } [\sigma_s(a, b) > \lambda]. \end{aligned} \quad (\text{r.6.4.8})$$

Par définition :

- la λ -puissance de a dans D , notée p_D^λ , est le nombre d'actions de D auxquelles a est λ -préférée ;
 - la λ -faiblesse de a dans D , notée f_D^λ , est le nombre d'actions de D qui sont λ -préférées à a ;
 - la λ -qualification de a dans D est la quantité :
- $$q_D^\lambda = p_D^\lambda - f_D^\lambda. \quad (\text{r.6.4.9})$$

Associons enfin, à chaque couple (λ, D) , une valeur de l'indice de crédibilité appelé *palier de séparation de D pour la valeur λ* , notée $\Delta(\lambda, D)$, définie par :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, D) = & \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_s(a, b) \geq \lambda - s(\lambda), \forall a, b \in D \\ \max_{(a,b) \in \Delta} \sigma_s(a, b) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{r.6.4.10}) \\ & \text{avec } \Delta = \{(a, b) \in D \times D : \sigma_s(a, b) < \lambda - s(\lambda)\} \end{aligned}$$

3°) Initialisation d'une distillation de rang h

Considérons tout d'abord le cas d'une distillation descendante. Dire qu'elle

est de rang h ($h = 1, 2, \dots$), c'est dire que $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{h-1}$ (cf. 1°) ci-dessus) ont été obtenus. On adopte alors :

$$D_0 = A \setminus (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \dots \cup \mathcal{T}_{h-1})$$

comme point de départ de cette distillation. De façon analogue pour la distillation ascendante de rang h , on pose :

$$D_0 = A \setminus (\underline{\mathcal{C}}_1 \cup \dots \cup \underline{\mathcal{C}}_{h-1}).$$

A l'ensemble D_0 , on associe, dans tous les cas, une valeur initiale du palier de séparation défini par :

$$\lambda_0 = \max_{a, b \in D_0} \sigma_s(a, b).$$

4°) *Passage du distillat D_k au distillat D_{k+1}*

Soit D_k le dernier distillat obtenu et λ_k le palier de séparation associé. Après avoir vérifié qu'aucune des conditions d'arrêt du 5°) ci-après n'est remplie, déterminer le palier de séparation suivant :

$$\lambda_{k+1} = \Delta(\lambda_k, D_k) \text{ (cf. (r.6.4.10))}$$

et calculer la λ_{k+1} -qualification de chacune des actions de D_k . Le distillat D_{k+1} est le sous-ensemble de D_k formé de toutes les actions dont la qualification ainsi calculée est :

- maximum dans le cas d'une distillation descendante ;
- minimum dans le cas d'une distillation ascendante.

5°) *Conditions d'arrêt*

Une distillation ascendante ou descendante s'achève dès que :

$$\lambda_k = 0 \text{ ou } \text{card}(D_k) = 1.$$

Le distillat final est D_k . Si la distillation est de rang h , on pose alors :

- $D_k = \mathcal{T}_h$ dans le cas descendant ;
- $D_k = \underline{\mathcal{C}}_h$ dans le cas ascendant.

Dans les deux cas, la chaîne de distillation s'achève lorsque l'initialisation de la distillation suivante (cf. 3°)) conduit à poser $D_0 = \emptyset$.

b) Commentaires théoriques

Commençons, ici encore, par expliquer pourquoi le préordre Z (éventuellement complété par Z_1 et Z_2) obtenu par ELECTRE III peut être regardé comme l'instrument d'aide à la décision recherché dans le cadre d'une problématique de rangement une fois accepté le modèle de préférences que constitue $\sigma_s(a, b)$ (cf. (r.5.4.12)).

Pour cela, analysons tout d'abord ce que signifie la λ -préférence (cf. (r.6.4.8)). L'inégalité :

$$\sigma_s(a, b) - s[\sigma_s(a, b)] > \sigma_s(b, a)$$

reflète une différence significative entre la crédibilité de $a \succ b$ et celle de $b \succ a$. Dans ces conditions, la relation $a \succ b$ peut être interprétée comme une préférence et être remplacée par $a \succ b$ avec une crédibilité inchangée¹. De la relation de préférence floue ainsi définie, on déduit la relation de λ -préférence (qui est une relation nette asymétrique) grâce à la seconde condition de (r.6.4.8) : $\sigma_s(a, b) > \lambda$. La λ -préférence correspond donc à une préférence jugée d'autant plus crédible que λ est plus élevé.

Mettons maintenant en évidence les deux principes au travers desquels ELECTRE III puise sa légitimité.

Principe n° 1

Dans le préordre complet Z_1 , la classe de tête $\mathcal{T}_1$ est formée des meilleures actions de A exactement comme la classe suivante $\mathcal{T}_2$ est formée des meilleures actions de $A \setminus \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_3$ des meilleures actions de $A \setminus (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$, etc. ; de même, dans Z_2 , la classe de queue $\mathcal{C}_1$ est formée des pires actions de A exactement comme la classe suivante $\mathcal{C}_2$ est formée des pires actions de $A \setminus \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ des pires actions de $A \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$, etc.

¹ Une variante consisterait à regarder $a \succ b$ comme plus crédible que $a \succ b$ et à adopter, comme crédibilité de cette dernière affirmation, $\sigma_s(a, b) - \sigma_s(b, a)$.

Principe n° 2

Dans un ensemble D sur lequel une relation de λ -préférence a été définie, une action a mérite ¹ d'autant plus d'être classée en tête (resp. en queue) que sa λ -puissance est plus grande (resp. plus petite) et sa λ -faiblesse plus petite (resp. plus grande). Afin de faire intervenir conjointement et dans le sens approprié ces deux indicateurs, ELECTRE III ne prend en compte que leurs différences (concept de λ -qualification ², cf. (r.6.4.10)).

La procédure consiste, pour l'obtention de Z_1 , à exploiter ces deux principes comme suit : au départ, on prend appui sur une relation nette de λ_1 -préférence qui ne valide la préférence que pour des valeurs du degré de crédibilité voisines de sa valeur maximum. Par définition, le premier distillat D_1 est formé des actions de λ_1 -qualification maximum dans A . D'après le principe n° 2, ces actions apparaissent comme étant les meilleures candidates pour constituer la classe de tête de Z_1 . Si $\text{card}(D_1) = 1$, on pose $D_1 = T_1$ mais si $\text{card}(D_1) > 1$, on procède à une comparaison de ces actions entre elles sur la base d'une relation de λ_2 -préférence définie pour $\lambda_2 > \lambda_1$. Grâce à cette comparaison, on cherche à savoir si, toujours selon le principe n° 2, certaines des actions de D_1 n'apparaissent pas comme mieux désignées que d'autres pour occuper la première place dans Z_1 . Ces actions ne sont autres que celles dont la λ_2 -qualification dans D_1 est maximum. Ces dernières forment le nouveau distillat D_2 . Cette procédure est itérée aussi longtemps que le distillat obtenu comporte plus d'un élément et qu'il est possible de faire intervenir des λ -préférences moins crédibles pour différencier les candidats ex æquo. Une fois obtenue la classe de tête T_1 , elle est retirée de A et, d'après le

¹ Voir à ce sujet, au début du 6.4.1 b), les considérations relatives à $\phi^+(a)$ et $\phi^-(a)$ dans le cas d'une relation nette.

² Bien que ce concept ne soit pas sans liens avec celui de flux nets intervenant dans PROMETHEE II (cf. 6.4.1 a)), soulignons, entre autres différences, le fait qu'il intervient ici aussi bien dans la construction de Z_1 que dans celle de Z_2 qui ne reposent pas séparément l'un sur la λ -puissance, l'autre sur la λ -faiblesse.

principe n° 1, $\mathcal{T}_2$ s'obtient en appliquant la même procédure à l'ensemble résiduel $A \setminus \mathcal{T}_1$.

Le préordre complet Z_2 s'obtient avec la même procédure après avoir remplacé maximum par minimum. Les relations Z_1 et Z_2 étant fondées sur les mêmes principes appliqués de façon duale, il est légitime (cf. 6.4.1 b)) d'en retenir la partie commune : $Z = Z_1 \cap Z_2$.

Dans chacune des distillations, l'obtention des valeurs discriminantes de λ qui forment la suite décroissante $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ repose sur le concept de palier de séparation et sur l'utilisation de la formule (r.6.4.10). Celle-ci est conçue de façon à prendre en compte, sur chacun des sous-ensembles D considérés, la séquence de valeurs effectivement prises par le degré de crédibilité. Il est ainsi possible d'adapter pas à pas la baisse des paliers (chacun servant à définir une relation nette de plus en plus fragile pour départager des candidats à une même place qui, jusque là, étaient ex æquo) aux particularités de la distribution des valeurs de l'indice de crédibilité propre à chacun des sous-ensemble successifs considérés. Quelles que soient ces distributions, le nombre des paliers (et, par conséquent, celui des distillats dans une distillation) ne peut dépasser cinq si l'on utilise (r.6.4.7). Ce nombre est généralement bien inférieur car les valeurs effectivement prises par le degré de crédibilité sur un sous-ensemble D ne sont pas uniformément réparties sur l'intervalle $[0 ; 1]$: des intervalles parfois assez grands peuvent ne contenir aucune valeur effective. Cette particularité est exploitée par (r.6.4.10).

Les commentaires qui précèdent n'apportent pas davantage une véritable assise théorique à la procédure d'exploitation d'ELECTRE III que ceux du début du 6.4.1 b) et 6.4.2 b) ne le font vis-à-vis des procédures d'exploitation de PROMETHEE et d'ELECTRE II. Néanmoins, ils mettent en évidence les principes et modalités qui en sous-tendent le fonctionnement. Nous terminerons ce paragraphe en soulignant quelques points par lesquels cette troisième procédure diffère des deux précédentes tout en faisant ressortir certains de ses avantages et inconvénients.

Une différence essentielle entre PROMETHEE et ELECTRE III provient de ce que, dans cette dernière méthode, les indices de crédibilité ne sont, à aucun moment, additionnés entre eux ni même soustraits (comme il est suggéré dans la variante proposée ci-dessus en note de bas de page). Les valeurs de crédibilité sont seulement comparées les unes aux autres conformément à leur signification ordinale. Le rangement repose uniquement sur des dénombrements d'actions jugées préférées ou préférables à une action donnée et cela en abaissant progressivement la valeur de la crédibilité de façon à séparer des actions qui, autrement, ne le seraient pas. Cette façon de faire, appliquée aux données des tableaux 6.4.1 et 6.4.2, ne conduit pas pour autant à des résultats systématiquement plus satisfaisants que ceux auxquels conduit PROMETHEE I. Le préordre Z obtenu avec ELECTRE III :

- diffère, dans le premier cas, du préordre Z de la figure 6.4.1 par la disparition d'une seule incomparabilité provenant de l'adjonction d'une flèche allant de e vers la classe (b, c, d) , adjonction qui paraît pleinement justifiée au regard des données du tableau 6.4.1 ;

- coïncide, dans le second cas, avec le préordre Z de la figure 6.4.2.

Dans ELECTRE III, contrairement à ce qui se passe dans PROMETHEE, le fait de faire varier d'une même constante les valeurs de l'indice de crédibilité relativement à chacun des couples d'actions consécutives formant un circuit ne laisse pas nécessairement invariantes les positions relatives de ces actions dans Z_1 et dans Z_2 . Cela ne suffit pas à garantir, dans la version classique d'ELECTRE III, une différenciation satisfaisante entre le traitement de l'indifférence et de l'incomparabilité comme il est facile de le constater à partir des données du tableau 6.4.3. Il serait souhaitable d'aboutir à un préordre partiel plaçant a et b ex æquo en tête, suivies de c et d incomparables, ces deux dernières actions étant préférées à e et f ex æquo. Au lieu de cela, ELECTRE III, comme PROMETHEE I et II, font en plus apparaître c et d comme étant ex æquo.

Mentionnons ici une variante d'ELECTRE III qui assure une meilleure différenciation entre indifférence et incomparabilité que ne le fait la version classique présentée au a) ci-dessus. Dans cette variante, les classes $\mathcal{C}_h$ et $\underline{\mathcal{C}}_h$ ne sont pas nécessairement des classes d'actions toutes ex æquo. Elles peuvent être partitionnées en sous-classes d'actions ex æquo, ces sous-classes étant incomparables entre elles. Rien n'est pour autant changé dans la manière dont les actions d'une classe ainsi partitionnée se comparent aux actions des autres classes. Autrement dit, Z_1 , comme Z_2 , sont encore des préordres complets sur l'ensemble des classes qu'ils comportent mais ils ne définissent plus nécessairement des préordres complets sur A puisque, dans certaines classes, il peut y avoir des actions incomparables entre elles. Dans cette variante, les classes $\mathcal{C}_h$ et $\underline{\mathcal{C}}_h$ sont obtenues exactement comme dans la version classique. La différence provient de ce que, au lieu de considérer automatiquement un distillat final D_k comme une classe d'actions ex æquo, celui-ci est examiné au regard des

valeurs que prend l'indice de crédibilité $\sigma_s(a, b)$, $\forall a, b \in D_k$. L'homme d'étude peut, sur cette base, considérer que seules les actions de certaines sous-classes sont ex æquo entre elles, les sous-classes étant incomparables.

Tableau 6.4.3

Actions \ Critères	Critères	
	g_1	g_2
a	18	19
b	19	18
c	15	5
d	5	15
e	1	2
f	2	1

g_1 et g_2 sont des quasi-critères d'égale importance avec $q_1 = q_2 = 2$.

Appliquée aux données du tableau 6.4.3, cette variante conduit à examiner les trois classes (a, b), (c, d), (e, f) qui forment aussi bien Z_1 que Z_2 . Etant donné que :

- $\sigma_s(a, b) = \sigma_s(b, a) = 1$: la classe (a, b) renferme deux actions ex æquo ; pour la même raison, la classe (e, f) est également formée de deux actions ex æquo ;
- $\sigma_s(c, d) = \sigma_s(d, c) \leq 1/2$ (l'inégalité provenant d'un possible effet de veto) : la classe (c, d) renferme deux actions incomparables.

Dans ce cas, on obtient donc, avec cette variante, le préordre partiel souhaité.

Le seuil de discrimination $s(\lambda)$ intervient à deux moments : en premier lieu pour décider si la différence entre $\sigma_s(a, b)$ et $\sigma_s(b, a)$ est ou non significative, en second lieu pour traiter, sans les différencier, des "blocs" de λ -préférence obtenus pour des valeurs voisines de λ . On évite ainsi des discriminations qui reposeraient sur des écarts trop faibles comme cela peut se produire dans PROMETHEE (cf. 6.4.1 c)).

Dans ELECTRE III, on ne retrouve pas de phénomènes d'exploitation implicite de fermetures transitives comme c'est le cas dans ELECTRE II (cf. 6.4.2 b)). Rappelons que ce phénomène consiste à extrapoler, de façon implicite, les surclassements fortement crédibles le long d'un chemin pour

systématiquement positionner l'action qui est à l'origine du chemin avant celle qui en constitue l'aboutissement alors que la comparaison directe de ces deux actions n'apporte aucune information sur leur comparaison. Cela n'empêche pas, dans le cas de la figure 6.4.4, d'obtenir, avec ELECTRE III, un préordre Z qui reproduise le chemin $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p : Z$ est en fait constitué par ce chemin, c étant intercalée entre a_1 et a_2 et b entre a_{p-1} et a_p . Il est intéressant de comparer ce résultat d'ELECTRE III avec ceux de PROMETHEE et d'ELECTRE II (cf. figure 6.4.4). On constate que, en dépit de leur caractère relativement flottant, les actions b et c sont positionnées, aussi bien avec PROMETHEE qu'avec ELECTRE III, d'une façon qui fait disparaître toute incomparabilité sans que la justification en apparaisse clairement.

La procédure de sélection d'ELECTRE III consiste, tout comme celle d'ELECTRE II, à itérer une procédure de sélection (différente de celle d'ELECTRE II), laquelle est appliquée jusqu'à épuisement (cf. principe n° 1 ci-dessus) à l'ensemble des actions non encore classées. Cela vaut aussi bien pour la construction de Z_1 que pour celle de Z_2 . En tant qu'instrument d'aide à la décision, cette façon de faire peut présenter un certain intérêt puisque, si l'on retire de A les actions de la classe de tête et si l'on applique la procédure aux actions restantes, celles-ci seront ordonnées exactement comme dans Z_1 par la nouvelle distillation descendante (le même résultat vaut avec Z_2 après retrait de la classe de queue). Précisons que cette propriété ne se retrouve pas dans PROMETHEE.

Le mécanisme de distillation d'ELECTRE III diffère nettement de celui de l'affinement adopté dans ELECTRE II. Appliquée à une relation floue n'ayant que deux valeurs distinctes de l'indice de crédibilité, ELECTRE III se différencie d'ELECTRE II par le fait que la valeur faible de crédibilité n'intervient pas seulement pour départager les ex æquo relatifs à la valeur forte car, une fois $\mathcal{C}_1$ obtenu, si D_1 contient d'autres actions, celles-ci ne sont pas nécessairement rangées dans les classes immédiatement suivantes : $\mathcal{C}_2$ peut ne contenir aucune action de $D_1 \setminus \mathcal{C}_1$. On pourrait concevoir une autre version d'ELECTRE III qui n'utiliserait les paliers successifs de séparation que pour affiner un rangement (à la manière d'ELECTRE II) sur l'ensemble des ex æquo du niveau immédiatement supérieur (la sélection restant fondée sur la λ -qualification et non sur une idée d'efficacité comme dans ELECTRE II).

On a montré ci-dessus que la procédure d'exploitation d'ELECTRE III peut apparaître, à certains égards, plus satisfaisante que celles de PROMETHEE ou d'ELECTRE II. Elle possède aussi certains défauts que les autres n'ont pas. Le plus grave a été mis en évidence par Perny (1992) qui a en particulier montré que le rangement par sélection itérative peut engendrer des phénomènes de non monotonie (cf. c) ci-après).

c) Commentaires pratiques

La procédure d'exploitation d'ELECTRE III est plus complexe que celle de PROMETHEE ou d'ELECTRE II. Pourtant, le praticien peut en comprendre aisément le principe en considérant le cas où l'indice de crédibilité ne prend que quelques valeurs bien distinctes telles que 1, 4/5, 1/2, 1/4, 0 (ceci sera clairement mis en évidence avec ELECTRE IV). Malgré cela, il lui sera beaucoup plus difficile de suivre en détail, sur un cas concret, le pas-à-pas des calculs. Le recours à un logiciel est ici absolument nécessaire.

Ici encore, une analyse de robustesse est nécessaire et cela sur les mêmes bases que dans PROMETHEE : si la raison mise en avant au 6.4.1 c) perd ici beaucoup de sa force, une autre raison apparaît. En effet, lorsqu'on fait varier certaines performances, il peut arriver qu'un accroissement de $g_j(a)$ provoque, dans des cas très particuliers, une légère dégradation de la position de l'action a par rapport à d'autres actions (phénomène dit de **non monotonie**). Quelques essais systématiques¹ permettent de penser que ce phénomène malencontreux ne peut s'observer que dans un intervalle de variation assez petit de $g_j(a)$ et qu'il révèle en outre une non robustesse des conclusions sur la manière dont l'action a a été comparée aux actions vis-à-vis desquelles elle s'est déplacée.

6.4.4 ELECTRE IV (cf. Roy et Hugonnard (1982a))

La méthode ELECTRE IV a été conçue afin de pouvoir proposer un préordre partiel sur A dans des conditions en tous points identiques à celles d'ELECTRE III à une seule exception près : elle concerne la présence des coefficients d'importance k_j . Il arrive en effet, dans certains problèmes concrets (cf. chapitre 10), que l'on ne puisse pas, que l'on ne veuille pas ou que l'on ne sache pas attribuer une valeur à ces coefficients. Cela ne signifie pas pour autant que l'on puisse se satisfaire du préordre obtenu en appliquant ELECTRE III avec des coefficients k_j tous

¹ Cf. notamment Gabrel (1990).

égaux. Rechercher un préordre qui rende compte, le mieux possible, de tous ceux obtenus en combinant de toutes les façons les valeurs plausibles de ces coefficients pourrait, théoriquement, apporter la réponse cherchée mais c'est là une voie impraticable. Le système de préférences sur lequel repose ELECTRE IV permet d'obtenir, de façon simple, un préordre sans faire d'hypothèses trop restrictives sur les valeurs¹ des coefficients k_j (cf. dernière partie du 5.3.1.2 b)).

La procédure d'exploitation d'ELECTRE IV s'applique à un système de préférences formé d'une séquence de systèmes relationnels emboîtés de la forme (S^i, R^i) : les surclassements S^i sont au nombre de cinq définis par (r.5.3.5) et (r.5.3.6). La signification de chacune de ces relations est précisée au 5.3.1.2 b). Mentionnons que la procédure peut être appliquée seulement à un sous-ensemble de ces cinq relations.

Dans ELECTRE IV, la relation S^{i+1} (pour $i = 1, 2, 3, 4$) conduit à accepter des surclassements dans des conditions moins crédibles que la relation S^i . Ceci peut être traduit, en restant sur une base purement ordinale, en associant, à l'affirmation $a S^i b$, une valeur σ_i de l'indice de crédibilité $\sigma_s(a, b)$. Les valeurs choisies doivent évidemment être telles que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. De plus, le passage d'une affirmation de crédibilité σ_i à une autre de crédibilité σ_{i+1} doit être regardé comme une perte significative. Autrement dit, si $s(\lambda)$ désigne le seuil de discrimination associé à l'indice σ_s , on doit avoir :

$$\sigma_i - s(\sigma_i) > \sigma_{i+1} \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Sur la base de (r.6.4.7), on peut par exemple poser :

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0,84, \sigma_3 = 0,65, \sigma_4 = 0,44, \sigma_5 = 0,20. \text{ (r.6.4.11)}$$

¹ Signalons également trois autres méthodes ne faisant pas intervenir de valeurs numériques pour de tels coefficients. Il s'agit de :

- QUALIFLEX (cf. Paelinck (1978)) ;
- ORESTE (cf. Roubens (1982)) ;
- MELCHIOR (cf. Leclercq (1984)).

La procédure d'exploitation d'ELECTRE IV n'est autre que celle d'ELECTRE III appliquée aux systèmes de préférences flous qui vient d'être définie. Faisons observer que les préordres Z_1 , Z_2 et Z ainsi obtenus seraient les mêmes avec des valeurs des crédibilités σ_i différentes de celles qui figurent dans (r.6.4.11), pourvu que ces valeurs respectent les conditions énoncées ci-dessus ¹.

Examinons, pour terminer, le mode de fonctionnement d'ELECTRE IV, autrement dit ce que devient la procédure d'exploitation d'ELECTRE III lorsqu'on l'applique au système flou à cinq niveaux de crédibilité (éventuellement moins) qui vient d'être défini.

La première distillation descendante débute avec le couple (A, S^1) . Pour chaque action, on calcule la quantité $q_A^1(a)$ (λ_1 -qualification de a) définie comme la différence entre le nombre d'actions que a surclasse et le nombre d'actions qui surclassent a . D_1 est l'ensemble des actions qui confèrent à $q_A^1(a)$ sa valeur maximum. Si $\text{card}(D_1) = 1$, la première distillation est achevée ; sinon, elle se poursuit avec le couple (D_1, S^2) qui permet de définir $q_{D_1}^2(a)$ dont la valeur maximum amène à sélectionner D_2 . Cette première distillation se poursuit aussi longtemps que $\text{card}(D_k) > 1$ et s'arrête, de toute façon, avec D_5 . Le distillat final obtenu constitue la première classe $\overline{C}_1$ de Z_1 . La seconde distillation débute avec le couple $(A \setminus \overline{C}_1, S^1)$.

Ainsi décrite, la procédure peut paraître beaucoup plus simple que dans le cas général d'ELECTRE III. Cela tient essentiellement au fait que les valeurs de l'indice de crédibilité ne sont pas distribuées "n'importe comment" sur l'intervalle $[0 ; 1]$ mais qu'elles sont regroupées en, au plus, six valeurs significativement distinctes. Il s'ensuit que le mécanisme de détermination des paliers de séparation consiste, tout simplement, à passer d'une

¹ Il n'en serait plus ainsi avec la variante d'ELECTRE III suggérée en note de bas de page au début du 6.4.3 b).

valeur à celle immédiatement inférieure et que le calcul de la λ -qualification se trouve, lui aussi, être simplifié.

6.5 COMPLÉMENTS THÉORIQUES

Cette section vise à introduire un certain nombre de concepts et de résultats utiles pour juger de la validité, de la qualité et de la fiabilité de telle ou telle procédure d'exploitation, éventuellement couplée à une PAMC donnée ¹. De même qu'au 5.5, nous avons pris ici le parti de la brièveté en cherchant avant tout à donner au lecteur une porte d'entrée dans une littérature récente et technique.

Que l'on s'intéresse à des procédures de sélection, d'affectation ou de classement, deux points de vue non exclusifs peuvent être adoptés pour porter un jugement à leur égard.

Le *premier point de vue* consiste, comme on l'a fait au 6.1, à énoncer une liste d'exigences ou de propriétés (propres à chaque problématique) que l'on estime "raisonnables" et "naturelles" et d'étudier dans quelle mesure elles sont satisfaites par certaines procédures d'exploitation. A titre d'exemple, on pourra souhaiter confronter des procédures d'exploitation :

- dans une problématique α , à une propriété imposant que, s'il existe une action optimale unique, elle soit toujours retenue par la procédure de sélection ;
- dans une problématique β , à une propriété imposant que l'affectation des actions soit toujours compatible avec la relation de dominance (exigence de monotonie, cf. 6.1.3 b)) ;
- dans une problématique γ , à une propriété imposant que, si la relation de surclassement est un préordre partiel, la procédure de classement doive restituer ce préordre partiel.

¹ Ce dernier élément a parfois une importance considérable. A titre d'exemple, pour une procédure d'exploitation opérant sur la base d'une relation floue, l'analyse de la façon dont cette relation floue a été obtenue peut être importante pour justifier l'utilisation de tel ou tel type d'opérations sur les degrés de crédibilité.

Etant donné une liste de propriétés, on peut alors :

- chercher à dresser un tableau indiquant quelles sont les propriétés vérifiées par telle ou telle procédure d'exploitation ;
- chercher à déterminer des "théorèmes d'impossibilité" indiquant des groupes de propriétés impossibles à satisfaire simultanément ;
- chercher à déterminer des procédures d'exploitation vérifiant le plus grand nombre possible de ces propriétés compte-tenu des "théorèmes d'impossibilité" obtenus.

Ce premier point de vue comporte néanmoins un certain nombre de difficultés qu'il ne faut pas sous-estimer. En particulier, la recherche d'une liste de propriétés "souhaitables" est loin d'être une chose aisée. L'analyse prônée par ce premier point de vue ne peut véritablement porter de fruits que si les propriétés retenues sont toutes pertinentes et couvrent l'ensemble des exigences qu'il semble bon d'imposer à une procédure d'exploitation d'un certain type.

*

Le second point de vue consiste à caractériser une procédure d'exploitation donnée, c'est-à-dire à dresser une liste de propriétés que cette procédure est la seule à satisfaire. On espère ainsi faire ressortir les traits caractéristiques d'une procédure d'exploitation, traits caractéristiques permettant de la comparer plus aisément à d'autres procédures. Notons cependant qu'une telle démarche ne peut véritablement porter ses fruits que si les propriétés caractéristiques mises à jour sont suffisamment simples et interprétables. Tel n'est pas toujours le cas dès lors que la procédure d'exploitation atteint un certain niveau de complexité.

Les deux types d'analyse que nous venons de présenter sont loin, à ce jour, d'avoir été systématiquement appliqués aux procédures d'exploitation faisant l'objet de ce chapitre. Il y a là un vaste champ de recherche encore largement ouvert. Mentionnons cependant que de telles analyses théoriques ne sauraient, à elles seules, guider le choix d'un homme d'étude vers telle ou telle procédure. D'autres considérations, liées à la simplicité et à la rapidité de la procédure ou à la "presque satisfaction" de

certaines propriétés ¹, peuvent aussi contribuer à guider ce choix (cf. 6.1.5).

La suite de cette section est consacrée à la présentation d'un certain nombre de travaux théoriques à propos de procédures d'exploitation. On structurera cette présentation suivant la problématique d'aide à la décision concernée.

a) Procédures de sélection (P.α)

Peu de travaux ont été spécifiquement consacrés aux procédures de sélection. De plus, en-dehors de celles mentionnées au 6.2, peu ont été proposées à ce jour. Nous mentionnons ci-après quelques travaux qui nous semblent pertinents ainsi que quelques voies de recherche qui paraissent prometteuses.

De nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude de procédures de sélection à partir de relations floues en adoptant le premier ² ou le second ³ des points de vue mentionnés précédemment. Ces travaux se heurtent à certaines difficultés comme :

- la définition des propriétés souhaitables d'une procédure de sélection à partir d'une relation floue ⁴ ;
- la définition de l'ensemble des relations floues admissibles en entrée de la procédure ⁵ ;

¹ On entend par là que telle procédure d'exploitation peut satisfaire à certaines propriétés souhaitables, sauf dans des cas tout-à-fait exceptionnels. Il s'agit là d'un élément d'appréciation qui peut se révéler utile mais qui est souvent difficile à cerner au travers d'une analyse purement théorique.

² Voir par exemple Nurmi et Kacprzyk (1991), Orlovski (1978), Kitainik (1990, 1992), Barrett et al. (1990b), Barrett (1987), Dutta et al. (1986), Switalski (1988, 1990), Ovchinnikov et Ozernoy (1988), Montero et Tejada (1987), Roubens (1989), Kim (1983), Jain (1990).

³ Pour une contribution récente, voir Bouyssou (1992c).

⁴ Le lecteur se rendra mieux compte de cette difficulté en essayant de généraliser les propriétés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ présentées au 6.1.2 c) au cas flou.

⁵ On a vu, au 5.5, qu'une procédure de sélection qui serait couplée avec la PAMC d'ELECTRE III se devrait d'admettre toute relation floue en entrée. Tel ne serait pas le cas avec la PAMC de PROMETHEE pour laquelle certaines

– la définition des opérations algébriques autorisées sur les indices de crédibilité compte-tenu de la façon dont ces indices ont été obtenus¹.

On a vu de plus, au 6.2.1 a), pourquoi, en aide à la décision, il y a un intérêt limité à vouloir fonder une procédure de sélection sur une relation floue.

La théorie du choix social accorde une large place à l'étude des "choix rationnels" à partir de relations binaires nettes ne possédant pas nécessairement des propriétés remarquables de transitivité (comme c'est le cas pour une relation majoritaire). Dans ce cadre, de très nombreuses procédures ont été proposées² qui sont formellement très similaires à des procédures de sélection. A notre connaissance, elles n'ont que rarement été comparées à celles présentées au 6.2.1 a). Mentionnons néanmoins que la plupart de ces procédures ont été conçues :

- pour s'appliquer à des relations complètes ;
- pour assurer une certaine cohérence aux choix lorsque l'ensemble des actions se modifie³.

Elles s'éloignent donc quelque peu de ce que l'on est en droit d'attendre d'une procédure de sélection en aide multicritère à la décision.

b) Procédures d'affectation ($P.\beta$)

Les procédures d'affectation n'ont fait l'objet que de rares études. Peu ont été proposées en-dehors de celles présentées au 6.3. La référence principale en ce domaine est Yu (1992). On y trouvera en particulier :

- la proposition et l'analyse d'une procédure "médiane" entre ELECTRE TRI optimiste et pessimiste ;

relations ne peuvent jamais être obtenues.

¹ Voir à ce propos les commentaires faits au 6.4.1 c) sur PROMETHEE.

² Voir par exemple Fishburn (1977a), Schwartz (1972, 1990), Copeland (1951), Moulin (1986), Bordes (1983), Banks (1985), Miller (1977, 1980), Laffond et al. (1991), Dutta (1988, 1990). Pour une vue d'ensemble du problème du "choix rationnel" en théorie économique et du problème connexe de la "rationalisation" d'une fonction de choix, on pourra se reporter à Moulin (1985), Aizerman (1985), Aizerman et Malishevski (1981), Suzumura (1983), Sen (1986).

³ Sur ces problèmes de cohérence et leurs liens avec le problème de la "rationalisation", voir les références de la note de bas de page précédente.

- la proposition et l'analyse d'une procédure, abandonnant l'exigence d'unicité du 6.1.3 b), permettant d'affecter les actions "posant problème" ¹ à des catégories "intervalles" regroupant une ou plusieurs des catégories initiales ;
- la généralisation d'ELECTRE TRI au cas où chaque catégorie est délimitée par plusieurs profils de référence et non plus par un seul.

La comparaison des procédures présentées au 6.3 avec celles, plus classiques, issues de la statistique ², reste un domaine inexploré. Il en va de même pour ce qui concerne des procédures d'affectation adaptées au cas de profils de référence centraux ou encore de catégories non complètement ordonnées. Il y a là un vaste champ de recherche ouvert.

c) Procédures de rangement (P, γ)

La difficulté qu'il y a à concevoir une "bonne" procédure de rangement (cf. 6.1.4) a suscité de nombreux travaux. Mentionnons, parmi d'autres :

- L'analyse par Vincke (1992), selon le premier des deux points de vue présentés plus haut, des procédures de rangement conduisant à un préordre complet à partir de relations nettes. On trouvera en particulier, dans cet article, une liste de 22 propriétés, l'analyse de 11 procédures vis-à-vis de ces propriétés et l'énoncé de divers théorèmes d'impossibilité. Une telle analyse a été reprise dans le cas de relations floues par Perny (1992, ch. 5). On y trouvera de nombreux exemples montrant les limites des procédures classiques présentées au 6.4.

- L'analyse, selon le second de ces deux points de vue, de certaines procédures de rangement classiques ³.

¹ C'est-à-dire les actions ne pouvant être affectées par la seule application de (r.6.1.1) et (r.6.1.3).

² Voir, par exemple, Diday et al. (1982) ou Romeder (1973).

³ Voir par exemple Rubinstein (1980), Henriot (1985) (caractérisation d'une procédure à partir de relations nettes fondée sur la qualification) ; Bouyssou (1992d) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur le flux net, cf. (r.6.4.5) et (r.6.4.6)) ; Bouyssou et Perny (1992) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur les flux sortant et entrant (cf. (r.6.4.1), (r.6.4.3) et (r.6.4.4)) ; Bouyssou (1991), Pirlot (1991) (caractérisation d'une procédure à partir de relations valuées fondée sur le "minimum en ligne"). On trouvera une vue d'ensemble de ces résultats dans Tsoukias et Vincke (1992).

– Des recherche récentes sur l'obtention du ou des préordres les plus proches d'une relation donnée ¹.

L'ensemble de ces travaux permet de mesurer la difficulté qu'il peut y avoir à concevoir de bonnes procédures de rangement ². On trouvera dans Perny (1992, ch. 5) des propositions pour bâtir plusieurs procédures qui semblent réaliser un bon compromis entre simplicité et exigences théoriques.

¹ Voir entre autres Barthélémy et al. (1989), Hudry (1989), Barthélémy et Monjardet (1988).

² Ces difficultés, ainsi que leurs liens avec certains aspects de la théorie du choix social, sont abondamment développées et illustrées par Perny (1992).

Chapitre 7

APPROCHE DU JUGEMENT LOCAL INTERACTIF

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est de présenter un certain nombre de méthodes se rattachant à l'approche opérationnelle du "jugement local interactif avec itérations essais-erreurs". Contrairement aux méthodes présentées aux chapitres 4 et 5, celles-ci ne font pas explicitement usage de PAMC. L'élaboration de la recommandation s'opère dans ces méthodes au cours d'un dialogue entre un interrogé et un interrogateur régi par un protocole d'interaction. Ce dialogue peut s'analyser comme la succession d'étapes de dialogue où l'interrogé réagit à une proposition qui lui est faite et d'étapes de calcul où l'interrogateur tire parti de ces réactions.

Au 7.1, après avoir montré l'originalité de cette approche opérationnelle, on s'interroge sur le sens et la validité du produit final de l'interaction entre l'interrogé et l'interrogateur. On montre que, dans le cadre de cette approche, la convergence des méthodes doit s'analyser non comme une "convergence algorithmique" mais comme une "convergence psychologique". La portée et les limites d'une telle approche sont ensuite analysées.

La section 7.2 propose une structure générale des méthodes interactives. On montre pourquoi elles relèvent pour la plupart d'une problématique de choix ($P.\alpha$). Un schéma général des méthodes en $P.\alpha$ est ensuite présenté qui nous a conduit à analyser en détail le contenu des étapes de dialogue et de calcul. Les concepts présentés sont illustrés par une méthode interactive élémentaire.

La section 7.3 présente en détail quatre méthodes interactives en $P.\alpha$ que nous croyons représentatives de l'ensemble de celles proposées à ce jour : STEM, méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg, méthode du point de mire évolutif et méthode de Vanderpooten. Chacune de ces méthodes est présentée dans un même formalisme comme la succession d'étapes de dialogue et d'étapes de calcul. D'autres méthodes sont ensuite présentées plus brièvement.

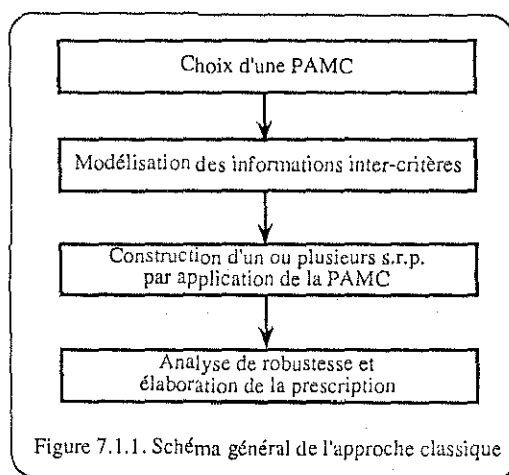
La courte section 7.4 est consacrée aux méthodes interactives relevant de la problématique du tri ($P.\beta$) et de la problématique du rangement ($P.\gamma$). On y

présente principalement la méthode PREFCALC qui relève de P.γ où l'interaction porte sur une procédure de rangement prenant la forme d'une fonction d'utilité additive linéaire par morceaux.

7.1 GÉNÉRALITÉS

7.1.1 Approche classique et approche interactive

On a présenté, aux chapitres 4 et 5, un certain nombre de PAMC s'intégrant dans des méthodes relevant des Approches Opérationnelles 1 et 2 (cf. 1.7). Dans l'une ou l'autre de ces Approches Opérationnelles, l'homme d'étude est amené à élaborer sa recommandation sur la base d'un ou de plusieurs s.r.p. obtenus par application d'une PAMC (cf. chapitre 6). C'est ce que nous appellerons l'**approche classique** de l'aide multicritère à la décision, visant à apporter une réponse synthétique exhaustive et définitive au problème de l'agrégation des performances (cf. figure 7.1.1). Le processus qui conduit à l'élaboration d'une re-

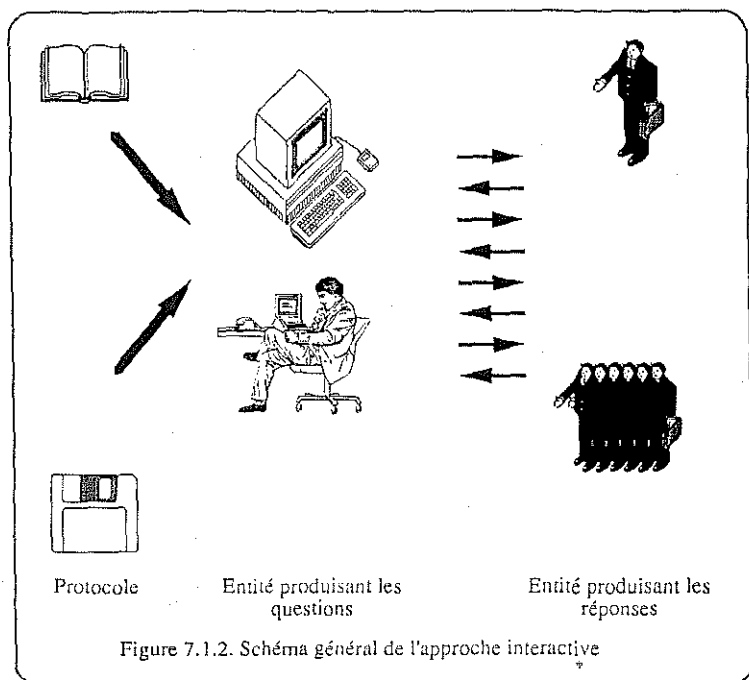


commandation en utilisant une méthode se rattachant à l'Approche Opérationnelle 3 du "jugement local interactif avec itérations essais-erreurs" ou, de façon plus concise, l'**approche interactive** est tout différent. Cette élaboration ne passe pas ici par l'utilisation d'une PAMC mais s'opère progressivement au cours d'un

dialogue au cours duquel un acteur (éventuellement plusieurs) du processus de décision, que nous appellerons, dans ce chapitre, l'**interrogé**, est amené à formuler une séquence de jugements ad hoc en réponse aux questions posées par un **interrogateur** pouvant être soit l'homme d'étude, soit, le plus souvent, un ordinateur. Dans ce dialogue, les jugements émis par l'interrogé contribuent à fixer le contenu et l'enchaînement des questions posées par l'interrogateur. La recommandation apparaît alors comme le produit d'une **interaction** entre ces deux acteurs. L'interrogateur n'établit donc pas une liste de questions pré-établies qu'il posera à l'interrogé. Avant le dialogue, il doit chercher à anticiper les diverses réactions possibles de l'interrogé et prévoir, dans chaque cas, comment poursuivre ce dialogue au mieux. L'interrogateur est donc amené à établir une stratégie fixant le contenu et le mode d'enchaînement des questions en fonction des réactions de l'interrogé. C'est ce qu'on appellera un **protocole d'interaction** (cf. figure 7.1.2). Celui-ci est propre à chaque méthode. Il constitue en quelque sorte une "règle du jeu" précisant un ensemble de "coups" possibles à un moment donné compte-tenu de l'historique de la "partie".

Précisons dès maintenant que tout dialogue régi par un protocole d'interaction ne débouche pas nécessairement sur une aide à la décision. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'interrogé découvre les réponses aux questions qu'il se posait, aidé et guidé par l'interrogateur. On verra, dans la suite de ce chapitre, comment certaines méthodes se proposent d'atteindre cet objectif. Il est cependant clair qu'une condition nécessaire de succès d'une méthode interactive réside dans la volonté de l'interrogé de s'engager dans un dialogue pouvant parfois être long et difficile. C'est pourquoi la plupart des protocoles d'interaction visent à établir le dialogue autour de **propositions** faites à l'interrogé dont on espère qu'elles ont pour lui une signification concrète claire.

Pour faciliter le dialogue, il semble important que le protocole d'interaction centré autour de ces propositions travaille, dans la mesure du possible, de façon :

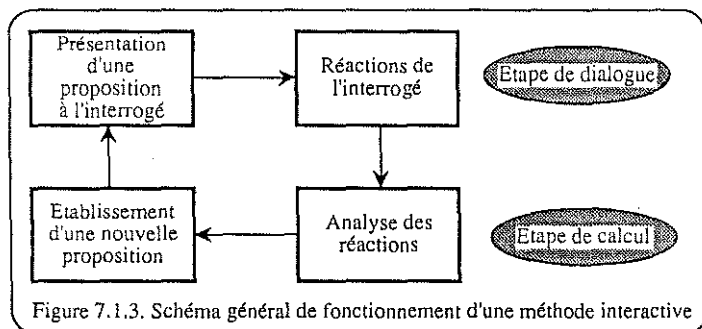


- **provisoire** en laissant à l'interrogé la possibilité de changer d'avis et de revenir sur des opinions précédemment émises ;
- **locale** en lui permettant de concentrer son attention sur un petit nombre d'actions qu'il paraît judicieux et pertinent de chercher à comparer parce qu'elles sont voisines.

On peut analyser plus finement le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur comme la succession de deux types d'étapes (cf. figure 7.1.3) :

- une **étape de dialogue** où l'interrogé réagit face à une proposition ;
- une **étape de calcul** (ou de traitement) où l'interrogateur tire parti des réactions de l'interrogé pour lui faire une nouvelle proposition.

Il est commode de distinguer, à l'intérieur de l'étape de dialogue :



– une **phase d'explication** (ou de sensibilisation) dont le but est de présenter, à l'interrogé, un certain nombre d'informations concernant la proposition qui lui est faite, la façon dont elle a été obtenue, les possibilités et les limites de l'ensemble A des actions potentielles, les conséquences de certains jugements qu'il a émis ou qu'il pourrait émettre, etc. ;

– une **phase d'interrogation** où sont recueillies les réactions de l'interrogé à la proposition qui lui a été faite, informations qui seront utilisées dans l'étape de calcul pour bâtir une nouvelle proposition.

Cette alternance d'étapes de calcul et d'étapes de dialogue prend alors fin :

– soit parce que l'interrogé s'estime satisfait de la proposition qui lui est faite ;

– soit parce que l'interrogé est lassé ou estime que la poursuite du dialogue ne lui apportera aucun élément de réflexion supplémentaire ;

– soit enfin parce que l'interrogateur est dans l'impossibilité de poursuivre le dialogue ou estime que sa poursuite est inutile.

Il est raisonnable de penser, compte tenu de ce qui précède, que le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur sera d'autant facilité que :

- les propositions qui sont faites à l'interrogé auront pour lui une signification concrète claire et qu'il disposera de toute information nécessaire pour porter un jugement à leur sujet,
- celui-ci sera en mesure d'exprimer ses réactions de la façon la plus souple et la plus naturelle possible,
- qu'il percevra clairement la logique sous-tendant le passage d'une proposition à une autre au cours du dialogue et, en particulier, qu'il aura l'impression que l'interrogateur a bien tiré parti de ses réactions et
- que le protocole d'interaction tolérera les hésitations, les retours en arrière, les raisonnements essai-erreur de l'interrogé.

Cependant, la "qualité" d'une méthode interactive est aussi fortement dépendante d'aspects liés à l'"ergonomie de la communication" entre l'interrogateur et l'interrogé, c'est-à-dire, souvent, à la façon dont le protocole d'interaction retenu aura été mis en œuvre dans un logiciel informatique. La façon de présenter l'information (tableau, schéma, discours), de formuler les questions, la rapidité de l'étape de calcul ¹, la possibilité d'obtenir des explications, etc. ont aussi une importance déterminante dans la conception d'une méthode interactive bien que ces aspects sortent du cadre du présent ouvrage. Tel protocole d'interaction en apparence simpliste et/ou inutilement contraignant pourra se révéler très efficace en raison de sa rapidité ou de ses qualités ergonomiques.

Cette façon de concevoir l'aide à la décision en renonçant à faire usage de PAMC au profit d'un dialogue géré par un protocole d'interaction travaillant de façon locale et provisoire appelle un certain nombre de remarques.

a) L'approche interactive ne se distingue pas de l'approche classique du seul fait qu'elle établit un dialogue entre deux entités. Dans une approche classique, la modélisation des informations inter-critères au sein d'une PAMC donnée implique aussi un dialogue entre l'homme d'étude et l'acteur pour qui

¹ cette exigence imposant parfois de n'utiliser certains protocoles d'interaction que couplés à une structure particulière de A et/ou des critères.

s'exerce l'aide à la décision. Mais ce dialogue vise, au contraire de ce qui est fait dans une approche interactive, à l'obtention d'une règle d'agrégation synthétique et définitive en ce sens qu'elle ne sera, éventuellement, remise en cause qu'après l'établissement d'une première recommandation. C'est donc non la présence d'un dialogue mais sa nature et sa finalité qui permettent de différencier les deux approches. Cette séparation n'est cependant pas toujours exempte d'ambiguïté. Comme on le verra au 7.2.1 et au 7.4, on peut en effet envisager de mettre en œuvre une méthode interactive autour de propositions prenant la forme de règles d'agrégation. On a alors affaire à des méthodes se situant au confluent des deux approches.

b) Les méthodes relevant de l'approche interactive ne font pas appel à des PAMC en ce sens qu'elles ne cherchent pas à établir de s.r.p. sur A à partir duquel (ou desquels) s'élaborerait une recommandation. Comme on le verra au 7.2, ces méthodes peuvent cependant parfois utiliser localement, pour analyser les réactions de l'interrogé et bâtir une nouvelle proposition, un procédé formellement identique à une des PAMC présentées aux chapitres 4 et 5. Il est important de noter que de tels procédés sont uniquement utilisés dans les méthodes interactives comme moyens d'investigation dans la phase de calcul. Les critères présidant à leur choix sont ici tout différents de ce qu'ils sont pour choisir une PAMC dans une approche classique. On verra ainsi que de nombreuses méthodes interactives utilisent localement une agrégation fondée sur une somme pondérée ou sur une distance à un point idéal (cf. 7.2 et 7.3), l'interaction venant alors corriger le caractère parfois trop artificiel d'une telle agrégation.

7.1.2 Sens et validité d'une méthode interactive - Le problème de la "convergence" ¹

On a dit que, dans une méthode interactive, l'aide à la décision est issue d'une interaction entre deux entités, l'interrogé et l'interrogateur. Pour mieux comprendre la nature de cette aide à la décision, il importe de s'interroger sur le sens qu'il convient

¹ Ce paragraphe est inspiré de Roy (1987).

de donner au produit final de l'interaction ou, en d'autres termes, ce vers quoi "converge" la succession d'étapes de dialogue et de calcul. Il paraît naturel de considérer que la signification de ce produit final dépendra à la fois du protocole d'interaction, de la manière dont l'interrogé aura réagi aux propositions faites et de l'événement ayant mis fin à l'interaction. Afin de cerner plus précisément cette signification, nous exploiterons dans ce paragraphe l'analogie, déjà signalée, entre un protocole d'interaction et une "règle du jeu" avant d'aborder directement le problème qui nous concerne.

Imaginons un "jeu" à deux joueurs dont le but est la découverte d'une histoire. Pour ce faire, le joueur 1 pose des questions au joueur 2. Considérons maintenant trois versions différentes de ce jeu.

a) Trois versions d'un même jeu

i) Version 1

Le joueur 2 compose une histoire de façon détaillée avant le début du jeu et s'interdit de la modifier dans le cours du jeu. Une partie consiste alors, pour le joueur 1, à deviner l'histoire composée par le joueur 2 en lui posant un certain nombre de questions auxquelles celui-ci répond par oui ou par non en conformité avec l'histoire imaginée avant le début du jeu.

Comme le souligne Dupuy ¹ (1982), *le déroulement du jeu est un processus d'interaction, en partie aléatoire, entre l'imagination du joueur et un certain récit qui, tout au long de la dynamique, aura toujours été déjà là (et n'aura pas été modifié par cette dynamique). Normalement, le processus converge plus ou moins rapidement, par tâtonnements, essais et erreurs, vers la découverte de l'histoire.*

¹ qui, dans un cadre n'ayant rien à voir avec l'aide à la décision, analyse les versions 1 et 2 du jeu.

ii) Version 2

Elle est identique à la version 1 pour le joueur 1 ainsi que pour tout observateur extérieur au jeu. La seule différence provient de ce que le joueur 2 n'a décidé d'aucune histoire. A la place, il a choisi une convention de réponses parfaitement arbitraire du type "répondre oui" si la question se termine par une voyelle, "non" si elle se termine par une consonne avec dérogation à cette règle lorsqu'elle induirait une réponse venant en contradiction flagrante avec certaines des réponses apportées aux questions antérieures.

Citons à nouveau Dupuy (1982) : *Le déroulement du jeu est ici un processus d'interaction aléatoire entre l'imagination du joueur 1 et le hasard sémantique des réponses, uniquement contraint par la cohérence de sens que le joueur prête au récit qu'il croit découvrir. Il arrive qu'une histoire bien constituée émerge de cette dynamique, et il est clair qu'il s'agit alors d'une pure création. Pour l'observateur intérieur qu'est de fait, ici, le joueur 1 ignorant de la véritable règle du jeu, tout se passe cependant comme si l'on était dans le cas précédent. Dans la version 1, l'éventail des histoires possibles se resserre entre le commencement du jeu et sa fin, pour se refermer sur un "ordre" qui a toujours été présent : l'histoire à découvrir. Dans la version 2, au contraire, le jeu se complexifie à mesure de son déroulement.*

iii) Version 3

Tout comme la version précédente, elle demeure identique à la version 1 pour le joueur 1 ainsi que pour tout observateur extérieur. Le joueur 2 ne s'est ici donné ni histoire, ni convention arbitraire destinées à dicter ses réponses oui ou non. Il répond maintenant, selon son tempérament : oui ou non selon le sens dans lequel il préfère infléchir l'histoire qui se fabrique dans le cadre de l'interaction. Il y a création tout comme dans la version 2 mais, contrairement à ce qui se passe dans cette dernière, cette création est orientée, conditionnée par la personnalité du joueur 2 tout en demeurant marquée par celle de l'autre joueur comme dans la version 2.

Il faut enfin souligner que, dans la version 3, le joueur 1 a le choix des questions qu'il formule. Les conclusions qu'il tire des réponses déjà apportées par le joueur 2 exercent donc une certaine action sur le comportement de ce dernier. Il stimule en effet, de façon privilégiée, tel ou tel de ses goûts, de ses motivations, mobilise son attention sur tel aspect plutôt que sur tel autre dans l'histoire qui se crée. Ce faisant, il influence ce qui, dans l'esprit du joueur 2, est à l'origine de la production des réponses. Rien de similaire ne se présente dans les versions 1 et 2 : l'histoire, comme la convention arbitraire, sont des formes présentes et fixes que la dynamique de l'interaction n'altère d'aucune sorte.

Chaque version de ce jeu peut s'interpréter comme un type possible d'interaction généré par une méthode relevant de A.O.3 selon les hypothèses faites quant à la manière dont l'interrogé (le joueur 2) répond aux questions de l'interrogateur (le joueur 1). On peut, de façon schématique, distinguer trois hypothèses correspondant aux trois versions du jeu envisagées.

b) Trois hypothèses sur le déroulement de l'interaction

i) Hypothèse 1

L'interrogé répond aux questions de l'interrogateur en conformité avec un système de préférences pré-existant qui n'est pas modifié par l'interaction. De même que dans la version 1 du jeu il était relativement naturel de supposer une certaine cohérence à l'histoire composée par le joueur 2 (même si tous ses détails n'étaient pas nécessairement complètement spécifiés), il est également naturel, dans le cadre de cette hypothèse, de considérer que le système de préférences de l'interrogé est suffisamment cohérent pour lui permettre de comparer diverses actions sans intransitivité ni incomparabilité. Cette hypothèse revient donc à considérer que tout se passe comme si l'interrogé répondait aux questions en se fondant sur une fonction d'agrégation $V(g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$ bien définie ayant la forme d'un critère unique de synthèse.

Dès lors qu'on accepte cette hypothèse, le sens (dans la double acception du terme, direction et signification) d'une

méthode interactive est clair. Pour être signifiante, elle doit **converger vers la découverte d'une réalité** qui était déjà là avant que l'interaction ne commence. Dans les cas qui nous intéressent, cette réalité est soit un optimum dans A, soit une règle de classement ou de tri. Toute interrogation sur la validité d'un protocole d'interaction vis-à-vis d'un contexte défini peut alors être formulée en termes de conditions auxquelles ce contexte doit satisfaire pour que la dynamique créée par le protocole converge vers ce qu'il faut découvrir ou aboutisse, à défaut, à un produit final qui en soit voisin.

Ces conditions ont trait :

- d'une part à la personnalité de l'interrogé qui doit être en mesure de comprendre correctement les questions ;
- d'autre part à la nature de la fonction d'agrégation sous-jacente (qui doit, par exemple, être concave ou quasi-concave ¹).

ii) Hypothèse 2

Dans cette hypothèse, on admet, tout comme dans la précédente, qu'il existe, chez l'interrogé, une forme présente et fixe qui pré-détermine toutes les réponses que celui-ci est susceptible d'apporter aux questions de l'interrogateur. On suppose en revanche que, de par sa nature, sa structure, cette forme n'agit plus à la manière d'une fonction d'agrégation : l'interrogé est mu par une autre logique, par une rationalité qui échappe à l'interrogateur ; cette logique agit à la manière de la convention arbitraire dans la version 2 du jeu.

Bien que cette hypothèse ne soit pas totalement dénuée de réalisme ², les chercheurs qui mettent au point un protocole d'interrogation ne l'envisagent pas volontiers comme hypothèse

¹ la nécessité d'introduire de telles conditions provenant du caractère local de la plupart des protocoles d'interaction.

² Pour des raisons tenant à un effet d'ancrage ou de halo, on peut ainsi envisager que les réponses de l'interrogé aux questions de l'interrogateur dépendent, de façon cruciale, de l'ordre et/ou de la formulation de celles-ci.

de travail. Dès lors que le comportement de l'interrogé relève intégralement de cette hypothèse, le sens de la dynamique apparaît lui aussi comme arbitraire et le produit final de l'interaction est donc souvent dénué de valeur pour l'aide à la décision.

iii) Hypothèse 3

Dans cette dernière hypothèse, tout comme dans la version 3 du jeu, il n'y a plus de forme présente et fixe capable de déterminer, à tout moment, la réponse de l'interrogé à une question de l'interrogateur de façon indépendante de ce qui s'est passé depuis le début de l'interaction jusqu'à ce que la question soit posée. On considère toujours que l'interrogé réagit en fonction de son tempérament propre, de son système de valeurs, ces dernières étant à l'origine de convictions qui structurent ses préférences. On ne regarde pas pour autant celles-ci comme complètement formées. On suppose qu'entre des lignes de force relativement intangibles se situent des zones d'interrogations, d'opinions fragiles, voire conflictuelles et contradictoires. On admet donc que la dynamique interactive que le protocole a pour fonction de gouverner peut contribuer, dans un sens ou dans un autre, à lever les interrogations, à trancher les conflits, à déplacer les contradictions, voire à déstabiliser certaines convictions. Dans cette hypothèse, le produit final de l'interaction apparaît comme "conditionnel" et "façonné" par le protocole, la nature des questions, la logique de leur enchaînement agissant sur les réponses de l'interrogé.

Dès lors qu'on se place dans le cadre de cette dernière hypothèse, parler de "convergence" n'a plus grand sens. En effet, ce vers quoi il faut converger ne pré-existe pas à l'interaction mais apparaît, pour une part, comme créé par elle. Le sens de l'interaction doit être recherché dans le fait que la méthode a pour fonction de provoquer, de stimuler l'interrogé afin qu'il structure, complète, stabilise ses préférences. Le produit final que la méthode lui permet d'explicitier apparaît alors comme issu d'un modèle satisfaisant de ces préférences qu'il vient de mettre à l'épreuve et de façonner.

Le produit final n'est pas ici "découvert" mais "construit" au cours d'un cheminement qui ne relève plus d'une convergence mais d'une création.

La réalité des situations d'aide à la décision correspond vraisemblablement à un mélange des trois hypothèses qui viennent d'être envisagées. Malheureusement, comme le montre bien l'analyse des trois versions du jeu présentées au a), ni l'interrogateur, ni un quelconque observateur extérieur ne peuvent démêler l'importance relative de chacune d'elles. Toutefois, il ne nous paraît pas insensé d'admettre que, en matière d'aide à la décision, face à des acteurs motivés¹ pour répondre aux questions posées par l'interrogateur, on puisse faire en sorte que la dose de l'hypothèse 2 dans le mélange lui confère un impact négligeable. Sauf cas assez particuliers, il ne nous paraît, en revanche, pas très raisonnable d'admettre qu'il en va de même avec l'hypothèse 3².

Quel est alors le sens du produit final de l'interaction et, plus généralement, d'une méthode interactive si l'on admet l'hypothèse 3 ? Même si la notion classique de convergence n'a ici plus de sens, il apparaît souhaitable que le cheminement que fait suivre à l'interrogé une méthode interactive ne soit pas quelconque. Vincke (1986) parle à ce propos de "**convergence psychologique**". Celle-ci se produira lorsque le protocole aura suffisamment stimulé l'interrogé tout en lui laissant de nombreuses possibilités d'exploration, de retour en arrière pour lui permettre de façonner, en toute liberté, ses zones d'interrogation, de conflit et de contradiction et ainsi se forger une conviction qu'il estimera suffisamment bien étayée par le dialogue auquel il aura participé.

¹ Nous nous bornons ici au cas d'acteurs désireux de coopérer et doués d'une culture garantissant une bonne compréhension des questions posées par l'interrogateur. Faisons observer que, lorsqu'on s'écarte d'une situation véritable d'aide à la décision, par exemple lorsqu'on procède à une expérimentation, la première de ces conditions n'est pas facile à remplir et la part de l'hypothèse 2 peut ne plus être négligeable.

² Le lecteur notera que les hypothèses 1 et 3 recouvrent plus ou moins ce que nous avons appelé les démarches descriptives et constructives d'aide à la décision (cf. 1.7).

Pour illustrer la différence entre la notion classique de convergence et cette idée de "convergence psychologique", mentionnons que cette dernière n'exclut pas de présenter à l'interrogé plusieurs fois la même proposition. Il ne s'agira pas là d'un "bouclage" en ce sens que, l'interrogé ayant acquis de l'information au cours du dialogue (et donc, éventuellement, approfondi sa perception du problème et/ou modifié ses convictions antérieures), pourra réagir de manière différente à la présentation de la même proposition.

Mentionnons enfin que parler de "convergence psychologique" n'exclut pas de s'intéresser à certaines propriétés algorithmiques d'un protocole d'interaction. Même si l'on pense, dans une situation donnée, que l'hypothèse 3 est la plus crédible, il serait sûrement hasardeux de chercher à travailler avec un protocole en P_α qui, au bout d'un certain nombre d'itérations, ne proposerait pas à un interrogé répondant aux questions en fonction d'un préordre complet pré-existant sur A , une des actions de rang 0 de ce préordre. L'idée de "convergence psychologique" n'exclut donc pas celle de convergence au sens classique. Elle l'englobe pour prendre en compte toutes les situations débordant du cadre, peu réaliste, de l'hypothèse 1.

7.1.3 Portée et limites des méthodes interactives

La souplesse de l'approche interactive par rapport à l'approche classique, les récents progrès des matériels informatiques et du génie logiciel ainsi que l'émergence du concept de Système Interactif d'Aide à la Décision (SIAD) pourraient laisser croire que les méthodes interactives sont destinées à supplanter, dans un proche avenir, les autres méthodes abordées dans cet ouvrage. Même si l'on peut anticiper un développement important de ces méthodes, nous pensons qu'il n'en ira pas ainsi. Elles présentent en effet des caractéristiques les rendant mal adaptées à certaines situations.

On a vu, au 7.1.1, que la plupart des protocoles d'interaction promouvaient un raisonnement local pour faciliter le dialogue. Mais une telle façon de faire ne trouve sa pleine application que dans les cas où le nombre d'actions potentielles est suffisamment élevé. De fait, la plupart des méthodes que nous passerons en

revue dans ce chapitre ont été conçues pour s'appliquer au cas de la "programmation mathématique multicritère" où l'ensemble A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes pesant sur des variables de décision continues.

Dans une méthode interactive, c'est de la dynamique de l'interaction qu'est issue l'aide à la décision. Ces méthodes visent donc principalement à permettre à une seule personne de se forger une conviction, ne fournissant généralement pas un "modèle" permettant d'argumenter et de justifier simplement cette conviction vis-à-vis d'autres acteurs. Elles sont donc souvent mal adaptées dans les cas, nombreux, où l'outil multicritère est utilisé pour fournir une base de discussion dans un processus de décision complexe et conflictuel ¹.

Enfin, comme on le verra au 7.2.1, la conception de méthodes interactives dans une problématique autre que P. α ne va pas sans soulever de problèmes.

Sans chercher à restreindre indûment la portée des méthodes interactives, on peut, schématiquement, caractériser leur domaine privilégié d'application à des situations :

- où le nombre d'actions potentielles est élevé,
- "individuelles", c'est-à-dire concernant principalement un seul acteur et
- relevant de la problématique du choix P. α .

On notera enfin que ces méthodes n'ont fait l'objet que de peu d'applications à des problèmes réels. Celles-ci concernent le plus souvent des problèmes assez différents de ceux ayant été traités en utilisant des méthodes relevant de l'approche classique ².

¹ Cf. MMCAD, 10.2.

² Voir la bibliographie de cas d'application en fin d'ouvrage. On pourra également consulter Steuer (1986, chap. 16), Vanderpooten (1990) et White (1990).

7.2 STRUCTURE GÉNÉRALE DES MÉTHODES INTERACTIVES

7.2.1 Schéma général d'interaction dans les diverses problématiques

La plupart des méthodes interactives connues à ce jour visent à répondre à une problématique ¹ du choix ($P.\alpha$). Il ne faut pas voir là seulement un héritage de la culture traditionnelle de la Recherche Opérationnelle. Comme le fait remarquer Vanderpooten (1987 et 1990), c'est aussi la nature même de l'approche interactive qui est à l'origine de cette pré-éminence de $P.\alpha$. Les méthodes relevant de cette approche structurent le dialogue entre l'interrogé et l'interrogateur autour de "propositions" faites à l'interrogé qui sont conçues de manière "locale", c'est-à-dire bâties sur la base d'un sous-ensemble restreint de A . Rien n'a été dit jusqu'à présent sur la nature de ces propositions en-dehors du fait qu'elles devaient avoir une signification concrète claire pour l'interrogé. Elle s'impose naturellement dans une problématique du choix. A chaque étape du dialogue, l'interrogateur présentera à l'interrogé une ou un petit nombre d'actions potentielles candidates au choix sur lesquelles ce dernier sera invité à réagir. De ce fait, dans une méthode interactive en $P.\alpha$, toute proposition peut s'interpréter comme une recommandation possible.

Il est facile de constater que la situation est toute différente avec la problématique du tri $P.\beta$ ou la problématique du rangement $P.\gamma$. Pour que toute proposition puisse s'interpréter comme une recommandation, il faudrait que ces propositions se présentent (en supposant un nombre fini d'actions potentielles) sous la forme d'une affectation de l'ensemble des actions de A ou d'une modification à une affectation ou un rangement antérieur. Remettre ainsi en cause le caractère local du dialogue imposerait un effort cognitif extraordinaire à l'interrogé pour lui permettre de réagir à de telles propositions. On pourrait également envisager que chaque proposition se présente sous la forme d'une affectation ou d'un rangement d'un sous-ensemble de A . Un tel procédé

¹ Sur la définition des diverses problématiques, cf. 1.3 et 6.1.

permettrait de préserver le caractère local du dialogue. Cependant, il est loin d'être aisé ¹ de synthétiser des affectations ou, plus encore, des rangements sur divers sous-ensembles de A pour parvenir à une recommandation, c'est-à-dire une affectation ou un rangement des actions de A.

Si l'on veut concevoir une méthode interactive en $P.\beta$ ou $P.\gamma$, il paraît donc plus judicieux et réaliste de renoncer à ce que toute proposition s'interprète comme une recommandation et de faire porter le dialogue sur des règles d'affectation ou de rangement. Il est clair que de telles propositions ont un degré de complexité sans commune mesure avec celles utilisées en $P.\alpha$. On verra cependant, au 7.4, qu'il est possible, moyennant certaines précautions et, en particulier, en illustrant chaque règle proposée sur un sous-ensemble de A judicieusement choisi, de concevoir des protocoles d'interaction de ce type. On peut alors réinterpréter une méthode interactive en $P.\beta$ ou $P.\gamma$ utilisant un tel protocole comme une méthode interactive en $P.\alpha$ où les actions potentielles se présentent sous la forme de règles d'affectation ou de rangement. Pour passer du produit final de l'interaction à une recommandation, il faut alors appliquer la règle d'affectation ou de rangement issue de ce produit final à tout ou partie de l'ensemble A. Il est donc possible d'analyser la spécificité de l'approche interactive en se limitant au cadre de la problématique du choix. C'est ce que nous ferons dans la suite de cette section.

En reprenant le schéma général présenté à la figure 7.1.3, on peut résumer le déroulement de la plupart des méthodes interactives en $P.\alpha$ par une alternance d'étapes de calcul et de dialogue se présentant comme suit ² :

¹ Sur ces difficultés, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 2).

² dans le cas où chaque proposition se compose d'une telle action. Il est aisé de modifier ce schéma pour prendre en compte le cas où plusieurs actions potentielles sont présentées à chaque itération. Lors de la première étape de calcul, la construction de la proposition s'effectue compte tenu d'informations qui auront été spécifiées lors de l'initialisation de la procédure.

Etape de calcul

Construction de la proposition courante compte tenu des informations obtenues lors des étapes de dialogue précédentes.

Etape de dialogue

Phase d'explication

Présentation de la proposition courante ainsi que de toute information s'y rattachant.

Phase d'interrogation

La proposition est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin de la procédure ou stockage de la proposition courante et ré-initialisation de la méthode sur de nouvelles bases.

Sinon

Poursuite de l'interrogation, l'interrogé étant invité à expliciter les raisons de son insatisfaction. Interprétation des réponses fournies par l'interrogé.

Fin Si

Retour à l'étape de calcul.

On voit donc que les diverses méthodes interactives vont principalement se différencier, d'un point de vue technique, par :

- la manière dont on demande à l'interrogé de réagir à la proposition courante,
- la manière dont on interprète ces réactions,
- la manière dont on construit la proposition courante.

Ces trois points recouvrent en fait de nombreuses options qui seront étudiées en détail dans les deux paragraphes suivants ¹. Auparavant, nous introduirons quelques concepts et notations utiles pour éclairer ces questions.

On a vu que la plupart des méthodes interactives nécessitent de travailler sur un ensemble riche d'actions potentielles. Il est

¹ Le lecteur peu familier avec les méthodes interactives pourra, avec profit, prendre connaissance de quelques unes des méthodes présentées au 7.3 avant d'aborder les trois derniers paragraphes du 7.2.

fréquent, dans ce cas, que chaque action potentielle ne soit connue qu'au travers de son vecteur de performances $\underline{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$. Il est donc parfois utile de travailler non sur A lui-même mais sur son image dans l'espace des critères $\underline{g}(A) = \{(\underline{g}_1(a), \underline{g}_2(a), \dots, \underline{g}_n(a)) : a \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Afin de mieux cerner les limites de $\underline{g}(A)$, il est commode d'avoir une idée de la meilleure et de la pire performance possible sur chacun des critères considérés isolément. On notera respectivement $\underline{a}_i$ et $\bar{a}_i$ l'action de A ayant la pire (resp. la meilleure) performance sur le critère g_i , c'est-à-dire ¹ :

$$g_i(\underline{a}_i) = \min_{a \in A} g_i(a) \text{ et } g_i(\bar{a}_i) = \max_{a \in A} g_i(a).$$

Dans l'espace des critères, on notera :

$$g_{i*} = g_i(\underline{a}_i) \text{ et } g_i^* = g_i(\bar{a}_i).$$

Les vecteurs de performances $\underline{g}^* = (g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*)$ et $\underline{g}_* = (g_{1*}, g_{2*}, \dots, g_{n*})$ sont respectivement appelés **point idéal** et **point anti-idéal** de A . Il est clair que, en général, ni $\underline{g}^*$ ni $\underline{g}_*$ ne sont éléments de $\underline{g}(A)$ (cf. figure 7.2.1 a). Lorsque l'on s'intéressera à un sous-ensemble d'actions $B \subset A$, on notera $\underline{g}^*[B]$ et $\underline{g}_*[B]$ les vecteurs correspondant respectivement au point idéal et au point anti-idéal de B .

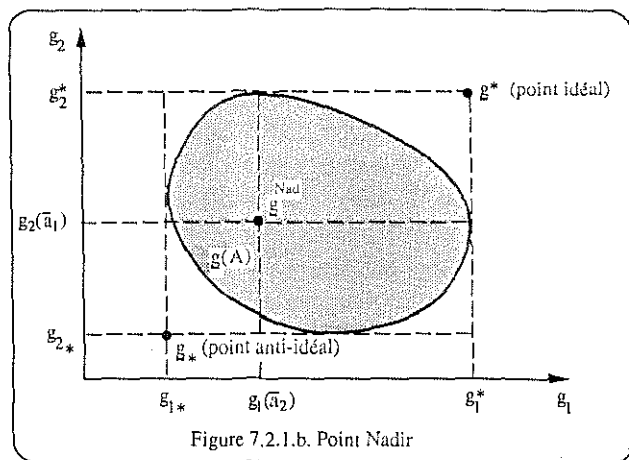
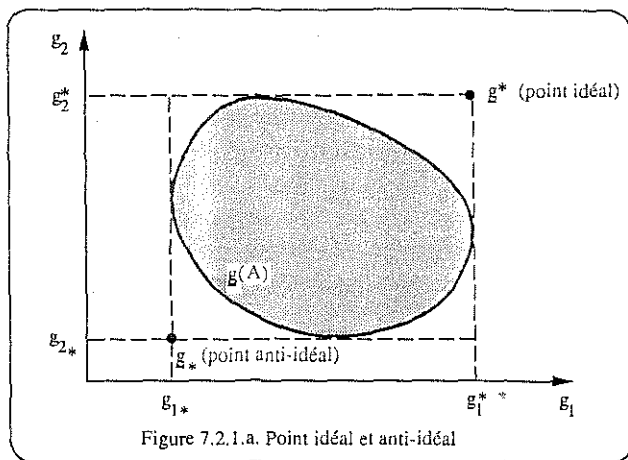
Pour mieux comprendre ce à quoi conduit l'optimisation de chaque critère considéré isolément, on est souvent amené à construire le "**tableau de gains**" ² de A , c'est-à-dire un tableau

¹ Dans les problèmes réels, il n'est pas restrictif de supposer que de telles actions existent et que leurs performances sont finies.

² traduction française de "pay-off table". Cette définition demanderait, en toute rigueur, à être complétée pour traiter le cas où plusieurs actions de A permettraient d'atteindre simultanément les meilleures performances sur un critère donné. En pratique, retenir l'une ou l'autre de ces actions est sans grande importance. On pourra par exemple choisir d'optimiser un second critère pour bâtir le tableau des gains dans de telles situations.

faisant apparaître les performances de $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ (cf. figure 7.2.2).

Le vecteur $\underline{g}^{\text{Nad}} = (g_1^{\text{Nad}}, g_2^{\text{Nad}}, \dots, g_n^{\text{Nad}})$ tel que $g_i^{\text{Nad}} = \min_{j \in F} g_i(\bar{a}_j)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ est appelé **point nadir**¹ de A (cf. figure 7.2.1 b).



¹ La valeur de $\underline{g}^{\text{Nad}}$ dépend du choix du tableau des gains. Sur le choix du tableau de gains et sur la définition de $\underline{g}^{\text{Nad}}$, on pourra se reporter à Steuer et Gardiner (1990).

Figure 7.2.2 : Tableau des gains

	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
$\bar{a}_1$	g_1^*	$g_2(\bar{a}_1)$	...	$g_j(\bar{a}_1)$	...	$g_n(\bar{a}_1)$
$\bar{a}_2$	$g_1(\bar{a}_2)$	g_2^*	...	$g_j(\bar{a}_2)$	...	$g_n(\bar{a}_2)$
...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_j$	$g_1(\bar{a}_j)$	$g_2(\bar{a}_j)$	...	g_j^*	...	$g_n(\bar{a}_j)$
...	...	...	...	...	...	...
$\bar{a}_n$	$g_1(\bar{a}_n)$	$g_2(\bar{a}_n)$	...	$g_j(\bar{a}_n)$	...	g_n^*

Rappelons que la relation de dominance sur A est définie par (cf. 1.7) :

$$b \Delta_F a \Leftrightarrow g_i(b) \geq g_i(a), \forall i \in F.$$

On dira qu'une action $a \in B$ est efficace dans $B \subset A$ s'il n'existe pas d'action $b \in B$ telle que $b \Delta_F a$ et $\text{Non}(a \Delta_F b)$. On notera $\text{Eff}(B)$ l'ensemble des actions efficaces dans B . Dans l'espace des critères, un vecteur de performances $\underline{g} \in \underline{g}(B)$ sera dit efficace s'il est l'image, dans l'espace des critères, d'une action de $\text{Eff}(B)$, c'est-à-dire si (cf. figure 7.2.3) :

$$\forall \underline{g}' \in \underline{g}(B) \text{ tel que } \underline{g}' \neq \underline{g}, \exists i \in F \text{ tel que } g_i > g'_i.$$

7.2.2 L'étape de dialogue

Le but de toute étape de dialogue est double. Il s'agit d'une part de présenter une proposition à l'interrogé de la manière la plus informative et la plus motivante possible ; c'est la phase d'explication. D'autre part, il faut demander à l'interrogé de réagir face à cette proposition et interpréter ses réactions ; c'est la phase d'interrogation.

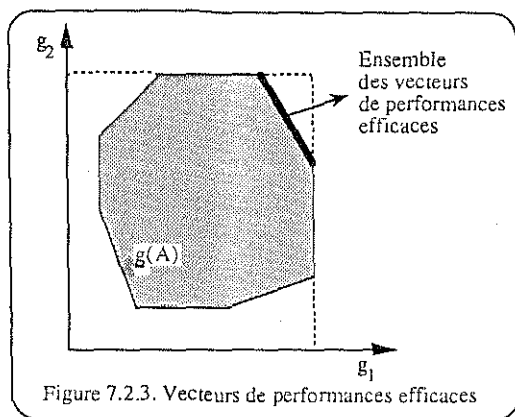


Figure 7.2.3. Vecteurs de performances efficaces

7.2.2.1 La phase d'explication

Cette phase vise à fournir à l'interrogé toute information nécessaire pour le motiver à poursuivre le dialogue et lui permettre de mieux percevoir la proposition qui lui a été faite. Il est clair que la qualité de cette phase dépendra, de façon importante, de la manière dont le protocole d'interaction aura été mis en œuvre. Il paraît bon que les explications permettent à l'interrogé :

a) De prendre conscience des possibilités et limites de l'ensemble A ou de la partie de A sur laquelle les itérations précédentes auront conduit à travailler. Les concepts de point idéal, anti-idéal et de tableau des gains qui ont été présentés au 7.2.1 peuvent être utiles à cet égard.

b) De comprendre un certain nombre de concepts, en particulier celui d'efficacité. Comme on le verra au 7.2.3 et au 7.3, la plupart des méthodes interactives en P.α ne proposent à l'interrogé de réagir que sur des actions efficaces. Il est alors important de faire en sorte que l'interrogé réalise qu'il n'est pas possible, à moins de faire évoluer A, de trouver une action potentielle améliorant, sur tous les critères, les performances d'une action efficace et que, améliorer certaines performances, impliquera nécessairement que d'autres se dégradent.

c) De "visualiser" au mieux les propositions qui lui sont faites. Ce dernier point est particulièrement important dans le cas

où A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes. Il pourra, de plus, être intéressant de permettre à l'interrogé d'explorer un voisinage de l'action (ou des actions) qui lui seront proposées.

7.2.2.2 La phase d'interrogation

La phase d'interrogation consiste tout d'abord à obtenir de l'interrogé une réaction face à la proposition qui lui a été présentée dans la phase d'explication. Dans la plupart des méthodes interactives en P. α (STEM, méthode du point de mire évolutif, méthode du point de référence, etc., cf. 7.3), cette proposition est une action de A. Dans d'autres méthodes (Geoffrion-Dyer-Feinberg, Steuer et Choo, Korhonen et Laasko, etc., cf. 7.3), on présente simultanément plusieurs actions. Comme indiqué au 7.2.1, il s'agira tout d'abord de chercher à savoir si l'interrogé trouve, dans la proposition qui lui est faite, une réponse aux questions qu'il se posait et estime l'action (ou une des actions) proposée satisfaisante. Si tel est le cas, précisons que le protocole d'interaction peut prévoir de ne pas arrêter là le dialogue. On pourra par exemple chercher à explorer un voisinage¹ de l'action jugée satisfaisante ou redémarrer le dialogue sur de nouvelles bases pour explorer plus complètement A et/ou tester la robustesse de ce à quoi le cheminement précédent a conduit afin de rechercher s'il n'existe pas des actions très différentes de celles trouvées qui pourraient également être satisfaisantes.

Il faut noter que si la question qui est posée à ce niveau peut se formuler simplement ("l'action (ou une des actions) proposée vous paraît-elle satisfaisante ?"), on ne doit pas sous-estimer la difficulté qu'elle présente. Cette difficulté sera d'autant diminuée que la phase d'explication aura été bien menée.

Dans le cas où la proposition courante est jugée insatisfaisante, il convient de chercher à poursuivre le dialogue pour tenter de cerner ce qui est la cause de cette insatisfaction et ainsi permettre à l'interrogateur de rassembler suffisamment d'informations pour

¹ au sens d'une topologie propre à chaque méthode.

bâtir ultérieurement une proposition ayant de "meilleures chances" d'être jugée satisfaisante. Pour cela, bien des façons de faire sont envisageables. Nous en présentons quelques unes ci-après.

Dans le cas où les propositions ne font intervenir qu'une seule action, on pourra :

a) faire comparer à l'interrogé la proposition courante avec une ou plusieurs des propositions présentées précédemment,

b) faire comparer la proposition courante avec quelques actions qui lui sont proches ou même

c) faire expliciter des taux de substitution au voisinage de cette proposition,

d) demander à l'interrogé sur quels critères les performances de la proposition courante sont jugées insatisfaisantes et éventuellement

e) demander à l'interrogé de combien il souhaiterait voir augmenter les performances sur certains critères,

f) demander à l'interrogé sur quel(s) critère(s) il serait prêt à diminuer les performances de la proposition courante en vue de les augmenter sur d'autres critères et, éventuellement,

g) demander à l'interrogé combien il serait prêt à concéder sur certains critères,

h) demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères, des niveaux minimaux en-deçà desquels il jugerait toute proposition insatisfaisante,

i) demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères, des niveaux au-delà desquels il juge sans grand intérêt d'améliorer les performances,

j) demander à l'interrogé de spécifier un vecteur de performances qui le satisferait,

k) demander à l'interrogé s'il souhaite faire évoluer la définition de l'ensemble A (mise en question de certaines contraintes, quête de nouvelles actions, ...).

Dans le cas où les propositions se présentent sous la forme d'un sous-ensemble d'actions, on pourra de plus :

l) demander à l'interrogé d'indiquer l'action qu'il préfère ou

m) demander à l'interrogé de ranger les actions en un préordre complet ou partiel.

Précisons tout de suite que cette liste, si elle recouvre à peu près ce qui est fait dans la plupart des méthodes, ne prétend nullement épuiser toutes les façons envisageables de demander à l'interrogé d'explicitier son insatisfaction. Notons également que ces diverses façons de faire ne sont pas exclusives.

La nature de l'information demandée varie beaucoup avec les divers procédés présentés. Certaines questions (d), f)) appellent une réponse purement qualitative. Dans d'autres (a), b), l), m)), on demandera à l'interrogé d'effectuer des comparaisons par paires ou de donner un classement. Enfin, certaines appellent une réponse en termes numériques (c), e), g), h), i), j)). Si l'on peut penser, a priori, que la difficulté de la question varie avec le type d'information demandée, il ne faut pas oublier qu'une question "difficile" n'est pas nécessairement à exclure pourvu que la façon d'exploiter la réponse et la suite du déroulement de l'interaction tolèrent les réponses imprécises, ambiguës et les retours en arrière. Il est de plus possible de faire évoluer le type de questions posées à mesure du déroulement de l'interaction, par exemple en laissant à l'interrogé la possibilité de fournir une information plus "riche" après une première phase d'apprentissage.

On n'abordera qu'au paragraphe suivant la façon de tirer parti des réponses de l'interrogé. Celle-ci est en effet fortement dépendante de la technique utilisée pour construire les propositions lors de l'étape de calcul.

Au 7.2.4, on présentera une méthode interactive élémentaire en $P.\alpha$ dont la phase d'interrogation consiste, après avoir présenté une action à l'interrogé, à lui demander si cette action est satisfaisante. En cas d'insatisfaction, l'interrogateur demande à l'interrogé sur quel(s) critère(s) les performances de l'action présentées sont jugées insatisfaisantes (question de type d)). Cet ensemble de critères à l'itération k sera noté $J_k \subset F$.

7.2.3 L'étape de calcul

Le rôle de l'étape de calcul dans une méthode interactive est de construire une proposition compte-tenu de l'information obtenue lors des étapes de dialogue précédentes et de fournir toute information utile s'y rapportant. On se limitera ici au cas où les propositions consistent en une seule action de A, les méthodes proposant des sous-ensembles de A ne faisant généralement que répéter le procédé que nous allons décrire.

On peut, de façon schématique, découper l'étape de calcul en deux phases distinctes (cf. Vanderpooten (1989a)) :

- une première phase visant à délimiter un sous-ensemble de A à l'intérieur duquel on recherchera une proposition ;
- une seconde phase consistant à choisir une action parmi ce sous-ensemble.

Ces deux phases prendront appui sur une certaine façon de modéliser l'information fournie par l'interrogé dans les étapes de dialogue précédentes.

Plus précisément, chaque méthode fait appel à un certain nombre de "paramètres" dans l'étape de calcul, la valeur de ces paramètres étant "mise à jour" à la fin de chaque étape de dialogue. On notera Θ l'ensemble de toutes les valeurs possibles de ces paramètres. Deux types de paramètres sont classiquement utilisés de façon non exclusive :

- un vecteur $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de coefficients d'importance visant provisoirement à cerner l'importance relative des divers critères ;

- des vecteurs de performances (correspondant ou non à des actions potentielles) ayant une signification particulière comme :

- . des **niveaux d'exigence minimale** sur certains critères $\underline{g}^{\text{Min}}$
 $= (g_1^{\text{Min}}, g_2^{\text{Min}}, \dots, g_n^{\text{Min}})$,

- . des **niveaux de référence** indiquant des profils jugés satisfaisants $\underline{g}^{\text{Ref}} = (g_1^{\text{Ref}}, g_2^{\text{Ref}}, \dots, g_n^{\text{Ref}})$.

Le type de paramètres utilisés et la façon de les mettre à jour dépendent du questionnement utilisé dans la phase d'interrogation. Certaines des questions présentées au 7.2.2.2 invitent naturellement à faire usage d'un certain type de paramètres :

- niveaux minimaux sur certains critères (d), e), i)),
- niveaux de référence sur certains critères (j)).

Pour d'autres, l'interprétation est moins simple. Par exemple (question a)), si l'on fait comparer la proposition courante a_k avec la proposition précédente a_{k-1} , on pourra, si a_k est jugée préférable à a_{k-1} , chercher à déterminer un jeu (ou un ensemble de jeux) de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ qui, dans une règle d'agrégation donnée (somme pondérée par exemple), est compatible avec cette préférence. On verra en détail, au 7.3, comment diverses méthodes mettent à jour les paramètres qu'elles utilisent.

Précisons dès maintenant qu'un point crucial dans la mise à jour de ces paramètres réside dans la "mémoire" que l'on veut donner au protocole d'interaction. On pourra soit :

- ne prendre en compte que l'information la plus récente,
- prendre en compte toute l'information depuis le début de l'interaction ¹ ou encore
- ne prendre en compte que l'information issue des r étapes précédentes ².

Nous reviendrons sur ce point au 7.2.4 et au 7.3. Mentionnons dès maintenant que si donner une mémoire longue à un protocole permet généralement d'assurer une certaine cohérence entre les propositions présentées successivement et de réduire le nombre d'itérations, les possibilités d'apprentissage via des processus essais-erreurs en sont réduites d'autant (sur l'ensemble de ces points, on pourra se reporter à Vanderpooten (1989b)).

¹ Une telle façon de faire n'est possible que si l'on suppose une certaine cohérence dans les informations fournies depuis le début de l'interaction.

² le nombre r pouvant évoluer à mesure du déroulement de l'interaction.

La première phase de la $k^{\text{ième}}$ étape de calcul vise à déterminer un sous-ensemble $A_k \subset A$ dont on a de bonnes raisons de penser, à ce stade de l'interaction, qu'il contient une action qui sera jugée satisfaisante ou meilleure que la proposition précédente. Dans certaines méthodes (méthode du point de référence, cf. 7.3), cette première phase est inexistante et on a $A_k = A$ à chaque itération k . Les caractérisations les plus courantes de A_k sont les suivantes (cf. Vanderpooten (1989 a)) :

- A_k est déterminé en ne retenant que les actions dont le profil domine un profil minimal $\underline{g}^{\text{Min}}$;
- A_k est déterminé en ne retenant que les actions n'étant "pas trop éloignées" d'un profil de référence $\underline{g}^{\text{Ref}}$;
- A_k est déterminé comme un voisinage de la proposition précédente a_{k-1} .

Comme on le verra, la proposition qui sera faite à l'interrogé lors de la $k^{\text{ième}}$ étape de dialogue correspondra à une action $a_k \in \text{Eff}(A_k)$, c'est-à-dire à une action efficace dans A_k . Si l'on ne souhaite pas faire une proposition à l'interrogé correspondant à une action dominée dans A , il convient donc de caractériser l'ensemble A_k de manière à ce que $\text{Eff}(A_k) \subset \text{Eff}(A)$, c'est-à-dire à ce que les actions efficaces dans A_k soient aussi efficaces dans A .

Il est facile de montrer qu'il en va toujours ainsi lorsque A_k est déterminé en ne retenant les actions dont le profil domine un profil minimal. Moyennant certaines précautions¹ sur la métrique utilisée, il en va de même dans les deux autres cas.

Bâtir un protocole avec mémoire revient à supposer que $A_k \subset A_{k-1}$ à chaque itération k ou pour certaines itérations k . Dans un protocole sans mémoire, on aura simplement A_k indépendant de A_h pour $h < k$.

Précisons enfin, à propos de cette première phase, que tout protocole d'interaction se doit de gérer les cas où l'application

¹ Voir à ce sujet Vanderpooten (1990, chapitre 7).

d'une des techniques précédentes conduirait à $A_k = \emptyset$. Une telle situation est fréquente lorsque, dans l'étape du dialogue, l'interrogé aura spécifié des augmentations de performances sur certains critères définissant des niveaux minimaux à atteindre. Dans ce cas, le protocole pourra, par exemple, prévoir d'avertir l'interrogé qu'il n'est pas possible (avec la définition actuelle de A) de satisfaire aux exigences qu'il formule et l'inviter soit à revoir ses exigences à la baisse, soit à modifier A par une question de type k). Une autre façon de faire consiste à continuer l'étape de calcul en ignorant certaines contraintes (souvent les plus anciennes) dans la définition de A_k . L'occurrence d'une telle situation ne doit pas être considérée comme un "accident" dans l'interaction. Elle contribue au contraire à faire percevoir clairement à l'interrogé les limites de A .

La méthode élémentaire que nous présenterons au 7.2.4 définira, à l'itération k , la zone d'intérêt A_k en éliminant de A les actions ayant une performance moindre que celle de la proposition jugée insatisfaisante sur les critères de J_k (c'est-à-dire sur les critères dont l'interrogé aura spécifié qu'ils étaient à l'origine de cette insatisfaction).

Une fois l'ensemble A_k délimité, la phase suivante de l'étape de calcul consiste à choisir, dans cet ensemble, une action qui constituera la nouvelle proposition faite à l'interrogé. Il semble raisonnable, dans une méthode interactive en P.α, d'imposer que ce choix satisfasse aux deux exigences suivantes ¹.

Exigence 1 : L'étape de calcul conduit toujours à proposer une action $a \in \text{Eff}(A_k)$.

Exigence 2 : L'étape de calcul peut conduire à proposer toute action de $\text{Eff}(A_k)$.

La nécessité de l'exigence 1 tient au fait que, l'interrogé pouvant à tout moment se déclarer satisfait de la proposition courante, il importe de s'assurer que la méthode ne conduise pas

¹ Pour plus de détails, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 7).

à faire une proposition dominée, rien n'empêchant une telle proposition d'être jugée satisfaisante (problème des "brillants seconds"). L'exigence 2 vise à empêcher que certaines actions efficaces de A_k ne puissent jamais être proposées, ce qui semble raisonnable puisque toute action efficace de A_k (et donc, en général, de A) peut constituer une proposition satisfaisante.

Dans la plupart des méthodes interactives, le choix d'une action de A_k s'opère en optimisant ¹ sur A_k une fonction à valeurs réelles. Une telle fonction est connue, dans la littérature anglo-saxonne, sous le nom de "scalarizing function". Elle peut s'interpréter formellement comme une PAMC permettant d'établir, sur A_k , un s.r.p. (P, I) ayant une structure de préordre complet. Mais, comme on l'a dit au 7.1.1 b), cette analogie s'arrête au niveau formel. Nous appellerons ici une telle fonction une **fonction d'agrégation temporaire**. Dans une méthode interactive, il ne s'agit pas de modéliser des préférences globales sur A_k mais de disposer d'un moyen simple et efficace de choisir une action de A_k dont on peut penser qu'elle a de bonnes chances d'être jugée satisfaisante. Le choix d'une telle fonction doit se raisonner en tenant compte :

- du temps de calcul nécessaire pour réaliser l'optimisation désirée sur A_k ;
- de la capacité de cette fonction à intégrer l'information déjà recueillie dans les étapes de dialogue précédentes ;
- du respect des deux exigences présentées ci-dessus ².

Formellement, une fonction d'agrégation temporaire peut donc se représenter comme une fonction :

$$s : A \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, P) \mapsto s(a, P)$$

¹ le protocole d'interaction devant gérer les cas où cette optimisation conduirait à des solutions multiples.

² Ce dernier point entre en conflit avec la rapidité de l'étape de calcul, le respect simultané des deux exigences imposant souvent de réaliser de coûteuses optimisations auxiliaires. A ce sujet, voir Wierzbicki (1980, 1986).

où Θ représente l'ensemble de toutes les valeurs possibles des paramètres préférentiels utilisés.

Une fonction d'agrégation temporaire simple et économique en termes de calcul est la somme pondérée :

$$s(a, \underline{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot g_i(a). \quad (r.7.2.1)$$

Soit a^* une solution optimale du problème :

$$\text{Max}_{a \in B} \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot g_i(a) \quad (P1)$$

où B est un sous-ensemble de A .

Il est facile de montrer que si $\lambda_i > 0, \forall i \in F$, alors $a^* \in \text{Eff}(B)$. La somme pondérée vérifie donc l'exigence 1.

L'exemple du tableau 7.2.1 permet de constater qu'elle ne satisfait pas, en général, l'exigence 2.

Tableau 7.2.1 : Exemple numérique

$$B = \{a, b, c\}, F = \{g_1, g_2\}$$

	g_1	g_2
a	1	5
b	2	2
c	5	1

Dans cet exemple, l'ensemble $\text{Eff}(B)$ des actions efficaces dans B n'est autre que l'ensemble B lui-même. Comme on pourra aisément le constater à la figure 7.2.4, il est cependant impossible, pour tout jeu de coefficients positifs λ_1, λ_2 , que b puisse être obtenue comme la solution du problème (P1). L'exigence 2 n'est

vérifiée avec (r.7.2.1) que moyennant certaines hypothèses sur la structure de B, par exemple en supposant $\underline{g}(B)$ convexe. Ceci explique le fréquent recours à d'autres types de fonctions d'agrégation temporaires telle que celle que nous allons présenter¹.

Une fonction d'agrégation temporaire plus complexe consiste à minimiser une distance pondérée à un point de référence $\underline{g}^{\text{Ref}}$. Les distances les plus utilisées appartiennent à la famille L_p des distances de Minkowski $[\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)|^p]^{1/p}$. En raison de ses propriétés, la distance de Tchebychev L_∞ (qui correspond à la limite de L_p lorsque p tend vers l'infini) :

$$\text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)| \}$$

est souvent utilisée².

Examinons comment se comporte la fonction d'agrégation temporaire

$$s(a, \underline{\lambda}, \underline{g}^{\text{Ref}}) = \text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)| \} \quad (\text{r.7.2.2})$$

vis-à-vis des exigences 1 et 2.

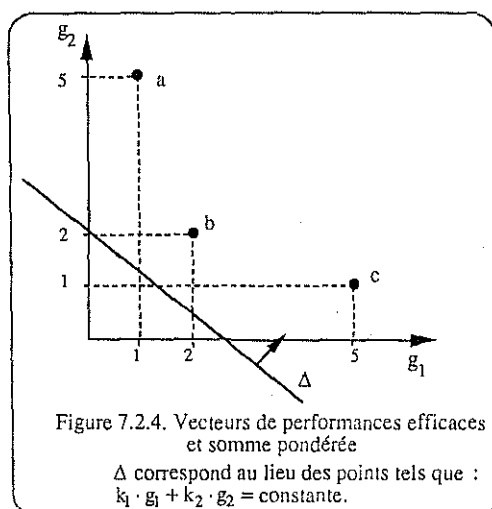
Soit a^* une solution optimale du problème :

¹ Pour l'étude détaillée des propriétés de ces diverses fonctions, nous renvoyons à Wierzbicki (1980 et 1986), à Sawaragi et al. (1985) et à Vanderpooten (1990).

² Notons de plus que l'utilisation de cette distance facilite les calculs. Le problème d'optimisation à résoudre se ramène, comme c'est le cas avec la somme pondérée, à la résolution d'un programme linéaire lorsque A est défini de manière implicite par un ensemble de contraintes linéaires, les critères étant eux-mêmes des fonctions linéaires des variables de décision, c'est-à-dire dans le cas de la programmation linéaire multicritère. Il en va de même avec (r.7.2.3).

$$\min_{a \in B} \max_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)| \} \quad (\text{P2})$$

où B est un sous-ensemble de A .



Il est clair que si $\underline{g}^{\text{Ref}} \in \underline{g}(B)$, alors toute solution optimale de (P2) est nécessairement confondue avec $\underline{g}^{\text{Ref}}$. La fonction d'agrégation (r.7.2.2) ne pourra respecter l'exigence 1 que moyennant un choix judicieux de $\underline{g}^{\text{Ref}}$ qui doit être "extérieur" et "au-dessus" de $\underline{g}[B]$. Lorsque le point de référence $\underline{g}^{\text{Ref}}$ a toutes ses composantes strictement supérieures à celles de $\underline{g}^*[B]$, point idéal de B , on peut démontrer les résultats suivants ¹ :

– si a^* est solution optimale **unique** de (P2) (avec $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in F$, l'une au moins des inégalités étant stricte), alors $a^* \in \text{Eff}(B)$;

– $\forall b \in \text{Eff}(B)$, il existe un jeu de coefficients d'importance $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (avec $\lambda_i > 0$, $\forall i \in F$) tel que b soit solution optimale unique de (P2).

¹ Voir par exemple Vanderpooten (1990, chapitre 7).

Moyennant un choix judicieux du point de référence ¹, la fonction (r.7.2.2) permet donc de respecter l'exigence 2, contrairement à ce qui était le cas avec la somme pondérée. Elle ne respecte cependant l'exigence 1 que sous réserve d'une condition d'unicité parfois lourde à vérifier en pratique (cf. figures 7.2.5 (1) et 7.2.5 (2)).

Un compromis entre la somme pondérée et la distance de Tchebychev consiste à utiliser la fonction d'agrégation temporaire :

$$s(a, \underline{\lambda}, \underline{g}^{\text{Ref}}) = \text{Max}_{i \in F} \{ \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)| \} - \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot g_i(a), \quad (\text{r.7.2.3})$$

dite distance de Tchebychev augmentée.

Sous réserve de choisir un point de référence et des coefficients $\underline{\lambda}$ de même qu'avec la métrique de Tchebychev et d'utiliser des coefficients ρ_i strictement positifs et "petits", on peut montrer que (r.7.2.3) :

- vérifie l'exigence 1 ;
- vérifie l'exigence 2 pour "presque toutes" les actions efficaces.

Ses avantages apparaissent à la figure 7.2.5 (3). Notons enfin que la charge de calcul nécessaire pour optimiser (r.7.2.3) est du même ordre que celle nécessaire avec (r.7.2.1) et (r.7.2.2).

Dans certaines méthodes comme la méthode de Vanderpooten (cf. 7.3.1.4) et la méthode du point de référence (cf. 7.3.2), on est amené à utiliser des points de référence ne vérifiant pas nécessairement la condition qui vient d'être évoquée à propos de la métrique de Tchebychev et de la métrique de Tchebychev aug-

¹ Notons que la condition sur le point de référence est toujours satisfaite dès lors que $\underline{g}^{\text{Ref}} > \underline{g}^*$, $\forall i \in F$. On peut alors supprimer les valeurs absolues dans (r.7.2.2) et (r.7.2.3). Nous les conserverons néanmoins dans la suite pour rappeler leur parenté avec la distance de Minkowski.

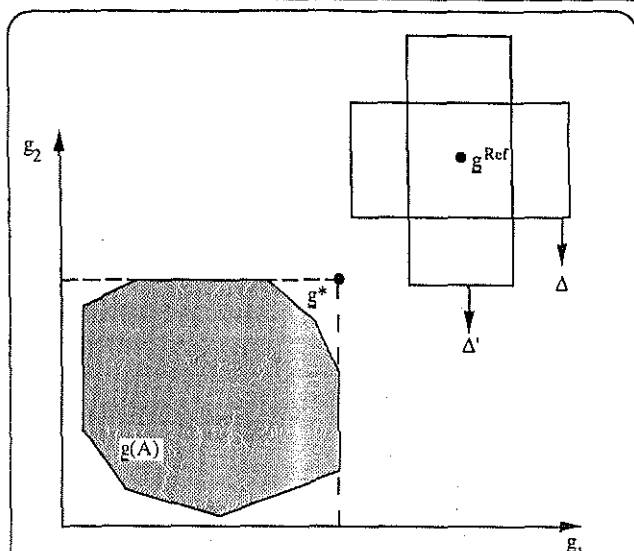


Figure 7.2.5 (1). Courbes d'iso-distance à un point de référence dominant le point idéal avec la distance de Tchebychev

Δ correspond au lieu des points tels que :

$$\text{Max} \{ \lambda_1 | g_1^{\text{Ref}} - g_1(a) |; \lambda_2 | g_2^{\text{Ref}} - g_2(a) | \} = \text{constante},$$

Δ' correspond au lieu des points tels que :

$$\text{Max} \{ \kappa_1 | g_1^{\text{Ref}} - g_1(a) |; \kappa_2 | g_2^{\text{Ref}} - g_2(a) | \} = \text{constante},$$

avec $\kappa_2 \leq \lambda_2$ et $\kappa_1 \geq \lambda_1$, l'une des deux inégalités étant stricte.

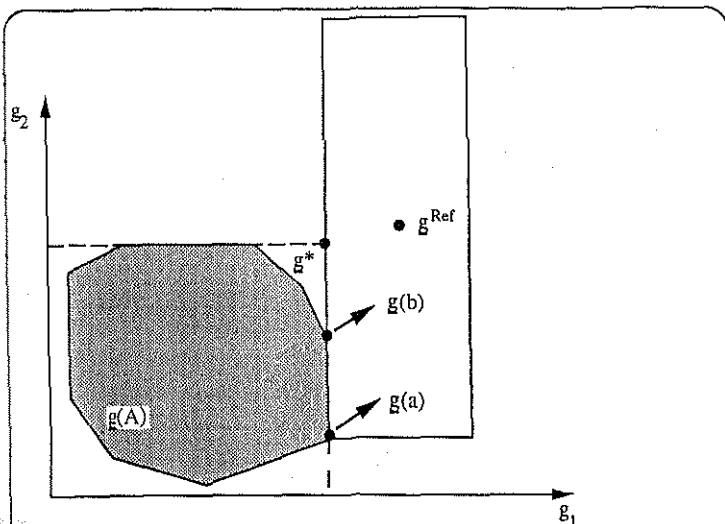
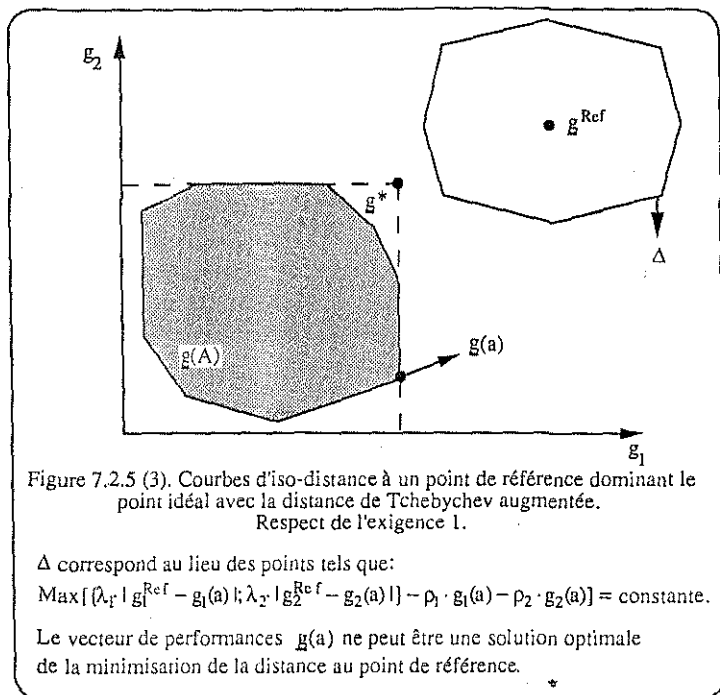


Figure 7.2.5 (2). Non respect de l'exigence 1 avec la distance de Tchebychev à un point de référence dominant le point idéal

Tous les vecteurs de performances sur le segment allant de $g(a)$ à $g(b)$ minimisent la distance au point de référence mais seul $g(b)$ est efficace.



mentée. Il faut alors recourir à d'autres types de fonctions d'agrégation temporaires. Une famille de fonctions d'agrégation temporaires particulièrement intéressante en ce sens consiste à utiliser (r.7.2.2) ou (r.7.2.3) en supprimant les valeurs absolues (sur les propriétés de telles fonctions, nous renvoyons à Vanderpooten (1990, chapitre 7)).

7.2.4 Remarques et exemples

On peut, à ce niveau, résumer les caractéristiques de toute méthode interactive en P. α par un certain nombre de traits distinctifs :

- nature de la proposition faite : une action ou plusieurs actions ;
- choix de la fonction d'agrégation temporaire ;
- nature des paramètres préférentiels utilisés ;
- type de questionnement utilisé dans la phase d'interrogation (a), b), ..., m)) (cf. 7.2.2.2) ;

- type de mise à jour des paramètres préférentiels à chaque itération ;
- définition de la zone d'intérêt à chaque itération ;
- nature des informations fournies dans la phase d'explication.

Sur cette base, on peut à nouveau préciser le schéma général présenté à la fin du 7.2.1.

Toute méthode interactive en $P.\alpha$ utilisant des propositions constituées d'une seule action peut, d'un point de vue technique, se ramener à un schéma du type ¹ (rappelons que la notation $a_k := \text{Arg Opt}_{a \in A_k} s(a, p_k)$ signifie que a_k est une des actions de A_k telle que : $s(a_k, p_k) \geq s(a, p_k), \forall a \in A_k$, lorsque Opt signifie Max et $s(a_k, p_k) \leq s(a, p_k), \forall a \in A_k$, lorsque Opt signifie Min) :

Initialisation

$k := 1$ {compteur d'itérations}
 Choix de $p_k \in \mathcal{P}$ {initialisation des paramètres préférentiels}
 Choix de A_k {définition de la zone d'intérêt initiale}

Etape de calcul

$a_k := \text{Arg Opt}_{a \in A_k} s(a, p_k)$ {obtention de la nouvelle proposition}

Etape de dialogue

Phase d'explication

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin (ou retour à l'initialisation),

Sinon

Questionnement de type a), b), ..., k)

¹ Pour des raisons de clarté, on ne détaillera pas, dans ce schéma, la phase d'explication et on n'envisagera pas la possibilité, pour l'interrogé, de réagir en modifiant la définition de A . En toute rigueur, il serait bon, dans ce qui suit, d'indiquer par k la fonction s , le type de fonction d'agrégation temporaire utilisée pouvant varier au cours de l'interaction.

Définition de $p_{k+1} \in \mathcal{P}$ {mise à jour des paramètres
préférentiels}

Définition de A_{k+1} {mise à jour de la zone d'intérêt}

Si $A_{k+1} = \emptyset$
gestion de la zone d'intérêt vide.

Fin Si

Fin Si

$k := k + 1$ {nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Ce schéma général, joint à l'ensemble des options présentées au 7.2.2 et au 7.2.3, pourrait laisser croire que la conception d'une méthode interactive consiste avant tout en un assemblage de "morceaux" venant se greffer sur un tronc commun. Concevoir, dans le détail, une méthode interactive soulève cependant de nombreux problèmes d'ergonomie, de rapidité, de cohérence comme le lecteur s'en convaincra en analysant la méthode interactive élémentaire ¹ décrite formellement ci-après et que nous commenterons ensuite.

Initialisation

$k := 1$ {compteur d'itérations}

$A_k := A$ {définition de la zone d'intérêt initiale :
la zone d'intérêt de départ est l'ensemble A tout entier}

$\underline{g}^{\text{Ref}} = \underline{g}^*[A_k] + \underline{\varepsilon}$ {définition du point de référence initial :
le point de référence initial domine le point idéal}

Etape de calcul

$a_k := \underset{a \in A_k}{\text{Arg Min}} \underset{i \in F}{\text{Max}} |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)|$ {nouvelle proposition obtenue
en minimisant une distance L_∞ au point de référence}

Etape de dialogue

Phase d'explication

Présentation du tableau des gains de A_k .

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

¹ Rappelons que $\underline{g}^*[B]$ désigne le point idéal associé au sous-ensemble d'actions potentielles $B \subset A$. Dans tout ce qui suit, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ désignera un vecteur de $\mathbf{R}^n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ étant "petits" et tous strictement positifs.

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Définir l'ensemble $J_k \subset F$ des critères sur lesquels les performances de a_k sont jugées insatisfaisantes

{question de type d}

$$A_{k+1} := \{a \in A : g_i(a) \geq g_i(a_k) + \varepsilon_i, \forall i \in J_k\}$$

{mise à jour de la zone d'intérêt}

Si $A_{k+1} = \emptyset$

Prévenir l'interrogé que l'on ne peut augmenter les performances de a_k sur tous les critères de J_k .

$$A_{k+1} := A_k \quad \text{{gestion de zone d'intérêt vide}}$$

Fin Si

$$\underline{g}^{\text{Ref}} := \underline{g}^*[A_{k+1}] + \underline{\varepsilon} \quad \text{{définition du nouveau point de référence}}$$

Fin Si

$$k := k + 1$$

{nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode élémentaire consiste :

- à définir A_k par des incréments sur les critères de J_k ;
- à retenir comme proposition dans A_k l'action qui minimise la distance de Tchebychev non pondérée au point idéal de A_k augmenté d'une petite quantité ¹.

Notons que l'on peut facilement améliorer la méthode élémentaire telle qu'elle a été présentée en modifiant l'étape de calcul comme suit :

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} [\text{Max}_{i \in F} \lambda_i \cdot |g_i^{\text{Ref}} - g_i(a)|] - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot g_i(a)]$$

où les coefficients d'importance λ_i sont définis lors de la phase d'initialisation en posant, pour $i = 1, 2, \dots, n$:

¹ Notons que la définition du point de référence permet ici de bénéficier des "bonnes propriétés" de (r.7.2.2) évoquées au 7.2.3.

$$\lambda_i = 1 / (g_i^* - g_i^{\text{Nad}}).$$

Cette modification permet :

- de bénéficier des "bonnes propriétés" de (r.7.2.3) vues au 7.2.3 et
- de s'affranchir des problèmes d'échelles sur les différents critères par l'introduction des coefficients λ_i qui sont d'autant plus grands que l'écart $(g_i^* - g_i^{\text{Nad}})$ (donnant un ordre d'idée, imparfait, de la plage de variation du critère g_i sur $\text{Eff}(A)$) est faible.

On peut également rendre optionnelle la phase d'explication, ce qui a pour conséquence d'alléger le volume de calcul à effectuer.

Dans le cas où $n = 2$, on peut illustrer graphiquement ce à quoi conduit cette méthode en notant (cf. figure 7.2.5) que le lieu des points dans l'espace des critères équidistants au sens d'une métrique L_∞ (non pondérée) d'un point donné n'est autre qu'un carré centré sur ce point. Trois itérations de cette méthode élémentaire sont présentées à la figure 7.2.6 dans le cas où A a une structure continue.

L'exemple développé à la figure 7.2.6 montre clairement une des limites de la méthode proposée. Partant d'une première proposition a_1 , on souhaite augmenter les performances sur g_2 , ce qui est bien le cas avec la nouvelle proposition a_2 . L'interrogé constate alors que les performances sur g_1 se sont trop dégradées et souhaite les augmenter. Mais la nouvelle proposition a_3 , si elle est telle que $g_1(a_3) > g_1(a_2)$, est aussi telle que $g_2(a_3) < g_2(a_1)$ alors que les performances de a_1 sur g_2 avaient été jugées insatisfaisantes. On peut alors chercher à empêcher de telles situations de se produire en donnant de la "mémoire" à l'interaction en modifiant la mise à jour de la zone d'intérêt comme suit :

$$A_{k+1} := \{a \in A_k : g_i(a) \geq g_i(a_k) + \varepsilon_i, \forall i \in J_k\}.$$

Cependant, le prix à payer pour cette modification est important puisque, alors, tout jugement hâtif ou procédant d'un raisonnement de type essai-erreur est irrémédiablement pris en

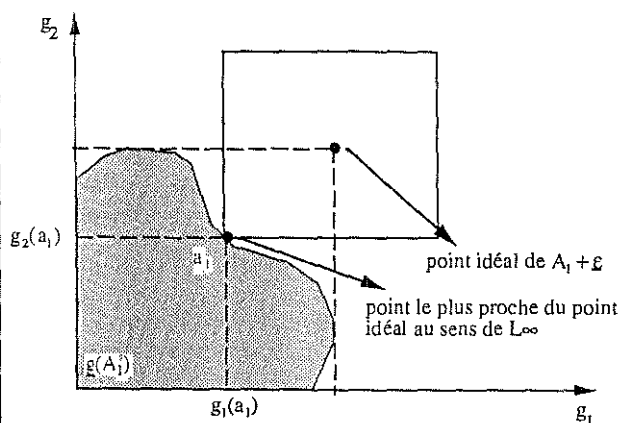


Figure 7.2.6. (1). Procédure interactive élémentaire
 a_1 est déclarée insatisfaisante :
 l'interrogé souhaite augmenter les performances de a_1 sur g_2

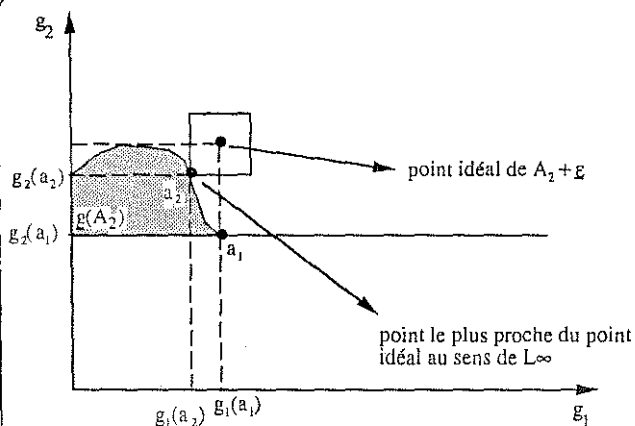


Figure 7.2.6. (2). Procédure interactive élémentaire
 a_2 est déclarée insatisfaisante :
 l'interrogé souhaite augmenter les performances de a_2 sur g_1

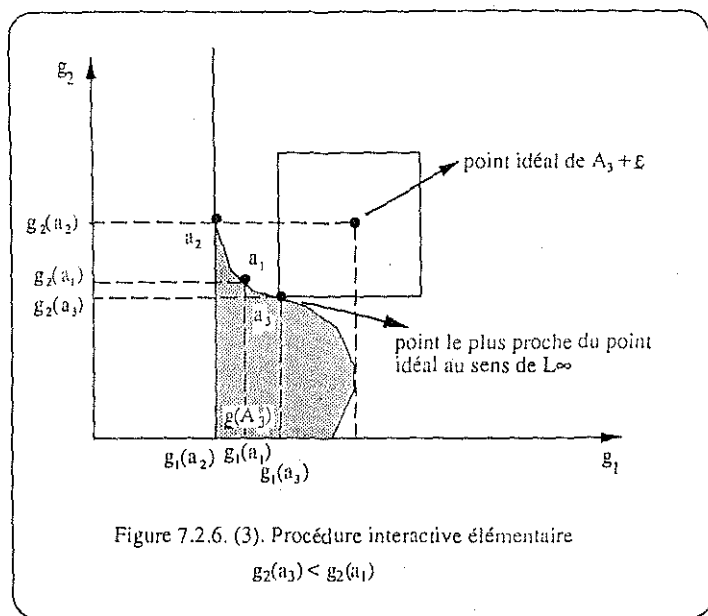


Figure 7.2.6. (3). Procédure interactive élémentaire

$$g_2(a_3) < g_2(a_1)$$

compte dans la suite du processus. Mais garder la méthode en l'état ne paraît guère satisfaisant non plus, tout portant à croire que l'interrogé serait profondément troublé par ce qu'il pourrait interpréter comme étant une "incohérence" de la méthode. Des options intermédiaires entre ces deux extrêmes sont possibles (cf. 7.3), par exemple :

- en modifiant adéquatement la métrique, par le biais de coefficients d'importance accordés aux critères, à chaque itération ;
- en demandant à l'interrogé s'il est ou non certain de vouloir augmenter les performances sur certains critères ;
- en donnant au processus d'interaction une mémoire limitée empêchant des phénomènes tel que celui venant d'être décrit de se produire avant qu'un certain nombre d'itérations ne se soit écoulé.

7.3 MÉTHODES INTERACTIVES DANS UNE PROBLÉMATIQUE DE CHOIX

Comme on l'a vu au 7.2. , c'est pour répondre à une problématique de choix qu'ont été développées la plupart des méthodes interactives. Elles sont très nombreuses et de nature fort variée. En tenter une présentation exhaustive sortirait du cadre du présent ouvrage. Au 7.3.1, nous avons fait le choix d'en présenter quatre en détail ¹ que nous croyons représentatives de l'ensemble des méthodes proposées à ce jour. Deux d'entre elles (STEM, Geoffrion-Dyer-Feinberg) sont anciennes mais ont inspiré beaucoup d'autres méthodes. Les deux autres (méthode du point de mire évolutif, méthode de Vanderpooten), plus récentes, mettent en œuvre des protocoles d'interaction d'une grande souplesse prenant largement en compte l'hypothèse 3 développée au 7.1.2. Dans un second paragraphe, on présentera plus brièvement d'autres méthodes.

7.3.1 Présentation de quelques méthodes interactives en P_α ²

7.3.1.1 La méthode STEM (cf. Benayoun et al. (1971))

La méthode STEM présente, à chaque itération, une proposition à l'interrogé obtenue en minimisant une distance de Tchebychev pondérée au point idéal de A (r.7.2.2). Au cas où cette proposition est jugée insatisfaisante par l'interrogé au cours de la phase de dialogue, celui-ci est invité à réagir en indiquant un critère sur lequel il serait prêt à faire une concession et en

¹ Concernant les étapes de dialogue, nous ne ferons que suggérer les lignes directrices. Rappelons (cf. 7.1.1) qu'il est essentiel, pour mettre en œuvre ces méthodes dans de bonnes conditions, de prêter beaucoup d'attention à la façon dont les questions sont formulées et à la présentation de l'information à l'utilisateur.

² La présentation de ces méthodes s'inspire en grande partie de Vanderpooten et Vincke (1989). Pour certaines méthodes, nous avons, dans un souci de simplification et de clarté, légèrement modifié la présentation qui en était faite dans les articles originaux.

indiquant la quantité maximale qu'il serait prêt à concéder sur ce critère. Cette indication est utilisée dans l'étape de calcul ultérieure pour redéfinir la zone d'intérêt (cf. 7.2.3) et modifier la pondération utilisée dans la fonction d'agrégation temporaire.

De façon plus précise, en reprenant les notations introduites au 7.2.1, la méthode STEM peut se présenter comme suit :

Initialisation

$k := 1$ {compteur d'itérations}

Présentation du tableau des gains de A. {phase d'explication initiale}

$\underline{g}^{\text{Ref}} := \underline{g}^* + \underline{\varepsilon}$ {définition du point de référence}

$\alpha_j := (g_j^* - g_j^{\text{Nad}}) / |g_j^*|, j = 1, 2, \dots, n.$

$$\lambda_j := \alpha_j / \sum_{i=1}^n \alpha_i, j = 1, 2, \dots, n.$$

{initialisation des coefficients d'importance}

$A_k := A$

{définition de la zone d'intérêt initiale}

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \text{Max}_{j \in F} \lambda_j \cdot |g_j^{\text{Ref}} - g_j(a)|$$

{nouvelle proposition obtenue en minimisant une distance de Tchebychev au point de référence}

Etape de dialogue

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Demander à l'interrogé sur quel critère $h \in F$ il accepterait de diminuer la performance de a_k pour pouvoir augmenter ses performances sur d'autres critères et d'indiquer la quantité maximale Δ_h qu'il serait prêt à concéder sur ce critère.

$$A_{k+1} := \{a \in A_k : g_i(a) \geq g_i(a_k), \forall i \neq h; g_h(a) \geq g_h(a_k) - \Delta_h\}$$

{mise à jour de la zone d'intérêt}

$$\lambda_h := 0$$

{définition d'une nouvelle pondération ; les coefficients autres que λ_h sont inchangés}

Fin Si

$k := k + 1$

{nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) La méthode STEM est particulièrement simple et très économe en termes de calculs. Dans le cas où A est défini par un ensemble de contraintes linéaires pesant sur des variables de décision réelles et où les critères sont des fonctions linéaires de ces variables (cadre de la programmation linéaire multicritère dans lequel la méthode fût initialement présentée), chaque étape de calcul nécessite la résolution d'un seul programme linéaire ¹.

b) La méthode STEM ne favorise guère l'apprentissage par essai et erreur. Les concessions qui sont faites à chaque itération sont définitives et ne peuvent plus être remises en cause par la suite. Ce caractère définitif apparaît également dans la mise à jour de la pondération à chaque itération. Une fois une concession faite sur un critère, celui-ci est définitivement ignoré dans la suite de l'interaction. A la $n^{\text{ième}}$ itération, on a $\lambda_j = 0, \forall j \in F$ et la méthode ne peut plus progresser, même si la proposition a_n est jugée insatisfaisante.

c) Comme on l'a vu au 7.2.3, on aura intérêt à remplacer la fonction d'agrégation temporaire utilisée (métrique de Tchebychef, cf. (r.7.2.2)) par une métrique de Tchebychev augmentée (cf. (r.7.2.3)) sans que cela conduise à alourdir les calculs.

d) Dans la phase d'interrogation, STEM demande un effort cognitif important à l'interrogé. On peut penser en effet qu'il est, a priori, plus simple d'indiquer un critère sur lequel on souhaiterait augmenter les performances que d'en indiquer un sur lequel on est prêt à faire une concession. De plus, indiquer une valeur

¹ La détermination du tableau des gains de A lors de la phase d'initialisation nécessite la résolution de n programmes linéaires pour lesquels seule la fonction objectif varie.

maximale pour cette concession ne paraît pas être une tâche aisée¹. C'est là un défaut majeur de STEM qui demande une information relativement difficile qui est ensuite utilisée sans donner la possibilité à l'interrogé de revenir sur une opinion précédemment émise (à moins de reprendre la procédure depuis le début).

e) Les coefficients λ_j utilisés dans la fonction d'agrégation temporaire sont déterminés au départ pour donner un poids important aux critères pour lesquels il y a une différence importante entre le niveau idéal et le niveau nadir. Ceci peut se justifier dans la mesure où cette différence rend compte, de manière imparfaite², de l'éventail des valeurs sur ce critère pour les actions efficaces de A. Notons que, dans STEM, les coefficients λ_j ne visent pas à refléter l'importance relative que l'interrogé souhaite accorder aux divers critères.

7.3.1.2 La méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg (1972)

Cette méthode présente, à chaque itération, une proposition à l'interrogé qui résulte d'une amélioration de la proposition précédente le long d'une direction déterminée à l'aide de taux de substitution.

Contrairement à la méthode STEM, la méthode de Geoffrion-Dyer-Feinberg (GDF) travaille de façon essentiellement locale. Elle ne peut s'appliquer que dans le cas où A est défini en compréhension par un ensemble de contraintes pesant sur des variables de décision réelles (cf. 1.2). Une action $a \in A$ est définie au moyen d'un vecteur de m variables de décision $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (cf. exemples 3 et 11 dans MMCAD). Dans tout ce qui suit, on supposera que A est un sous-ensemble convexe et

¹ Dans leur article original, les auteurs de la méthode indiquent qu'il est possible d'assister l'interrogé en lui fournissant le résultat d'analyses de sensibilité autour de la proposition courante. Cependant, comme le font remarquer Vanderpooten et Vincke (1989), la technique proposée ne semble guère satisfaisante.

² Cf. Steuer et Gardiner (1990).

compact¹ de $\mathbb{R}^m$. On admettra de plus que les fonctions-critères sont toutes dérivables par rapport aux m variables de décision et on notera $g_j^i(\underline{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ la dérivée partielle du $j^{\text{ème}}$ critère par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable de décision évaluée au point $\underline{x} \in A \subset \mathbb{R}^m$.

On peut présenter la méthode GDF de la manière suivante :

Initialisation

$k := 1$. (compteur d'itérations)
 $\omega \in [\mathbb{N}\{0\}]$. (choix d'un paramètre de discrétisation)
 $\beta_0 := 0, \beta_t := \beta_{t-1} + 1/\omega, t = 1, 2, \dots, \omega$. (choix d'une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$)
 $\underline{z}^k \in A$ (choix arbitraire d'une proposition)
 Demander à l'interrogé d'exprimer des taux marginaux de substitution $r_{ji}(\underline{z}^k)$ ($j = 2, 3, \dots, n$) au voisinage de $\underline{z}^k$ entre un critère de référence g_1 et tous les autres critères.
 (initialisation des paramètres préférentiels)

Etape de calcul

$\underline{\xi} := \text{Arg Max}_{\underline{x} \in A} \sum_{j \in F} r_{ji}(\underline{z}^k) \cdot [\sum_{i=1}^m g_j^i(\underline{z}^k) \cdot x_i]$
 $\underline{\delta} := \underline{\xi} - \underline{z}^k$ (détermination d'une direction d'amélioration)
 $\underline{x}^t := \underline{z}^k + \beta_t \underline{\delta}, t = 1, 2, \dots, \omega$ (détermination de ω actions $\underline{x}^t$ le long de la direction d'amélioration)

Etape de dialogue

Demander à l'interrogé de déterminer, parmi les actions $\underline{x}^t$ ($t = 1, 2, \dots, \omega$), l'action $\underline{y}$ qu'il préfère.

Si $\underline{y} = \underline{z}^k$ (ou si $\underline{y}$ est jugée satisfaisante)

Fin.

Sinon

$\underline{z}^{k+1} := \underline{y}$

Demander à l'interrogé d'exprimer des taux marginaux de substitution $r_{ji}(\underline{z}^{k+1})$ ($j = 2, 3, \dots, n$) au voisinage de $\underline{z}^{k+1}$

¹ cette dernière supposition étant fort peu restrictive dans les problèmes réels.

entre un critère de référence g_1 et tous les autres critères.

Fin Si

$k := k + 1$

(nouvelle itération)

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) Supposons que, à chaque étape de dialogue, l'interrogé réponde aux questions en termes de taux de substitution en conformité avec une fonction d'utilité

$$U(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)).$$

La méthode cherche alors, au voisinage de la proposition courante $\underline{z}^k$, à estimer le gradient de la fonction d'utilité en ce point. Notons ce gradient

$$\nabla_x[U(g_1(\underline{z}^k), g_2(\underline{z}^k), \dots, g_n(\underline{z}^k))] = \nabla_x[U(\cdot)] = [\partial U(\cdot)/\partial x_1 ; \partial U(\cdot)/\partial x_2 ; \partial U(\cdot)/\partial x_m].$$

Or :

$$\partial U(\cdot)/\partial x_i = \sum_{j=1}^n (\partial U(\cdot)/\partial g_j) \cdot (\partial g_j(\underline{z}^k)/\partial x_i).$$

$$\text{et } r_{ji}(\underline{z}^k) = [\partial U(\cdot)/\partial g_j] / [\partial U(\cdot)/\partial g_i].$$

Les dérivées des critères étant connues, la connaissance de $r_{ji}(\underline{z}^k)$ pour $j = 2, \dots, n$ permet donc d'estimer le gradient de U en ce point à un coefficient multiplicatif près. Connaissant le gradient en un point, la méthode GDF cherche alors à se déplacer linéairement de manière optimale le long de cette direction de façon tout-à-fait analogue à ce qui est fait dans l'algorithme de Frank et Wolfe (1956). C'est l'objectif de l'étape de calcul présentée plus haut.

b) Compte-tenu de ce qui précède, il résulte des propriétés de l'algorithme de Frank et Wolfe que la méthode GDF conduira un

interrogé, répondant à toutes les questions posées dans l'étape de dialogue en conformité avec une fonction d'utilité $U(g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x}))$ concave, vers une des actions de A donnant à cette fonction la valeur maximum. Notons néanmoins que la méthode GDF conserve tout son intérêt en-dehors de cette hypothèse très restrictive. Elle fonctionne alors comme une série de tentatives pour améliorer localement une proposition.

c) La phase d'interrogation demande à l'interrogé un effort cognitif très important. On a vu, au 4.2.1.3, que l'estimation de taux de substitution était loin d'être une tâche aisée. Notons cependant que, contrairement à ce qui était le cas dans STEM, l'information demandée par la méthode GDF ne conduit à aucune décision irrévocable et on a, tout au long de la méthode, une zone d'intérêt confondue avec l'ensemble A tout entier. Cette méthode n'exclut donc pas un apprentissage par essais-erreurs, les essais conduisant ici à explorer une certaine zone de A au voisinage de la proposition précédente. Signalons enfin que la comparaison des actions $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^\omega$ obtenues par discrétisation le long de la direction d'amélioration ne va pas sans poser de difficultés dès lors que ω dépasse quelques unités.

d) Le volume de calcul requis par la méthode reste raisonnable, particulièrement dans le cas de la programmation linéaire multicritère.

7.3.1.3 La méthode du point de mire évolutif (cf. Roy (1974b et 1976))

Cette méthode, applicable quelle que soit la nature de A , reprend certaines des caractéristiques de STEM en abandonnant toute idée d'irrévocabilité.

On peut la présenter de la manière suivante :

Initialisation

$k := 1$	{compteur d'itérations}
Choix de $\underline{\lambda}^k$	{initialisation des coefficients d'importance}
$A_k := A$	{définition de la zone d'intérêt initiale}
$\underline{g}^{\text{Ref}} := \underline{g}^*[A_k] + \underline{\varepsilon}$	{définition du point de référence initial}

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} \text{Max}_{j \in F} \lambda_j^k \cdot |g_j^{\text{Ref}} - g_j(a)|$$

{nouvelle proposition obtenue en minimisant
une distance de Tchebychev au point de référence}

Etape de dialogue*Phase d'explication*

Présentation du tableau des gains de A_k .

Phase d'interrogation

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Demander à l'interrogé sur quels critères $J_k \subset F$ il accepterait de diminuer les performances de a_k pour pouvoir augmenter les performances sur d'autres critères et d'indiquer la quantité maximale Δ_j qu'il est prêt à concéder sur chacun des critères $j \in J_k$.

$$A_{k+1} := \{a \in A : g_i(a) \geq g_i(a_k), \forall i \notin J_k ; g_j(a) \geq g_j(a_k) - \Delta_j, \forall j \in J_k\}$$

{mise à jour de la zone d'intérêt}

$$g^{\text{Ref}} := g^*[A_{k+1}] + \underline{\varepsilon}$$

{définition du nouveau
point de référence}

$$\lambda_j^{k+1} := \alpha \lambda_j^k \text{ si } j \in J_k \\ := \lambda_j^k \text{ sinon (avec } \alpha < 1).$$

{définition d'une
nouvelle pondération}

Fin Si

$$k := k + 1$$

{nouvelle itération}

Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode appelle les commentaires suivants :

a) De même que pour STEM, cette méthode est particulièrement simple et économe en calcul. Ici aussi, on pourra avoir intérêt à remplacer la fonction d'agrégation temporaire utilisée (métrique de Tchebychev, cf. (r.7.2.2)) par une métrique de Tchebychev augmentée (cf. (r.7.2.3)).

b) L'information demandée dans l'étape de dialogue est de même nature que dans STEM. Cependant, l'utilisation qui en est faite ici ne conduit à aucune irrévocabilité et autorise pleinement les comportements essais-erreurs.

c) Dans la présentation initiale de la méthode, la détermination des nouvelles pondérations à chaque itération se fait en demandant à l'interrogé de déterminer, à chaque itération k , un vecteur $(\delta_1^k, \delta_2^k, \dots, \delta_n^k)$ tel que passer de $g_1(a_k)$ à $g_1(a_k) - \delta_1^k$, $g_2(a_k)$ à $g_2(a_k) - \delta_2^k$, ..., $g_n(a_k)$ à $g_n(a_k) - \delta_n^k$ constitue des "regrets équivalents" et en posant $\lambda_j^k = 1/\delta_j^k$. On pourra préférer cette façon de faire à celle, plus arbitraire, présentée plus haut, en particulier en fin de méthode, lorsque l'interrogé aura enrichi suffisamment sa perception du problème. L'impact de la modification proposée est cependant faible, l'interaction venant corriger le côté arbitraire de la modification des coefficients de pondération.

d) Dans le cas où une proposition a_k est jugée satisfaisante, la version originale de la méthode prévoit la possibilité de stocker cette proposition et de laisser à l'interrogé la possibilité de redémarrer la méthode sur de nouvelles bases, par exemple en changeant la pondération initiale. Lorsque a_k est jugée insatisfaisante, on peut prévoir de laisser à l'interrogé la possibilité d'agir sur l'ensemble A , par exemple en ajoutant des actions ou en modifiant certaines contraintes.

7.3.1.4 La méthode de Vanderpooten (1989c et 1990)

Cette méthode, tout comme la méthode du point de mire évolutif, autorise une exploration très libre de l'ensemble des actions potentielles quelle que soit la structure de cet ensemble. Cette exploration est cependant guidée de façon locale de manière à garder une certaine cohérence¹ dans la succession des propositions faites à l'interrogé. Ce guidage permet d'éviter que ne se produisent des situations tels que celles que nous avons notées à la figure 7.2.6.

¹ Dans la méthode du point de mire, la modification des coefficients λ_j^k au cours de l'étape de calcul a le même objectif.

Cette méthode présente de plus la particularité de permettre à l'interrogé de réagir de deux façons différentes aux propositions qui lui sont faites :

- soit en indiquant des critères sur lesquels il souhaite améliorer les performances de la proposition courante (question de type d) ;
- soit en indiquant, sur tout ou partie des critères, des niveaux de performances qui le satisferaient.

Pour faciliter la comparaison de cette méthode avec STEM et la méthode du point de mire, on la présentera tout d'abord dans une version simplifiée, n'autorisant que le premier des deux modes d'interaction. On la présentera ensuite de manière générale.

Dans une version simplifiée n'autorisant qu'un seul mode d'interaction, la méthode de Vanderpooten se présente comme suit ¹.

Initialisation

$k := 1$ {compteur d'itérations}
 $A_k := A$ {définition de la zone d'intérêt initiale}
 $B_k := A$ {définition de la zone d'intérêt provisoire}
 $\lambda^k := 1 / (g^* - g^{Nad})$ {choix des coefficients d'importance}
 $g^{Ref} := g^* + \underline{e}$ {définition du point de référence initial}

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} [\text{Max}_{i \in F} \{\lambda_i^k \cdot |g_i^{Ref} - g_i(a)|\}] - \sum_{j \in F} \rho_j \cdot g_j(a)]$$

Etape de dialogue

Si $k > 1$

Si $a_k = a_{k-1}$

Prévenir l'interrogé que, compte-tenu de A et de l'information fournie, il n'est pas possible de proposer une action plus satisfaisante que a_{k-1} .

¹ De même qu'au 7.2.4, $\underline{e}$ et $\underline{p}$ représentent des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont strictement positives et "petites".

Fin Si

Présenter a_{k-1} et a_k à l'interrogé et lui demander l'action qu'il préfère.

Si a_k est préférée à a_{k-1}

$$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_{k-1}), \forall j \in J_{k-1}\}$$

Sinon

Demander à l'interrogé quels sont les critères $L_k \subset F$ qui motivent ce jugement

$$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in L_k\} \quad \text{\{détermination d'une zone d'intérêt provisoire\}}$$

$$a_k := a_{k-1}$$

\{mise à jour de la proposition courante\}

Fin Si

Fin Si

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon

Demander à l'interrogé de spécifier les critères $J_k \subset F$ sur lesquels il souhaite améliorer en priorité les performances de a_k

$$A_{k+1} := \{a \in B_k : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in J_k\} \quad \text{\{mise à jour de la zone d'intérêt\}}$$

$$\underline{g}^{\text{Ref}} := \underline{g}^*[A_{k+1}] + \underline{\varepsilon} \quad \text{\{mise à jour du point de référence\}}$$

Fin Si

$$\underline{\lambda}^{k+1} := 1 / (\underline{g}^* - \underline{g}(a_k)) \quad \text{\{mise à jour des coefficients d'importance\}}$$

$$k := k + 1$$

\{nouvelle itération\}

Retour à l'étape de calcul.

Dans sa version simplifiée, cette méthode appelle les remarques suivantes :

a) De même que toutes les méthodes présentées précédemment, la méthode de Vanderpooten ne requiert qu'un volume limité de calcul à chaque itération.

b) Contrairement aux méthodes présentées précédemment, la méthode de Vanderpooten utilise un protocole d'interaction axé sur l'expression d'informations qualitatives se rapportant à des critères à améliorer et/ou à des comparaisons par paires. Il s'agit

là d'un avantage de cette méthode. Notons cependant que cet avantage semble aller de pair avec l'utilisation de questions plus ambiguës. Par exemple, on peut se demander combien de "critères à améliorer en priorité" il est judicieux de spécifier au cours de la phase d'interrogation sachant que, sur les critères non retenus, les performances pourront baisser.

c) La méthode cherche à imposer une certaine cohérence dans la succession des propositions sans pour cela, comme dans STEM, amener à des irrévocabilités par la définition, à chaque étape, de zones d'intérêt provisoire. Telle que nous l'avons présentée, elle n'exclut que les "incohérences" flagrantes telles celles mentionnées à la figure 7.2.6.

La méthode de Vanderpooten ¹ permet également à l'interrogé de réagir à la proposition courante en indiquant, sur tout ou partie des critères, des niveaux d'exigence qui le satisferaient. Ces niveaux de performances sont utilisés pour définir un point de référence. Si ce mode d'interaction est utilisé, le point de référence ainsi défini peut ne pas vérifier la condition évoquée au 7.2.3 qui permet, à la fonction d'agrégation temporaire (r.7.2.3) (utilisée dans la version simplifiée), d'avoir de "bonnes propriétés". Il faut donc ici modifier la fonction d'agrégation temporaire (r.7.2.3). Comme on l'a vu à la fin du 7.2.3, la modification la plus simple consiste à retirer les valeurs absolues de (r.7.2.3). La méthode de Vanderpooten se présente alors comme suit :

Initialisation

$k := 1$	{compteur d'itérations}
$A_k := A$	{définition de la zone d'intérêt initiale}
$B_k := A$	{définition de la zone d'intérêt provisoire}
$\lambda_i^k := 1 / (g_i^* - g_i^{Nad})$	{choix des coefficients d'importance}
$g^{Ref} := g^* + g$	{définition du point de référence initial}

Etape de calcul

$$a_k := \text{Arg Min}_{a \in A_k} [\text{Max}_{i \in P} (\lambda_i^k (g_j^{Ref} - g_j(a))) - \sum_{j \in P} \rho_j \cdot g_j(a)]$$

¹ Dans ce qui suit, nous avons légèrement simplifié cette méthode. Dans sa version originale, elle permet également la fixation de niveaux d'exigence minimale sur tout ou partie des critères au cours de l'interaction.

Etape de dialogue

Si $k > 1$ Si $a_k = a_{k-1}$

Prévenir l'interrogé que, compte-tenu de A et de l'information fournie, il n'est pas possible de proposer une action plus satisfaisante que a_{k-1} .

Fin Si

Présenter a_{k-1} et a_k à l'interrogé et lui demander l'action qu'il préfère.Si a_k est préférée à a_{k-1}

$J'_k := \{j \in J_{k-1} : g_j(a_k) \geq g_j(a_{k-1})\}$ (J'_k est l'ensemble des critères sur lesquels une amélioration a été demandée et a été obtenue. J'_k est confondu avec J_{k-1} si le premier mode d'interaction a été utilisé)

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_{k-1}), \forall j \in J'_k\}$ {détermination d'une zone d'intérêt provisoire}

Sinon

Demander à l'interrogé quels sont les critères $L_k \subset F$ qui motivent ce jugement

$B_k := \{a \in A : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in L_k\}$ {détermination d'une zone d'intérêt provisoire}

 $a_k := a_{k-1}$

Fin Si

Fin Si

La proposition a_k est-elle satisfaisante ?

Si Réponse = OUI

Fin.

Sinon {deux possibilités d'interactions au choix de l'interrogé}

Si l'interrogé utilise le premier mode d'interaction

Demander à l'interrogé de spécifier les critères $J_k \subset F$ sur lesquels il souhaite améliorer en priorité les performances de a_k

(J_k est l'ensemble des critères sur lesquels on souhaite une amélioration)

$A_{k+1} := \{a \in B_k : g_j(a) \geq g_j(a_k), \forall j \in J_k\}$ {mise à jour de la zone d'intérêt}

$\underline{g}^{\text{Ref}} := \underline{g}^*[A_{k+1}] + \underline{g}$ {mise à jour du point de référence}

Sinon {second mode d'interaction}

Demander à l'interrogé de spécifier, sur certains critères $M_k \subset F$, les performances v_j qu'il souhaiterait atteindre

$g_j^{\text{Ref}} := v_j, \forall j \in M_k$

$\underline{g}_j^{\text{Ref}} := g_j(a_k), \forall j \notin M_k$ {mise à jour du point de référence}

$A_{k+1} := A$ {mise à jour de la zone d'intérêt}

$J_k := \{j \in M_k : v_j > g_j(a_k)\}$ (J_k est l'ensemble des critères sur lesquels on souhaite une amélioration)

Fin Si

Fin Si

$\lambda^{k+1} := 1 / (\underline{g}^* - \underline{g}(a_k))$ {mise à jour des coefficients d'importance}
 $k := k + 1$ {nouvelle itération}
 Retour à l'étape de calcul.

Cette méthode présente la particularité d'autoriser différents modes d'interaction au choix de l'interrogé. Le premier mode peut être considéré comme un mode par défaut ne requérant que de l'information qualitative, relativement simple à exprimer. Le second mode a pour but de permettre à l'interrogé, lorsqu'il le désire, d'exprimer une information plus précise.

7.3.2 Autres méthodes interactives en P. α

Le but de ce paragraphe est de décrire brièvement et de manière non formelle un certain nombre de méthodes interactives en P. α en présentant, pour chacune d'entre elles, son principe de fonctionnement et les références permettant au lecteur intéressé d'en approfondir l'étude ¹.

a) La méthode de Zionts et Wallenius (1976 et 1983)

Condition d'utilisation : Programmation linéaire multicritère.

Principe :

- Maximiser une somme pondérée des critères pour obtenir une proposition.
- Faire comparer cette proposition avec des actions qui lui sont voisines.
- Utiliser le résultat de ces comparaisons par paires pour introduire des contraintes sur les coefficients de la somme pondérée de manière à ce que ces coefficients soient compatibles avec les préférences exprimées. Choisir un jeu de coefficients compatible avec les contraintes et retour à la maximisation de la somme pondérée.

Commentaires :

¹ Pour plus de détails, on pourra se reporter à Vanderpooten et Vincke (1989) ainsi qu'à Steuer (1986).

– La méthode est restreinte au cadre de la programmation linéaire multicritère. Les propositions faites par la méthode correspondent toujours à des sommets du polyèdre des solutions réalisables (cf. 7.2.3), ce qui apparaît restrictif.

– De même que dans la méthode GDF, on peut montrer que la méthode conduit nécessairement à présenter, à un interrogé répondant aux questions posées en conformité avec une fonction d'utilité $U(g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x}))$ possédant certaines propriétés de concavité, un des sommets du polyèdre maximisant cette fonction au bout d'un certain nombre d'itérations.

– De nombreuses extensions de cette méthode ont été proposées pour traiter le cas de la programmation linéaire entière et celui où A est défini par une liste d'actions (cf. Zionts (1977 et 1981)).

– Le volume de calcul demandé par la méthode est important. A chaque étape de dialogue, l'interrogé doit répondre à de nombreuses questions.

b) La méthode de Vincke (1976)

Condition d'utilisation : Programmation linéaire multicritère.

Principe : Déterminer une première proposition de même que dans STEM. Utiliser ensuite les facilités offertes par la méthode du simplexe en termes d'analyse de sensibilité pour déterminer une nouvelle proposition.

Commentaires : La méthode est restreinte au cadre de la programmation linéaire multicritère. Dans ce cadre, elle offre, avec un faible volume de calcul, la possibilité à l'interrogé d'explorer très librement l'ensemble A et/ou de redéfinir celui-ci.

c) La méthode du point de référence (Wierzbicki (1980 et 1982))

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'interrogé spécifie, à chaque étape de dialogue, un ou plusieurs points de référence. La phase de calcul consiste alors à déterminer une ou plusieurs propositions compte tenu des points

de référence.

Commentaires :

– Cette méthode, très souple, peut être mise en œuvre de bien des façons. Elle autorise une exploration très libre de l'ensemble A.

– Déterminer des points de référence à chaque étape de dialogue ne semble pas une chose aisée. L'information demandée est de nature quantitative.

– Les points de référence peuvent correspondre ou non à des actions de A. Dans le second cas, les propositions sont construites en déterminant les actions de A les plus proches du point de référence. Dans le premier, elles correspondent à des actions efficaces se situant dans la direction indiquée par les points de référence ¹.

d) La méthode de Steuer et Choo (1983) ²

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'étape de calcul consiste à déterminer un grand nombre d'actions efficaces en utilisant une métrique de Tchebychev augmentée (r.7.2.3) et en utilisant diverses pondérations. Ces actions sont présentées à l'interrogé qui indique celle qu'il préfère. On retourne alors à l'étape de calcul en restreignant l'ensemble des pondérations à des pondérations "proches" de celle ayant permis d'obtenir la solution préférée par l'interrogé.

Commentaires :

– Cette méthode simple requiert de nombreux calculs, à la fois pour déterminer les actions efficaces et pour choisir adéquate-

¹ On peut utiliser pour cela une des fonctions d'agrégation temporaire dont il a été question à la fin du 7.2.3, par exemple la fonction d'agrégation temporaire utilisée dans la méthode de Vanderpooten au 7.3.1.4.

² Voir aussi Meziani (1987) et, dans un autre contexte, la méthode FLIP de Slowinski (1990).

ment les divers jeux de pondérations de manière à bien couvrir l'ensemble des actions efficaces.

– Les possibilités d'apprentissage par essai et erreur existent dans la méthode mais sont fortement contraintes.

e) La méthode de Korhonen et Laakso (1986)

Condition d'utilisation : Aucune.

Principe : L'interrogé spécifie, à chaque étape, un point de référence. La comparaison entre ce point de référence et la proposition antérieure indique une direction qui est projetée sur l'ensemble des actions efficaces de A. On recherche alors une nouvelle proposition sur la courbe qui résulte de la projection.

Commentaires :

– Cette méthode est très souple et permet une exploration libre de l'ensemble A.

– De même que pour la méthode du point de référence, la détermination, à chaque étape, d'un nouveau point de référence ne va pas sans poser de problèmes.

– Tout comme dans la méthode de Zionts et Wallenius, on peut montrer que cette méthode conduit à proposer, à un interrogé répondant aux questions en conformité avec une fonction d'utilité pseudo-concave, l'action maximisant cette fonction au bout d'un certain nombre d'itérations.

f) La méthode PRIAM (Lévine et Pomerol (1986))

Condition d'utilisation : Ensemble A défini en extension.

Principe : Améliorer itérativement une proposition par un relèvement progressif de niveaux d'exigence minimale sur l'ensemble des critères.

Commentaires :

– La méthode autorise une exploration très libre de A et permet la mise en œuvre de raisonnements essais-erreurs par la

fixation de niveaux d'exigences révocables.

– A chaque étape de dialogue, l'interrogé doit spécifier des niveaux d'exigence minimales et indiquer si ceux-ci sont révocables ou irrévocables. Ceci suppose un effort cognitif important. La méthode assiste l'interrogé en lui fournissant le nombre d'actions dont les performances sont supérieures ou égales aux niveaux d'exigence envisagés.

– Une extension de la méthode a été proposée dans le cadre de la programmation linéaire multicritère (cf. Pomerol et Trabelsi (1987)).

7.4 MÉTHODES INTERACTIVES DANS UNE PROBLÉMATIQUE DE TRI OU DE RANGEMENT

On a évoqué, au 7.2.1, la difficulté qu'il y a à concevoir une méthode interactive en $P.\beta$ et $P.\gamma$. Dans ces problématiques, les propositions faites à l'interrogé se présentent sous la forme de règles d'affectation ou de rangement, éventuellement illustrées sur un sous-ensemble de A judicieusement choisi et il n'est pas aisé de faire réagir l'interrogé sur des propositions aussi complexes. A notre connaissance, aucune méthode interactive en $P.\beta$ n'a été proposée à ce jour ¹. On se contentera ici de décrire brièvement une méthode interactive ² en $P.\gamma$: PREFCALC ³. Cette méthode repose sur un concept d'agrégation-désagrégation des préférences ⁴ et sur une technique particulière de régression ordinale ⁵.

La méthode PREFCALC vise à construire, de manière interactive, une règle de classement se présentant sous la forme

¹ On pourra cependant consulter Massaglia et Ostanello (1991).

² Pour d'autres méthodes interactives en $P.\gamma$, on pourra consulter Korhonen et Soismaa (1981) ou Korhonen (1986).

³ Cf. Jacquet-Lagrèze (1983). Des propositions d'extension de cette méthode figurent dans Jacquet-Lagrèze (1990).

⁴ Cf. Jacquet-Lagrèze (1978).

⁵ Cf. Jacquet-Lagrèze et Siskos (1986) et Siskos et Yannacopoulos (1985).

d'une fonction d'utilité additive (cf. (r.4.2.1)) sur un ensemble A défini en extension. On cherche donc à construire un vrai-critère de synthèse

$$g(a) = \sum_{j=1}^n v_j(g_j(a)).$$

La règle de classement associée conduit alors à un s.r.p. (P, I) ayant une structure de préordre complet en posant :

$$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

$$a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b).$$

On a vu, au 4.2, qu'un critère de synthèse du type (r.4.2.1) peut toujours, dans les problèmes réels, se mettre sous la forme équivalente (rappelons que e_i^* et e_{i*} désignent respectivement la meilleure et la pire évaluation sur l'échelle E_i du critère g_i) :

$$g(a) = \sum_{j=1}^n u_j(g_j(a))$$

avec

$$u_j(e_{j*}) = 0, \forall j \in F \text{ et} \quad (r.7.3.1)$$

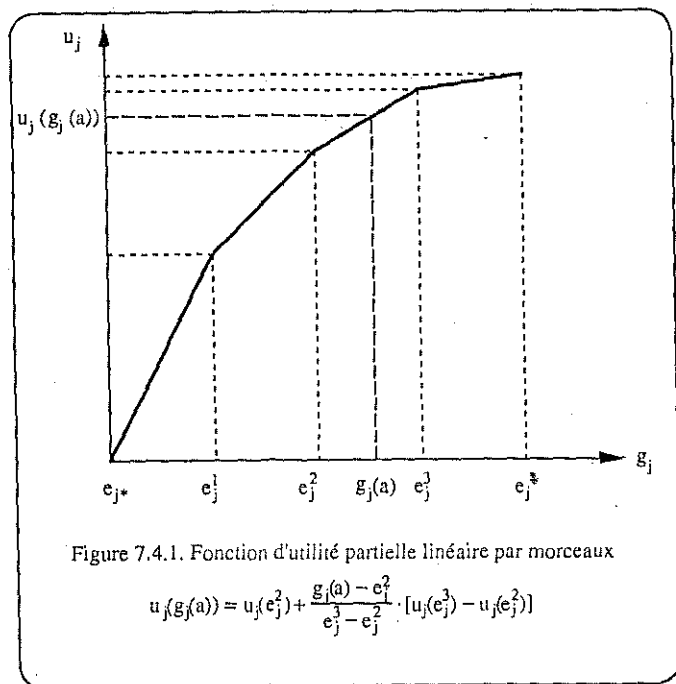
$$\sum_{j=1}^n u_j(e_j^*) = 1, \text{ les fonctions } u_j \text{ étant croissantes.}$$

La méthode PREFCALC cherchera à construire un vrai-critère de synthèse du type (r.7.3.1) où chaque fonction u_j est linéaire par morceaux. En découpant l'intervalle $[e_{j*}; e_j^*]$ en m_j intervalles d'égale amplitude $[e_{j*}; e_j^1]; [e_j^1; e_j^2], \dots, [e_j^{m_j-1}; e_j^*]$, on a (cf. figure 7.4.1) :

$$u_j[g_j(a)] = u_j[e_j^k] + \frac{g_j(a) - e_j^k}{e_j^{k+1} - e_j^k} [u_j(e_j^{k+1}) - u_j(e_j^k)]$$

lorsque $g_j(a) \in [e_j^k; e_j^{k+1}]$. (r.7.3.2)

Le vrai-critère (r.7.3.1) sera alors complètement défini par la donnée, sur chaque critère g_j , des m_j valeurs $u_j(e_j^1)$, $u_j(e_j^2)$, ..., $u_j(e_j^{m_j-1})$, $u_j(e_j^*)$. Ce sont ces $n \times m_j$ valeurs que la méthode PREF-CALC cherche à bâtir de manière interactive.

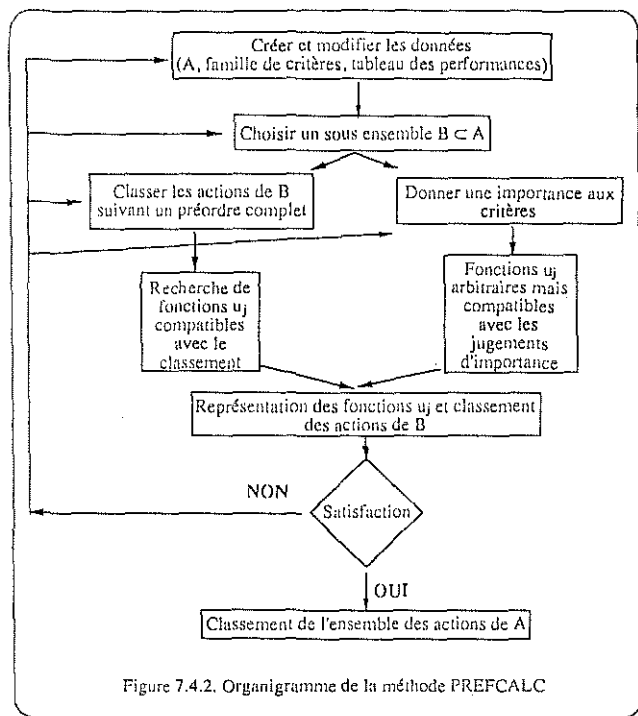


La méthode se déroule comme indiqué à la figure 7.4.2. On en détaille ci-après les principales étapes.

1) La méthode invite tout d'abord l'interrogé à choisir un sous-ensemble d'actions potentielles $B \subset A$ sur lequel les différentes règles de classement seront illustrées. Cette illustration est un élément crucial de la dynamique de l'interaction. Il importe donc que :

- le sous-ensemble B soit de taille suffisamment restreinte pour que l'illustration d'une règle de classement sur B ne constitue pas une information trop complexe ;

– le sous-ensemble B comprend des actions dont l'interrogé a déjà une bonne connaissance.



2) Une fois choisi le sous-ensemble B, deux modes d'interaction sont proposés à l'interrogé :

- dans le mode direct, celui-ci est invité à indiquer, de manière qualitative, l'importance relative des critères ;
- dans le mode indirect, celui-ci est invité à ranger les actions de B suivant un préordre complet.

3) La méthode fournit alors à l'interrogé une représentation graphique des fonctions u_j conforme à la figure 7.4.1 et illustre le critère de synthèse ainsi défini sur les éléments de B. C'est autour de cette représentation graphique et de cette illustration que l'interaction se déroule dans PREFCALC.

Si l'interrogé a utilisé le mode direct, les fonctions u_j proposées ont une forme arbitraire et sont telles que :

$$\begin{aligned} g_j \text{ jugé plus important que } g_i &\Rightarrow u_j(e_j^*) > u_i(e_i^*) \\ g_j \text{ jugé aussi important que } g_i &\Rightarrow u_j(e_j^*) = u_i(e_i^*). \end{aligned}$$

Si l'interrogé a utilisé le mode indirect en rangeant les actions de B suivant un préordre complet, on propose des fonctions u_j compatibles avec le classement proposé (en ce sens que la règle de classement qu'elles induisent donne sur B le même préordre que celui spécifié par l'interrogé).

Pour trouver une fonction d'utilité compatible avec le classement donné, on opère comme suit.

Considérons le programme linéaire suivant ¹ (cf. 4.2.1.3) :

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{a \in B} \sigma(a) \\ \text{s.c. } & \sum_{j=1}^n u_j(e_j^*) = 1 \\ & u_j(e_j^*) \geq u_j(e_j^{m-1}) \geq \dots \geq u_j(e_j^1) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & g(a) - g(b) \geq \varepsilon \text{ si } a \text{ est préférée à } b \\ & g(a) - g(b) = 0 \text{ si } a \text{ est indifférente à } b \end{aligned}$$

où

- ε est un nombre strictement positif et "petit",
- toutes les variables sont positives ou nulles,
- $g(a) = \sum_{j=1}^n u_j(g_j(a)) + \sigma(a)$, $u_j(g_j(a))$ étant défini par (r.7.3.2).

Il est facile de montrer que si, à l'optimum, la valeur de la fonction économique de ce programme linéaire est nulle, il existe un jeu de fonctions u_j permettant de restituer parfaitement le classement des actions de B qui a été donné. Ce jeu de fonctions n'est pas unique. On sait ² qu'il en existe une infinité. On pourra avoir une idée de l'ensemble des fonctions permettant de

¹ Comme le suggèrent Siskos et Yannacopoulos (1985), on peut reformuler, de manière plus économique, ce programme linéaire.

² Voir par exemple Krantz et al. (1971, chapitre 9).

restituer le classement en recourant à des techniques de post-optimisation appropriées. Lorsque, à l'optimum, la valeur de la fonction économique de ce programme linéaire est non nulle, il n'existe pas de fonctions permettant de restituer le classement donné. On peut, ici aussi, recourir à des techniques de post-optimisation pour palier l'arbitraire du critère d'optimisation utilisé. Notons que PREFCALC ne propose de fonctions u_j que si la restitution du classement donné est parfaite. La méthode propose alors une fonction "moyenne" parmi l'infinité de celles qui restituent parfaitement le classement.

4) L'interrogé est ainsi confronté à une représentation graphique des fonctions u_j , la règle de classement qu'elles induisent étant illustrée sur B. Celui-ci peut alors :

— soit accepter les fonctions proposées qui sont alors utilisées pour ranger l'ensemble des actions de A (fin de la méthode) ;

— soit réagir en ¹ :

- . modifiant le nombre de morceaux linéaires sur chaque critère,
- . modifiant l'ensemble B,
- . modifiant le classement des actions de B ou l'importance donnée aux divers critères,
- . modifiant les données de départ (ensemble A, famille de critères, tableaux des performances),
- . modifiant directement certains paramètres des fonctions u_j .

Notons que l'existence d'un logiciel convivial et performant a grandement contribué à la diffusion de cette méthode et à son application à des problèmes réels ^{2 3}.

¹ L'interrogé dispose des mêmes moyens de réaction, à l'exception du dernier, si le mode indirect a été utilisé et s'il a été impossible de trouver une fonction restituant parfaitement le classement donné.

² Voir par exemple Jacquet-Lagrèze et Shakun (1984).

³ Une méthode voisine a été proposée par Yannacopoulos (1985) sous le nom de MINORA.

Jacquet-Lagrèze et al. (1987) ont proposé d'utiliser PREF-CALC pour résoudre, de manière interactive, des programmes linéaires multicritères dans une problématique de choix. Cette méthode, dite méthode en trois phases, consiste :

- à déterminer un petit nombre d'actions efficaces contrastées, par exemple en minimisant une distance de Tchebychev à un point idéal pour diverses pondérations ;
- à estimer, en utilisant PREFCALC, une fonction d'utilité additive linéaire par morceaux sur le sous-ensemble d'actions efficaces obtenu à l'étape précédente ;
- à utiliser des résultats classiques de programmation linéaire pour trouver l'optimum de la fonction d'utilité additive linéaire par morceaux sur A^1 .

¹ Voir aussi Siskos et Despotis (1989). Dans la troisième phase, on n'est sûr d'obtenir un optimum global que si les fonctions d'utilité partielles sont concaves. Sur ce point, on pourra se reporter à Despotis et Yannacopoulos (1989).

Chapitre 8

ANALYSE DES RÉPONSES À UN APPEL D'OFFRES : AIDE À LA SÉLECTION D'UNE MACHINE À TRIER LES PAQUETS

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, on présente un cas réel d'aide à la décision qui illustre bon nombre des aspects conceptuels et méthodologiques abordés dans les chapitres 1 à 6. L'environnement et l'origine de l'étude sont brièvement indiqués dans le passage introductif de ce chapitre.

Au 8.1, on expose tout d'abord le double problème d'évaluation et de sélection auquel la Direction Générale des Postes était confrontée. La section se termine en précisant comment l'action-type a été définie et quelle a été la problématique retenue.

Au 8.2, après avoir fourni quelques explications sur ce qu'est un système de tri-paquets, on expose en quoi consiste la procédure d'évaluation et la manière dont elle implique les différents services de la Poste concernés par le problème. Le dernier paragraphe de la section traite de l'élaboration des critères et de la prise en compte des sources d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination.

La section 8.3 est tout d'abord consacrée à la démarche qui a abouti à une famille de onze, puis de douze, critères. Les neuf offres qui forment l'ensemble A ainsi que le tableau de performances associé sont ensuite présentés. La section s'achève par la discussion qui a conduit au choix de deux méthodes pour éclairer la décision.

La section 8.4 est consacrée à la mise en œuvre d'ELECTRE IS : choix des valeurs à attribuer aux coefficients d'importance k_j et aux seuils de veto v_j , application de la méthode à une première relation S de référence, finalement analyse de robustesse et principales conclusions.

Dans la dernière section, le lecteur trouvera d'une part la prescription finale de l'équipe d'étude et, d'autre part, les extraits du compte-rendu de la dernière séance du comité exposant la nature et les motifs de la décision arrêtée.

L'administration française de la Poste a engagé, dans les années 1970, un programme d'automatisation des centres de tri composant le réseau de distribution des lettres et des paquets postaux. Dans le cadre de ce programme, la Direction Générale des Postes (DGP) a décidé, à l'automne 1983, de lancer un processus visant à équiper, à brève échéance, une vingtaine de centres de tri-paquets de machines automatiques.

Pour choisir la conception du système de tri qui répondrait au mieux aux besoins de la Poste, la DGP a demandé le concours d'une société d'étude ¹. Ce choix de conception concernait plusieurs secteurs de la Poste. Il s'agissait non seulement d'analyser les conséquences du choix pour chacun de ces secteurs mais également d'associer ces derniers au processus d'évaluation des différentes conceptions de systèmes de tri et, par là, d'impliquer chacun de ces secteurs dans le processus de sélection. Un appel d'offres, adressé aux principaux constructeurs mondiaux, devait permettre de prendre en considération les différents systèmes de tri déjà conçus et expérimentés.

La société d'étude a estimé qu'une des tâches centrales consistait à élaborer un outil d'évaluation des offres faites par les constructeurs permettant ensuite de les apprécier sur la base d'un petit nombre de critères synthétiques. Ces critères devraient finalement guider la sélection d'une offre. Un premier examen des conséquences découlant de l'implantation d'une machine a mis en évidence leur grande complexité et leur forte hétérogénéité. Pour bâtir l'outil d'évaluation des offres dont il vient d'être question, l'équipe d'étude a, de ce fait, souhaité prendre appui sur la méthodologie proposée dans les chapitres 8 et 9 de MMCAD ². L'un d'entre nous ³ est alors intervenu dans l'étude en tant qu'expert. A ce stade, l'équipe d'étude n'avait que très peu

¹ en l'occurrence SEMA.METRA.

² Bien qu'en 1983 MMCAD n'ait pas encore été publié, les neuf premiers chapitres l'avaient été dans la série des Documents du LAMSADE. Les grandes lignes de cette méthodologie sont rappelées au chapitre 1.

³ en l'occurrence B. Roy.

d'informations sur ce que serait le nombre d'offres émanant des constructeurs. Elle ne pouvait préjuger des difficultés que présenterait la sélection finale. Ce chapitre vise à présenter les principales étapes de cette étude.

Dans une première section, nous exposons les problèmes d'évaluation et de sélection tels qu'ils ont été progressivement formulés. Nous décrivons ensuite les grandes lignes de l'outil d'évaluation des offres tel qu'il a été conçu. La section 8.3 est consacrée à la présentation de la famille cohérente de critères finalement retenus, des offres à évaluer, du tableau de performances associé et enfin à la discussion qui a conduit au choix d'une méthode pour éclairer la décision. Les deux dernières sections sont respectivement consacrées à la mise en œuvre de la méthode retenue (ELECTRE IS) et à une présentation commentée des résultats de l'étude.

8.1 LES PROBLÈMES D'ÉVALUATION ET DE SÉLECTION

8.1.1 Cadre général de l'étude

Un centre de tri postal traite (en 1983), selon son importance, de quelques milliers à quelques dizaines de milliers de paquets par jour qu'il s'agit de trier en une dizaine d'heures d'exploitation. On distingue, dans le tri postal, un tri "départ", qui intervient après la collecte des paquets dans les bureaux de poste, et un tri "arrivée" qui a lieu avant la distribution. Dans le type de centres qu'il s'agit d'automatiser, il est nécessaire, pour le tri départ, de séparer les paquets selon 60 flux distincts correspondant chacun à une direction d'expédition. Pour le tri arrivée, le nombre de directions à considérer est plus élevé. Il varie d'un centre à l'autre : il peut nécessiter de séparer jusqu'à 140 flux distincts. Ces flux peuvent être d'importance très inégale.

Une machine automatique de tri se caractérise notamment par le nombre de sorties physiques distinctes qu'elle comporte (davantage de précisions sur cette caractéristique ainsi que sur quelques autres sont données au 8.2.1). Pour trier selon m directions, il n'est pas nécessaire de disposer d'une machine

possédant au moins m sorties physiques : le tri peut en effet se faire avec la machine en deux phases successives et certains flux particulièrement faibles peuvent, dans un premier temps, être regroupés pour être ensuite séparés manuellement. Sur ces bases, des considérations d'ordre organisationnel et économique¹ ont conduit la poste à demander à chaque constructeur souhaitant soumettre une offre :

- de proposer une variante de base V^0 comportant au moins 60 sorties physiques ;
- d'établir des propositions techniques et économiques pour trois variantes de machines V^1 , V^2 et V^3 correspondant respectivement à 80, 100 et 140 directions d'exploitation.

Un appel d'offres a été lancé auprès des grands constructeurs mondiaux. Il devait permettre à chacun d'eux de concevoir une ou plusieurs offres adaptées aux spécificités de la Poste (notamment pour ce qui concerne le nombre de directions de tri, le débit, la fiabilité, l'éventail des formes, des volumes et des poids des paquets, ...) en fonction de sa technologie propre.

Pour apprécier les conséquences de la mise en place d'un système donné et acquérir la conviction qu'il répondait mieux ou moins bien aux besoins de la poste qu'un autre système, les responsables de la DGP ont estimé que le domaine d'étude concernait les cinq "sphères" suivantes au sein de la poste :

- la *sphère technique* des services qui participent à la définition des caractéristiques techniques de la machine : technologie, type d'"antenne d'injection" des paquets dans le système de convoyage, mode et vitesse de convoyage, réception des paquets, ... ;
- la *sphère local machine* du personnel concerné par les conditions de travail : ergonomie des postes de travail, niveau sonore, facilité d'utilisation, ... ;

¹ Le lecteur trouvera dans Renard (1986) quelques précisions supplémentaires sur cet aspect du problème. Précisons que, pour rédiger ce chapitre 8, nous avons pris appui sur ce texte ainsi que sur divers documents de SEMA.METRA rédigés par MM. Jollain et Renard.

- la *sphère gestion du centre de tri* intéressée par l'écoulement du trafic, le respect des plages horaires de tri, l'organisation interne du centre, la souplesse d'affectation du personnel, ... ;
- la *sphère gestion centrale* intéressée par les coûts d'investissement, d'exploitation et de maintenance, la modularité, l'organisation des réseaux d'acheminement des paquets, l'équipement d'autres centres, ... ;
- la *sphère clients* préoccupée par la qualité et le coût du service.

En relation avec ces cinq sphères, la DGP a constitué un comité d'évaluation devant piloter l'élaboration de l'outil d'évaluation des offres, le valider et l'exploiter en vue de la prise de décision. Précisons que cet outil devait prendre en compte les conséquences de l'implantation, dans la vingtaine de centres envisagés, de tout système offert relativement à chacune des cinq sphères ci-dessus. Les objectifs suivants ont été, en collaboration avec la DGP, assignés à cet outil d'évaluation :

1°) Permettre de dépouiller, selon un schéma commun faisant intervenir des évaluations concrètes sur des dimensions clairement définies, tout dossier susceptible de parvenir en réponse à l'appel d'offres.

2°) Résumer chaque offre (afin qu'elle puisse aisément être comparée aux autres) à l'aide d'un petit nombre de performances résultant de critères sous-agrégeant les évaluations ci-dessus selon des points de vue homogènes.

3°) Faire participer les services concernés des cinq sphères ci-dessus au choix des critères finaux et à la procédure d'évaluation des offres sur les dimensions qui sont de leur compétence.

Une fois ces objectifs atteints, il s'agit de comparer les offres selon un point de vue global prenant en compte toutes leurs performances. L'objectif final est de faire émerger l'offre censée répondre le mieux aux besoins de la poste et justifier ainsi la sélection du système à planter dans la vingtaine de centres de tri concernés.

8.1.2 Cahier des charges et appel d'offres

L'appel d'offres a été conçu par la société d'étude selon une méthode dite de "Conception à Coût Objectif" (CCO). La méthode CCO aboutit à la détermination d'une norme de coût, appelée "coût objectif", que la machine de série à construire (ici la variante V⁰) ne doit en aucun cas dépasser tout en respectant les exigences du cahier des charges. Ce coût objectif est déterminé par des considérations de rentabilité ainsi que par un examen des possibilités techniques fondé sur le coût de réalisation de systèmes se rapprochant, autant que faire se peut, de la machine à réaliser. Cette méthode ¹ conduit à définir un cahier des charges qui, vis-à-vis de certaines spécifications, laisse une relative marge de flexibilité au constructeur : dans la limite du coût qui lui est assigné, il lui appartient de rechercher la solution qui réalise les meilleures performances. Pour pouvoir apprécier avec suffisamment de finesse les différentes options prises par un constructeur donné, il est nécessaire que celui-ci établisse des propositions techniques très précises accompagnées des performances qu'il garantit, cela pour chacune des quatre variantes. Il doit fournir des plans, schémas et descriptifs cotés pour tous les sous-ensembles de la machine.

Le constructeur qui verra l'une de ses offres sélectionnée aura, dans un premier temps, à réaliser un prototype dont il devra préciser le coût (lequel n'est pas plafonné). Ce n'est que dans un second temps que le marché de la série pourra être conclu sur la base du coût unitaire (au plus égal au coût objectif) sur lequel s'est engagé le constructeur.

Afin de rendre possible une analyse systématique des dossiers de réponse à l'appel d'offres, le cahier des charges a été complété par un questionnaire. Chaque constructeur devait y répondre séparément pour chacune de ses offres ². Ce sont les renseignements contenus dans les réponses à ce questionnaire, corroborés,

¹ Pour plus de précisions sur la méthode CCO, voir Tassinari (1983) et Petitdemange (1985).

² Rien n'interdit en effet qu'un même constructeur propose plusieurs offres.

voire corrigés et/ou complétés, par les informations contenues dans le reste du dossier qui devaient être exploités par les agents compétents pour asseoir et justifier leurs évaluations. Il est important de souligner ici qu'un tel questionnaire n'a pu être conçu qu'une fois achevé le travail décrit au 8.2. Ce questionnaire n'ayant pas été initialement prévu, le lancement de l'appel d'offres a dû être retardé de près d'un mois. Ce retard a été sans aucun doute très largement rattrapé au moment du dépouillement. Il s'est en effet avéré que, grâce à ce questionnaire, on obtenait bien toutes les informations nécessaires et que celles-ci apparaissaient dans les dossiers selon un canevas approprié aux opérations d'évaluation, ce qui a permis un travail systématique et rapide dans la phase de dépouillement.

8.1.3 Définition des actions potentielles et choix de la problématique

La modélisation que nous avons adoptée consiste à définir l'action-type (c'est-à-dire ce que recouvre ici le concept d'action, cf. 1.2) comme étant une offre bien définie a_i émanant d'un constructeur identifié. Précisons que l'indice i caractérise à la fois le constructeur et l'une de ses offres lorsqu'il en formule plusieurs. Cette option de modélisation ne s'impose pas de toute évidence.

Chaque offre a_i fait intervenir quatre composantes correspondant à la façon dont le constructeur adapte la machine qu'il propose aux quatre variantes demandées V^0, V^1, V^2, V^3 (cf. 8.1.1). Chacune de ces composantes peut être vue comme une action a_{ij} , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. L'évaluation de a_i peut, au moins sur certaines des dimensions, différer significativement selon que l'on considère a_i^0, a_i^1, a_i^2 ou a_i^3 . Il s'ensuit qu'une offre a_i peut être jugée mieux adaptée aux besoins de la Poste qu'une offre a_j , lorsque l'on ne s'intéresse qu'à la variante V^0 alors que, relativement à une ou plusieurs des autres variantes, c'est a_j qui peut s'avérer préférable à a_i . Afin de pouvoir discuter si nécessaire certains aspects du problème, les actions $a_i^0, a_i^1, a_i^2, a_i^3$ ont été évaluées séparément, sur chacune des dimensions, où elles pouvaient ne pas aboutir à la même évaluation.

Pourquoi n'avoir pas conduit l'aide à la décision en ne raisonnant que sur l'ensemble des actions de type a_i^j ? Tous les centres devant être équipés de la même machine (dans une variante adaptée aux particularités du centre), c'est entre les offres a_i et non entre leurs adaptations aux variantes que devait

s'exercer le choix final. Ceci explique l'option de modélisation adoptée : l'action-type est l'offre a_i et les a_j n'en sont que des composantes. Cette option impliquait toutefois de pouvoir disposer, sur chacune des dimensions susceptibles de discriminer les différentes variantes, d'une évaluation synthétique. Des règles précises (faisant appel à des considérations trop techniques pour être abordées dans le présent chapitre) propres à chacune des dimensions considérées ont été adoptées pour définir cette synthèse.

Une fois définie la famille cohérente de critères et construit le tableau de performances (cf. 1.5), on pouvait s'attendre à être confronté à l'une des deux situations suivantes :

– *situation n° 1* : les actions sont très peu nombreuses et les vecteurs de performances qui les caractérisent permettent des comparaisons suffisamment faciles pour qu'émerge un consensus au sein du comité d'évaluation sur l'offre à sélectionner ;

– *situation n° 2* : les offres sont trop nombreuses et/ou la comparaison des vecteurs de performances qui leur sont associés (compte-tenu notamment des seuils de discrimination) est trop délicate pour qu'émerge un consensus au sein du comité d'évaluation sur l'offre à sélectionner.

Dans la situation n° 1, il n'est pas nécessaire de dépasser la problématique de la description P.δ (cf. 1.7). Dans la situation n° 2, il convient d'élaborer un ou plusieurs modèles de préférences globales permettant au comité d'évaluation de comparer les offres afin d'en sélectionner une, éventuellement plusieurs, dans un premier temps, si aucune offre ne paraît véritablement s'imposer sur la base du tableau de performances. L'obligation de ne retenir finalement qu'une seule offre pour équiper les différents centres n'interdit pas que, dans un premier temps, deux prototypes (trois serait un maximum pour des raisons de coût) soient construits. Dans ces conditions, c'est la problématique du choix P.α qui a été retenue.

8.2 ÉVALUATION DES OFFRES

8.2.1 Analyse fonctionnelle succincte d'un système automatique de tri-paquets

Un centre de tri équipé d'une machine automatique à trier les paquets constitue un système complexe. On peut schématiquement le décomposer en cinq sous-ensembles ayant chacun une fonction bien caractérisée : l'alimentation, le codage, le tri, le conditionnement, le contrôle commande. On trouvera ci-après une brève description de ces sous-ensembles tels qu'ils ont été décrits dans l'appel d'offres.

Alimentation : Les paquets arrivent en vrac et à découvert. Le système doit donc être capable de :

- recevoir les paquets en vrac ;
- répartir les paquets entre les antennes utilisées ;
- alimenter chaque antenne sans discontinuité lorsque le système est lui-même alimenté de manière continue et réguler cette alimentation afin d'équilibrer la charge de chaque poste de travail ;
- faciliter le travail de l'opérateur en évitant que les paquets ne s'accumulent en grand nombre sur son plan de travail.

Codage : Le module de base est conçu pour être alimenté par trois antennes avec un seul opérateur pour chacune ; chaque antenne doit :

- pouvoir être mise en service ou hors service selon les besoins de l'exploitation ;
- faciliter le redressage des paquets pour simplifier la lecture de l'adresse par l'agent ;
- saisir l'adresse pour affecter une direction de déversement à chaque paquet d'après le code frappé par l'agent sur un clavier une main (le code à générer est le code postal à cinq chiffres décimaux) ;
- injecter automatiquement les paquets codés sur le système de tri ;
- permettre l'évacuation des paquets inadmis vers des corbeilles à fond mobile ;
- permettre le retrait des paquets détériorés et des détritrus divers.

Tri : Le rôle de ce sous-ensemble est :

- de recevoir les paquets ;
- de convoier ces paquets ;
- de les dévier vers leur direction d'affectation.

Le (les) transporteur(s) a (ont) pour rôle :

- de recevoir les paquets en un ou plusieurs points d'injection ;
- de les transporter vers une ou plusieurs rangées de sacs ou de conteneurs ;
- de déverser chaque paquet vers sa destination.

Le choix du dispositif de transport des paquets est laissé au savoir-faire du fournisseur. Les contraintes à satisfaire résultent d'une part des conditions d'admissibilité des paquets, d'autre part des performances demandées relatives à la fiabilité, au bruit, à la hauteur de chute et à la vitesse des paquets.

Les paquets sont introduits dans des sacs ou dans des conteneurs qui correspondent chacun à une séparation.

Conditionnement : Le rôle du système est :

- d'introduire les paquets dans les sacs ;
- d'introduire les paquets dans les conteneurs ;
- de stocker les colliers et les liens ;
- de permettre l'évacuation des sacs sur les chariots ;
- de permettre l'évacuation des conteneurs.

Pour les directions en sacs, les sacs vides seront accrochés sur un dispositif mobile ou non permettant une permutation de sacs avec un effort minimum. Le système doit favoriser l'arrivée des paquets selon leur plus grande dimension.

Pour les directions en conteneurs, il faut veiller à conserver des dégagements suffisants permettant une circulation aisée des conteneurs. Des signalisations lumineuses sont prévues pour informer les agents des saturations.

Contrôle commande : Le système de contrôle commande assure l'ensemble des fonctions de pilotage et de supervision. Il peut être centralisé ou réparti ou comprendre des éléments centralisés et des éléments de logique répartie. Il gère les automatismes. Il produit, met à jour et sauvegarde les fichiers de tri. Il édite les informations statistiques.

8.2.2 Conséquences élémentaires, dimensions et barèmes de notation

La Poste avait eu l'occasion, dans le passé, d'exploiter, à titre très expérimental, certaines machines de tri-paquets. Prenant appui sur ces premiers essais et faisant intervenir divers représentants des cinq sphères concernées par l'automatisation (cf. 8.1.1), il a été possible de dresser une première liste (jugée exhaustive) des

effets, aspects ou attributs d'une machine de tri-paquets à prendre en considération pour évaluer et comparer les offres. Cette première liste de conséquences (cf. 1.5) a été limitée à celles sur lesquelles les offres pouvaient et devaient effectivement être différenciées. Une investigation plus poussée a ensuite permis :

- d'identifier, en termes précis, le contenu de chacune de ces conséquences afin que les différents acteurs en comprennent la signification ;
- de donner une définition opérationnelle de ce par quoi elles se manifestent concrètement lorsque la machine mise en place correspond à l'offre considérée.

A chacune des **conséquences élémentaires** ainsi définies, il a été associé une **échelle** de façon à en faire une **dimension**. Dans la suite de ce chapitre, on utilisera indifféremment les termes dimension et conséquence élémentaire).

Cette démarche a donné naissance à une liste provisoire de 53 conséquences élémentaires ; ces dernières ont été légèrement remaniées pour aboutir à une liste définitive n'en comportant plus que 48 (cf. tableau 8.2.1). Avant d'illustrer, sur quelques unes de ces conséquences élémentaires, ce que recouvrent les intitulés correspondants du tableau 8.2.1 ainsi que la manière dont sont définis les échelons des dimensions concernées, nous croyons utile d'apporter quelques précisions sur la démarche qui a conduit à retenir ces 48 dimensions pour définir le **spectre des conséquences** (cf. 1.5 et glossaire du chapitre 1) sur lequel toute offre pouvait et devait être analysée.

Dès le début de la démarche, on a veillé à ce que les représentants des cinq sphères concernées par l'automatisation soient impliqués. Leur connaissance du terrain, leur expérience en matière d'acheminement de paquets jointes au bilan des essais d'automatisation antérieurs et aux compétences techniques et méthodologiques des hommes d'étude ont été largement mobilisées dès la phase initiale d'investigation, laquelle a permis d'aboutir à la première liste. Pour que cette liste prenne en compte, de façon exhaustive, les "objectifs" (difficiles à expliciter) de la DGP ainsi que les souhaits exprimés par les différents

services concernés par l'automatisation, huit grandes *catégories de préoccupations* ont été introduites. Elles ont servi de guide tout au long de l'élaboration de la liste. Elles concernent :

- l'ergonomie ;
- l'exploitation ;
- l'entretien et la maintenance ;
- l'implantation ;
- les coûts ;
- le délai de développement ;
- les possibilités d'évolution technique ;
- la qualité clients.

Tableau 8.2.1 : Intitulés des 48 conséquences élémentaires finalement retenues

N°	Liste des dimensions
1	Qualité des postes de codage
2	Hauteur d'accrochage des sacs postaux
3	Facilité de permutation des sacs postaux
4	Facilité de permutation et prépositionnement des chariots porte-sacs et conteneurs de paquets
5	Qualité du dispositif de dépoussiérage
6	Facilité de circulation des personnes à proximité de la machine de tri
7	Hauteur des planchers des postes de travail
8	Niveau sonore de la machine au niveau des postes de travail
9	Niveau de vibration de la machine au niveau des postes de travail
10	Esthétique de l'ensemble de tri
11	Sécurité du personnel
12	Souplesse d'affectation des antennes de codage
13	Facilité de dialogue avec le calculateur
14	Surveillance du poste de Contrôle-Commande de la machine

15	Nature des informations statistiques d'exploitation fournies par le système
16	Facilité d'utilisation de la machine
17	Détection des directions physiques de tri saturées par les paquets
18	Présence de dispositifs évitant les incidents de tri
19	Vitesse de convoyage des paquets
20	Forme des paquets admis sur la machine de tri
21	Facilité d'évacuation des paquets inadmis par la machine au niveau postes de codage
22	Durée de changement de tâche
23	Facilité de circulation des chariots porte-sacs et conteneurs de paquets
24	Nombre d'opérateurs chargés de la fermeture des sacs postaux
25	Tri manuel entraîné par la présence de paquets refusés par la machine de tri
26	Débit de paquets triés
27	Maintenance préventive nécessaire
28	Maintenance curative effectuée par le personnel d'exploitation
29	Consommation courante de pièces
30	Nature des informations statistiques concernant la maintenance fournies par le système
31	Risque d'incident machine de tri
32	Superficie de la machine de tri
33	Forme générale de la machine de tri
34	Adaptabilité de la machine au point d'alimentation en paquets dans salle de tri
35	Adaptabilité de la machine au point d'évacuation des sacs postaux dans salle de tri
36	Nombre de séparations physiques de tri des paquets
37	Adaptabilité du logiciel de tri à la lecture du code-barre

38	Adaptabilité "physique" de la machine à l'implantation d'un système de lecture code-barre
39	Coût des études de la machine de tri
40	Coût du prototype de la machine de tri
41	Coût de la machine de série
42	Conséquences d'une coupure ou micro-coupure de courant électrique
43	Risque de détérioration d'un paquet au cours de son convoyage sur la machine
44	Hauteur de chute d'un paquet en cours de son convoyage
45	Risque de fausse direction au moment de l'injection sur le transporteur de paquets
46	Risque de fausse direction au moment de l'expulsion du paquet dans la séparation de tri
47	Délai global de réalisation du prototype par le fournisseur
48	Expérience du constructeur dans les machines de tri de paquets

Remarque : La conséquence élémentaire n° 48 n'est apparue que plus tard dans l'analyse (cf. 8.3.2).

Pour cerner, en termes précis, les conséquences élémentaires et rendre possible une évaluation des offres sur chacune des 48 dimensions finalement retenues, on s'est efforcé de cerner des caractéristiques dont l'état pouvait, relativement à chaque offre, être appréhendé en termes concrets sur la base d'informations aussi fiables et objectives que possible. C'est en fonction de ce double souci de fiabilité et d'objectivité qu'ont été identifiées une ou plusieurs caractéristiques jugées particulièrement significatives de ce qu'il s'agit d'appréhender sur la base de l'intitulé de chaque conséquence élémentaire.

Nous illustrons ci-après, sur quelques exemples, ce que recouvrent les intitulés du tableau 8.2.1.

Qualité des postes de codage (conséquence élémentaire n° 1)

Pour apprécier une offre sur cette dimension, il convient de prendre en compte les trois caractéristiques suivantes :

- la hauteur du poste de travail de l'opérateur codeur ;
- l'existence d'un système d'égrenage des paquets ;
- le nombre d'opérations à effectuer par l'opérateur chargé du codage.

Facilité de permutation des sacs (conséquence élémentaire n° 3)

Deux caractéristiques doivent ici être prises en compte :

- existence d'un dispositif de permutation des sacs remplis de paquets ;
- existence d'une aire de dégagement aux pieds de l'opérateur chargé de fermer le sac rempli.

Facilité de dialogue avec le calculateur gérant le système de tri (conséquence élémentaire n° 13)

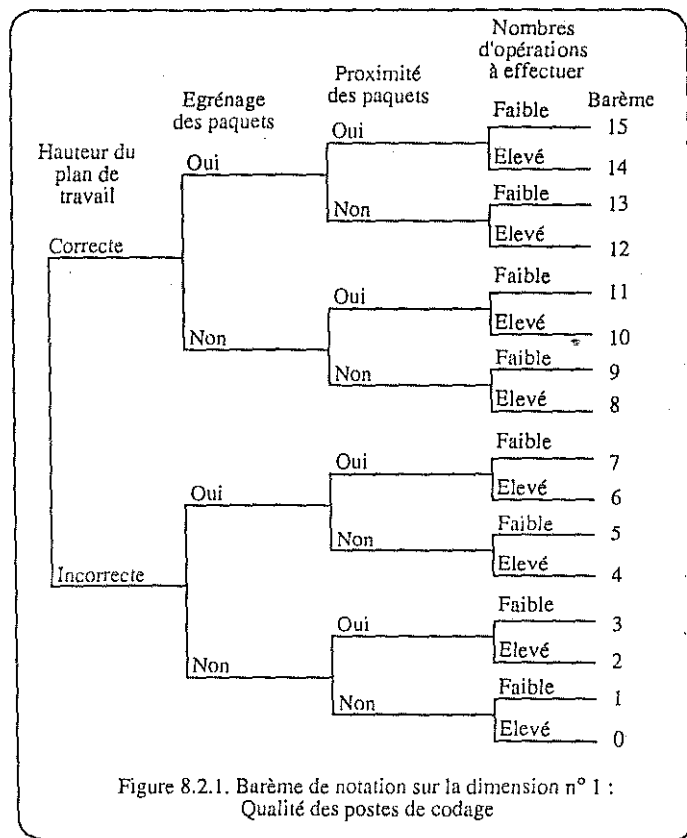
Les facteurs déterminants sont ici la forme et la richesse des messages envoyés par le calculateur au cours de l'utilisation de la machine.

Pour que la conséquence élémentaire n° j puisse être vue comme une dimension, on lui a associé une échelle de notations et un indicateur d'état γ_j (cf. 1.5). Cet indicateur (défini dans tous les cas comme étant ponctuel) consistait en une procédure, une règle ou une technique permettant d'associer, à chaque offre a_i , un unique échelon $\gamma_j(a_i)$ de l'échelle considérée. Cet échelon définit alors la note de l'offre sur la dimension. L'indicateur d'état γ_j a été complété par des seuils de dispersion servant à préciser, par excès et par défaut, la marge d'imprécision, d'incertitude ou d'indétermination qui entoure l'échelon retenu (cf. 1.6.3).

Pour chaque conséquence élémentaire, la définition précise de l'échelle à retenir, jointe à celle de la procédure, de la règle ou de

la technique constituant l'indicateur d'état, forment ce que l'on a appelé le **barème de notation des offres** sur la dimension considérée. Chacun a été élaboré en étroite collaboration avec le service qui devra l'appliquer pour évaluer les offres sur la dimension en question. Il a également été soumis, pour approbation et/ou modification, au comité d'évaluation.

Les figures 8.2.1 et 8.2.2 ainsi que la tableau 8.2.2 illustrent, de façon schématique, trois types de barèmes. Rappelons que l'appel d'offres était ac-



compagné d'un questionnaire, lequel avait précisément été conçu de façon à obtenir des informations détaillées sur l'état de chacune des caractéristiques concernées par un barème. Le notateur avait pour mission de contrôler, chaque fois que cela était possible, la cohérence des réponses fournies avec les

indications portées sur les plans, schémas ou descriptifs présents dans le dossier de réponse à l'appel d'offres.

Souplesse d'utilisation	Possibilité de reconfigurer le système de tri	Accès à la commande d'affectation des antennes	Notes
Répartition du flux de paquets sur l'une quelconque des antennes de codage	Oui	Facile	6
		Difficile	5
	Non		4
Répartition possible du flux sur deux antennes de codage	Oui	Facile	3
		Difficile	2
	Non		1
Obligation de fonctionnement des trois antennes de codage de manière simultanée			0

Figure 8.2.2. Barème de notation sur la dimension n° 12 :
Souplesse d'affectation des antennes de codage.

De façon à échapper à des ambiguïtés inhérentes à des interrogations d'ordre trop général, les questions (et, par conséquent, les caractéristiques entrant dans le barème) ont volontairement porté sur des aspects bien particuliers car jugés spécialement révélateurs de ce que l'on voulait appréhender. C'est ainsi que, pour évaluer les incidents de tri (coincement, bourrage, chute, rebondissement, accrochage, roulement, glissement, mauvaise détection : conséquences élémentaires 43, 44, 45, 46), l'accent a été mis sur les paquets de types suivants : enveloppes 100 g, rouleaux (spécialement longs), sachets (photos, films à développer), petites boîtes (diapositives développées), cubes parfaits (33 cm × 33 cm × 33 cm), paquets mous (petit oreiller) fermés par des ficelles et sans front net (chaque descriptif étant accompagné d'une photo).

Précisons que chaque service impliqué dans le processus de notation des offres a reçu un manuel d'aide au dépouillement contenant les barèmes relatifs aux dimensions vis-à-vis desquelles il est compétent. Ces barèmes n'ont cependant pas été présentés comme des règles rigides auxquelles il ne fallait en aucun cas déroger : le notateur pouvait, moyennant justification, s'en écarter de façon à prendre en compte certaines particularités d'une offre susceptibles de l'avantager ou de la désavantager sur la dimension considérée.

**Tableau 8.2.2 : Barème de notation sur la dimension n° 15 :
Nature des informations statistiques d'exploitation fournies par le système**

Informations pouvant être éditées par l'ordinateur en fin de séquence de tri	Notes
Heure de début du codage	1
Heure de fin de codage	1
Nombre global de paquets codés	4
Nombre de paquets codés sur chaque antenne	2
Nombre de paquets évacués au rebut technique	3
Nombre de paquets codés par direction de tri	1
Cumul du nombre de paquets codés depuis le premier jour du mois	1

$\gamma_{15}(a_i)$ est obtenu en sommant les notes relatives aux informations
que l'offre a_i prévoit d'éditer.

8.2.3 Passage des dimensions aux critères : sources d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination

La démarche qui précède conduit à évaluer chaque offre à l'aide de 48 notes, chacune d'elles étant encadrée par un intervalle sur la base de seuils de dispersion par excès et par défaut. Chacune des 48 dimensions du tableau 8.2.1 aurait pu être choisie comme axe de signification d'un critère, les notes sur la dimension jouant alors le rôle de performances. Avec un nombre aussi élevé de critères, aucune vision synthétique des offres n'aurait été possible. Il aurait, de surcroît, été difficile de débattre du rôle qui devait être dévolu à chacun d'eux dans une éventuelle procédure d'agrégation multicritère.

Il découle de la démarche suivie que certains groupes de dimensions concernent plus particulièrement l'une des cinq sphères ou des huit préoccupations mentionnées plus haut. Cette proximité entre dimensions invite à réaliser certaines sous-agrégations de préférence à d'autres. Elle permet de construire, sur des bases acceptées par tous, des critères relativement

synthétiques ayant un axe de signification clair. Il suffit de considérer attentivement le tableau 8.2.1 pour constater que les regroupements de dimensions susceptibles de définir le support d'un critère reflétant un point de vue a priori digne d'intérêt peuvent être envisagés de diverses façons. Les principes suivants ont guidé la modélisation à ce niveau.

PRINCIPE n° 1 : L'axe de signification sur lequel le critère conduit à agréger les performances doit être aisément compris par tous ceux qui ont à l'utiliser.

PRINCIPE n° 2 : La synthèse des dimensions qu'opère le critère ne doit pas être de nature, au travers des modalités d'agrégation, à faire naître des contestations de la part de certains acteurs qui récuseraient par exemple le système de valeurs qui la sous-tend.

PRINCIPE n° 3 : Le nombre des critères doit être le plus restreint possible pour rester compatible avec les deux principes précédents.

PRINCIPE n° 4 : La famille de critères finalement élaborée doit être acceptée comme base d'appréciation des performances des offres afin de les comparer pour concevoir et justifier des préférences globales.

Divers regroupements de dimensions ont été tentés selon ces principes et discutés avec le comité d'évaluation. Une famille de 12 critères a finalement été retenue. Elle est présentée au 8.3. A chacun d'eux a été associé un seuil d'indifférence qui en fait des quasi-critères. La fin du présent paragraphe est consacrée à quelques explications sur cette option concernant le mode de prise en compte de l'imprécision, de l'incertitude et de l'indétermination (cf. 1.5 et 1.6).

Il n'a pas été jugé opportun d'introduire un seuil de préférence p_j distinct du seuil d'indifférence q_j . Cette option de modélisation a été adoptée en raison :

- d'un désir de simplification provenant tant des consultants que des membres du comité d'évaluation ;
- des difficultés qu'il y a pour déduire les valeurs de p_j et q_j de celles des divers seuils de dispersion relatifs aux dimensions entrant dans le support du

critère g_j lorsqu'il y en a plus d'une, ce qui est ici souvent le cas (cf. MMCAD, 9.3.4) ;

– d'un manque de temps pour asseoir, sur des bases sérieuses, deux seuils p_j et q_j pour chacun des 12 critères g_j .

La nature des imprécisions, incertitudes, indéterminations qui sont sources d'ambiguïté et d'hésitation pour les notateurs nous a conduits à regarder les seuils de dispersion comme étant constants¹. Les seuils q_j pouvaient, de ce fait, être choisis constants. Pour leur attribuer une valeur, on a tout d'abord pris appui (cf. 1.6.3) sur un couple d'offres, fictives mais réalistes, a et b telles que :

$$g_j(b) - g_j(a) = u > 0.$$

La valeur q_j peut alors être définie comme la plus grande valeur de u à partir de laquelle il est possible de parvenir à l'égalité $g_j(b) = g_j(a)$ par modification (dans la limite des seuils de dispersion) des notes de b et de a sur les diverses dimensions du support de g_j (tout en excluant certaines combinaisons de variations systématiquement extrêmes). Les résultats découlant de ce genre d'exercice ont permis de cerner l'ordre de grandeur des seuils q_j . La valeur définitive a ensuite été fixée, comme nous l'expliquerons au 8.3.3, en confrontant ces ordres de grandeur aux performances des offres réelles.

8.3 FAMILLE COHÉRENTE DE CRITÈRES ET CHOIX D'UNE PAMC

8.3.1 Une première esquisse : 11 critères

Il n'est pas possible de retracer ici toutes les hésitations et modifications qui ont jalonné les quelques semaines durant lesquelles (dans l'attente des réponses à l'appel d'offres) la formulation définitive des critères a été mise au point et acceptée par le comité d'évaluation. Nous nous bornons ci-après à indiquer les lignes directrices à partir desquelles 11 critères ont été construits sur la base des 8 catégories de préoccupations du 8.2.2 et des 4 principes du 8.2.3.

Les dimensions du tableau 8.1.2 ayant trait à l'ergonomie sont apparues trop nombreuses et trop diversifiées pour pouvoir être agrégées, de façon intelligible (principe n° 1), en un seul critère. Il est cependant apparu possible de les scinder en deux groupes relativement homogènes à partir desquels pouvaient être définis les deux critères suivants :

¹ Pour certaines des conséquences élémentaires, cette hypothèse peut paraître contestable, notamment lorsqu'il s'agit de coûts ; l'amplitude maximum de variation constatée sur l'ensemble des offres est apparue insuffisante pour justifier l'introduction de seuils variables.

- g_1 : qualité des postes de travail,
 g_2 : ambiance d'exploitation

(à titre d'exemple, on explicite, à la fin du présent paragraphe, les règles de sous-agrégation ayant permis de définir g_1). Aucune unité ne s'impose pour exprimer la performance d'une offre selon ces deux premiers critères. On verra qu'il en va de même pour la plupart des autres. Dans ces conditions et afin de faciliter les comparaisons, les performances sur ces deux critères (ainsi que sur la plupart des autres) ont été normées de façon à vérifier :

$$0 \leq g_i(a) \leq 100 \text{ (plus la performance est élevée et meilleure elle est).}$$

Seuls les critères g_6 et g_7 font exception à la convention ci-dessus.

Les principes n° 1 et 2 nous ont conduits à définir trois critères ayant trait à l'exploitation :

- g_3 : coût d'exploitation,
 g_4 : débit de tri,
 g_5 : facilité d'emploi.

Le débit de paquets triés prend pour base la cadence maximum indiquée par le constructeur, corrigée (selon une formule multiplicative) de façon à tenir compte des différents facteurs d'indisponibilité. La disponibilité d'emploi prend en compte les aspects ayant trait à la programmation, au changement de tâches, à l'affectation du personnel, etc.

L'entretien et la maintenance ont soulevé de délicats problèmes : plusieurs propositions ont été faites avec deux, voire trois, critères. Le gain en intelligibilité ne paraissant pas significatif (principe n° 1) et le nombre des critères menaçant d'être excessif (principe n° 3), il n'a finalement été retenu qu'un seul critère :

- g_6 : entretien et maintenance.

L'implantation a fait apparaître deux points de vue contradictoires : l'encombrement et le nombre de directions physiques de tri. Le principe n° 2 interdisait de les synthétiser d'emblée, d'où les deux nouveaux critères :

- g_7 : facilité d'implantation dans un site,
 g_8 : nombre de directions physiques de tri de la variante V^0 (nombre entier ≥ 60).

Le coût d'exploitation (notamment celui de l'énergie consommée) ayant été pris en compte par le critère g_3 , il restait encore à définir un critère :

g_9 : coût d'investissement.

Ce critère a permis de prendre en compte :

- le coût du prototype et des études ;
- celui de l'adaptabilité au point d'alimentation (énergie, arrivée des paquets, ...) ;
- celui des machines de série (dont le coût unitaire était borné supérieurement du fait de la conception à coût objectif) ;
- l'influence du délai de développement : le retard de mise en place de la nouvelle organisation, dû à un délai trop long de développement, occasionne des coûts supplémentaires qui ont pu être évalués.

Les performances sur ce critère ont été chiffrées en Millions de Francs (MF) : ce critère est le seul pour lequel les performances sont d'autant meilleures qu'elles sont plus petites.

Les possibilités d'évolution technique ne concernaient guère que l'introduction d'un futur adressage par code-barre, d'où le critère :

g_{10} : possibilité d'adressage des paquets par code-barre.

La dernière des huit préoccupations concernait l'impact de cette automatisation sur la qualité de service telle qu'elle est perçue par le client. Il s'agissait essentiellement de prendre en compte deux risques : celui de détérioration des paquets et celui de mauvais adressage (qui accroît fortement le délai d'acheminement). Les deux risques n'étant pas sans liens, un seul critère a été retenu :

g_{11} : qualité de service.

Le critère g_i (qualité des postes de travail) sous-agrège les dimensions n° 1, 2, 3, 4, 6 et 7 du tableau 8.2.1. Le mode d'agrégation a été discuté avec les responsables du service compétent sur la base d'un calcul de bilan par compensation. Ce mode de raisonnement (cf. 3.1.5), lorsqu'il fait abstraction des seuils, conduit à fonder la sous-agrégation sur un calcul de somme pondérée à taux de substitution constants. On a alors :

$$g_i(a) = \sum_j N_{ij} \gamma_j(a).$$

Pour débattre, avec les personnes concernées, des valeurs appropriées à donner aux coefficients N_{ij} , on a procédé comme suit :

¹ Avec les notations du 3.1.5, on a $N_{ij} = 1/n_{ij}$.

– On a tout d'abord choisi une dimension de référence : pour des raisons tenant à l'interprétation des N_i , il est souhaitable de choisir celle qui, parmi les dimensions à sous-agréger, permet d'appréhender des écarts de préférence avec le maximum de finesse ; c'est normalement ¹ l'échelle qui possède le nombre maximum d'échelons. Le coefficient N_i correspond au nombre d'échelons de cette dimension de référence qu'il est nécessaire de gagner pour compenser la perte d'un échelon sur l'échelle E_i . Le coefficient N_i ne peut être considéré comme constant que si l'on accepte l'hypothèse suivante : sur la dimension de référence comme sur la dimension i , la différence entre deux échelons consécutifs peut être regardée comme représentative d'écarts de préférence égaux tout au long de l'échelle considérée.

– On a procédé ensuite, pour chacune des six échelles en cause, à un examen du bien-fondé de l'hypothèse ci-dessus (ce qui a conduit à retoucher certains des barèmes) : pour la dimension n° 1 par exemple (laquelle a été choisie comme dimension de référence), cet examen a consisté à se demander si le barème de la figure 8.2.1 était bien établi de telle sorte que le gain d'un point reflète une même variation de la pénibilité du travail des opérateurs-codeurs, que ce point soit gagné dans le bas, dans le milieu ou dans le haut de l'échelle.

– On a enfin débattu de la valeur à donner aux coefficients N_i . Le fait d'avoir posé $N_3 = 3$ (cf. tableau 8.3.1) signifie que la dégradation des conditions de travail pour des opérateurs chargés de la permutation des sacs lorsqu'on passe (cf. tableau 8.3.1) de la situation codée :

A : "existence d'un dispositif, aire de dégagement au pied du fermeur"

à la situation codée :

B : "existence d'un dispositif, pas d'aire de dégagement au pied du fermeur"

peut, du point de vue de la qualité globale des postes de travail, être compensée par une diminution de pénibilité du travail des opérateurs-codeurs correspondant au passage (cf. figure 8.2.1) de la situation notée :

9 : "hauteur correcte du plan de travail, pas d'égrenage, pas de proximité des paquets, peu d'opérations"

à la situation notée :

¹ Sauf si l'impact sur le critère, lorsqu'on passe de l'échelon le plus bas à l'échelon le plus haut, est anormalement fort par rapport à ce qu'il est dans le cas d'autres dimensions.

Tableau 8.3.1 : Définition du critère g_1 : Qualité des postes de travail

N°	Dimensions	Informations	Nb. échelons	Codage des échelons	N_i
1	Qualité <u>poste de codage</u>	Hauteur du plan de travail Egrénage des paquets Proximité des paquets Nombre d'opérations à effectuer par le codeur	16	15 14 13 ... 2 1 0	Réf.
2	<u>Hauteur d'accrochage</u> des sacs		4	A = 4 ; B = 3 ; C = 2 ; D = 0	4
3	Facilité de <u>permutation</u> des sacs	Dispositif de permutation Aire de dégagement au pied du fermeur	4	A = 4 ; B = 3 ; C = 2 ; D = 0	3
4	Facilité de <u>prépositionnement</u> (et permutation des chariots et conteneurs)	Dispositif de prépositionnement Aire de dégagement au niveau de la direction physique de tri	4	A = 4 ; B = 3 ; C = 2 ; D = 0	3
5	Facilité de <u>circulation</u> des personnes	Dimension des couloirs d'accès aux postes de travail	3	A = 3 ; B = 2 ; C = 0	4
6	Hauteur des <u>planchers</u> des postes de travail	Poste de codage Poste de fermeture	9	10 8 6 5 4 3 2 1 0	3

12 : "hauteur correcte du plan de travail, égrenage, pas de proximité des paquets, nombre élevé d'opérations".

La sous-agrégation a été conduite selon le même principe pour plusieurs autres critères. Pour g_6 , en plus de l'opérateur somme, on a dû faire intervenir l'opérateur Max. Pour g_4 , la formule adoptée est de type multiplicatif.

8.3.2 Tests de cohérence : adjonction d'un douzième critère

Afin de mettre à l'épreuve la cohérence des 11 critères qui viennent d'être définis, les tests de cohérence 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.4 (cf. 2.2) ont été appliqués. Le test 2.2.1 a fait apparaître l'existence possible de deux offres qui, bien qu'ayant des performances identiques sur les 11 critères, ne soient pas obligatoirement jugées comme étant indifférentes par certains représentants de la DGP. Ces représentants faisaient valoir que, émanant de constructeurs qui n'avaient pas nécessairement la même expérience industrielle, ces deux offres pouvaient présenter un degré de développement différent ; il s'en suivait que, dans la phase d'élaboration du prototype, les risques d'apparition de difficultés imprévues (pouvant aller jusqu'à mettre en cause la bonne tenue des objectifs) pouvaient être forts différents d'une offre à l'autre. Il a de ce fait été décidé d'introduire la 48^e ligne du tableau 8.2.1 ainsi qu'un douzième critère :

g_{12} : degré de développement, expérience du constructeur.

Même si l'évaluation des offres selon ce dernier critère pouvait paraître beaucoup plus subjective que vis-à-vis des 11 premiers, cela n'a pas semblé être une raison suffisante pour renoncer à prendre en considération les informations existantes. Celles-ci pouvaient provenir soit des dossiers de réponse à l'appel d'offres, soit du fait d'expériences antérieures bien connues de la Poste.

Le test 2.2.2 a fait apparaître que chacun des critères placé à côté des 11 autres peut jouer convenablement son rôle et le test 2.2.4 a confirmé qu'aucun de ces 12 critères ne pouvait être abandonné.

8.3.3 Les offres et le tableau des performances

Après élimination des réponses incomplètes ou ne remplissant pas toutes les conditions strictes du cahier des charges, 9 offres, référencées de a_1 à a_9 , émanant de 7 constructeurs distincts, ont été retenues pour l'évaluation. Celle-ci, conduite par les différents services compétents conformément aux indications données plus haut, a permis de dresser le tableau 8.3.2. Précisons que, relativement à certains critères, les chiffres qui figurent sur la ligne correspondante au tableau sont une synthèse de 4 chiffres correspondant aux 4 variantes (cf. passage en petits caractères au début du 8.1.3).

Conformément à ce qui a été dit à la fin du 8.2.3, la valeur des seuils q_j n'a été fixée qu'après avoir évalué les 9 offres sur les 12 critères. L'ordre de grandeur retenu pour q_j (d'après la comparaison d'offres fictives a et b) a permis de sélectionner des couples a_k et a_l d'offres réelles faisant apparaître des écarts de performances voisins de l'ordre de grandeur envisagé. Considérant les ambiguïtés et hésitations qui ont pu jaloner l'application du barème de notation pour déterminer $g_j(a_k)$ et $g_j(a_l)$, on a pu se faire une opinion mieux fondée sur le fait qu'une différence égale à $g_j(a_k) - g_j(a_l)$ était ou non compatible avec l'indifférence entre a_k et a_l .

C'est ainsi par exemple que, relativement au critère g_2 , il nous a paru justifié d'admettre que a_2 (de même que a_3) ne se différencie significativement ni de a_4 , ni de a_6 alors que a_6 mérite d'être regardée comme effectivement meilleure que a_4 (selon g_2). Il s'ensuit que :

$$g_2(a_4) - g_2(a_2) = g_2(a_6) - g_2(a_2) = 3 \leq q_2 < g_2(a_6) - g_2(a_4) = 6.$$

Le raisonnement préalable effectué à partir d'offres fictives a et b avait amené à penser que la valeur de q_2 devait être choisie au voisinage de 5. Compte-tenu de ce qui précède, c'est cette valeur qui a été finalement retenue.

Relativement à d'autres critères (notamment le dernier), les facteurs d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination que le seuil q_8 prend en compte ont amené à adopter une valeur relativement plus élevée ($q_{12} = 10$). On a en revanche posé $q_8 = 0$. Ceci s'explique par le fait que le nombre de sorties physiques que comporte la variante V^0 ne donne lieu à aucune ambiguïté et que toute sortie supplémentaire présente (toutes choses égales par ailleurs) un avantage réel pour le fonctionnement du centre (même si cet avantage décroît lorsque le nombre de sorties croît).

Tableau 8.3.2 : Performances des offres

	q_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
g_1 : Qualité des postes de travail	5	75	81	77	73	76	75	73	77	96
g_2 : Ambiance d'exploitation	5	69	60	60	57	46	63	63	31	69
g_3 : Coût d'exploitation	5	68	82	82	82	55	68	68	41	41
g_4 : Débit	5	70	70	50	90	90	90	70	50	70
g_5 : Facilité d'emploi	5	82	66	66	75	48	98	98	59	49
g_6 : Entretien et maintenance	8	72	52	60	61	46	63	86	79	60
g_7 : Facilité d'implantation	10	86	86	86	93	93	78	78	71	57
g_8 : Nombre de sorties de V^0	0	74	60	60	60	60	61	61	60	60
g_9 : Coût d'investissement	1	15,23	15,70	15,00	15,55	36,68	22,90	19,58	15,47	13,99
g_{10} : Adressage code-barre	10	83	83	83	83	83	100	100	67	83
g_{11} : Qualité de service	5	76	76	82	71	50	68	74	76	50
g_{12} : Degré de développement	10	29	71	71	29	14	57	57	86	86

La préférence croît avec les valeurs des critères à l'exception de g_9 .

8.3.4 Choix d'une PAMC

Le fait qu'il n'y ait que 9 offres à comparer nous a tout d'abord conduits à proposer au comité d'évaluation de travailler directement sur le tableau 8.3.2 sans chercher à prendre explicitement appui sur une PAMC. Cette façon de faire s'est très vite révélée insuffisante : le mode de raisonnement présenté par les uns pour éliminer telle ou telle offre et ceux développés par d'autres pour argumenter la supériorité d'une offre sur une série d'autres étaient loin d'entraîner l'adhésion de l'ensemble des acteurs en présence. Devant les difficultés rencontrées pour comparer deux offres a_i et a_j (autrement dit les deux lignes correspondantes du tableau 8.3.2 compte-tenu des seuils d'indifférence), certains de ces acteurs ont tenté d'attribuer, à chaque offre, une valeur globale sur la base d'une somme pondérée des performances.

Il a alors été envisagé de systématiser cette approche qui paraissait avoir déjà été utilisée à propos d'appel d'offres concernant des matériels différents. Le recours à un critère de synthèse de type somme pondérée (cf. 3.1.5 et 3.2.2 d)) impliquait toutefois qu'un travail important soit conduit pour parvenir à un nouveau codage de chacun des 12 critères. Un tel recodage s'impose pour que le mécanisme de compensation qui est à l'œuvre dans une somme pondérée repose sur des bases raisonnées et acceptées comme hypothèses de travail par ceux qu'il s'agit d'aider dans la prise de décision. Il impliquait, par exemple, que soit pris en compte le fait qu'une sortie de plus ajoutée à une machine n'en comportant que 60 constitue (toutes choses égales par ailleurs) un avantage bien supérieur à celui que procure une sortie de plus à une machine en comportant 74 (le rapport des avantages obtenus dans l'un et l'autre cas devant être chiffré). Une fois opéré un tel recodage pour tous les critères, il fallait encore fixer la valeur des coefficients (taux de substitution) traduisant l'importance accordée à chaque critère dans le calcul de somme pondérée. Le fait que la machine doive répondre à des besoins et/ou objectifs multiples, perçus et valorisés par des personnes aussi différentes que celles concernées par l'exploitation, la maintenance, la logistique, le bureau d'étude, la qualité client, le financement, ..., rendait fort difficile (et sans doute

illusoire) l'obtention d'un consensus sur la façon dont un gain selon un critère était susceptible de compenser une perte selon un autre. Face aux représentants des différentes sphères concernées par la décision, nous avons alors été amenés à rappeler ce qui nous paraissait être deux points faibles de la procédure d'agrégation en question :

- elle était inapte à prendre en compte la présence, sur la plupart des critères, d'écarts strictement positifs mais non significatifs tels qu'ils ont été caractérisés par les seuils q_j ;

- elle conduisait à regarder comme indifférentes à une offre ayant des performances "moyennes" sur chacun des 12 critères un très grand nombre d'autres offres plus ou moins contrastées (c'est-à-dire excellentes sur certains critères et moins bonnes, voire très mauvaises, sur d'autres), indifférence fondée sur un mécanisme combinant addition et multiplication accepté essentiellement parce qu'il était familier mais non pas parce que l'on en maîtrisait les conséquences.

Les considérations qui précèdent, illustrées sur des exemples numériques, ont été présentées au comité d'évaluation. Elles ont été suivies d'un exposé des idées directrices (surclassement, concordance, discordance, ...) sur lesquelles se fondent les PAMC d'ELECTRE I et IS ¹. Le comité a finalement décidé de recourir à ELECTRE IS tout en laissant certaines personnes du groupe conduire en parallèle un calcul de somme pondérée prenant en compte, de façon empirique (sans entreprendre un travail méthodique très poussé), les considérations développées plus haut.

La fin de ce chapitre est essentiellement consacrée à l'application d'ELECTRE IS qui a suivi cette décision.

¹ Le lecteur pourra vérifier que les conditions d'application d'une PAMC de type II (cf. 5.1.2) sont, dans le cas présent, remplies. Le recours à une méthode de type ELECTRE était donc pleinement justifié. Rappelons que, parmi elles, seules ELECTRE I et IS concernent la problématique α . Les explications données au 6.1.5 expliquent le choix qui a été fait.

8.4 MISE EN ŒUVRE D'ELECTRE IS

Cette mise en œuvre, destinée à aider à la sélection d'une ou de deux offres (devant donner lieu à la réalisation d'un prototype), s'est effectuée en quatre temps :

- attribution de valeurs aux poids k_j ;
- attribution de valeurs aux seuils de veto v_j ;
- exploitation d'une relation de référence S ;
- analyse de robustesse.

8.4.1 Valeurs des poids k_j

Pour attribuer des valeurs aux k_j , on s'est fondé sur la façon de faire présentée au 5.4.2 d). Tout d'abord, on a expliqué (en ayant recours notamment à la métaphore du pouvoir de vote) le rôle dévolu aux coefficients k_j dans la PAMC d'ELECTRE IS. Ensuite, on a cherché à élaborer un système d'inégalités sur les k_j (cf. 5.4.2 d)) qui reflète des opinions qualitatives sur l'importance du rôle qu'il convient d'attribuer à chaque critère, opinions qui devaient être partagées par plusieurs représentants de la DGP à qui appartenait le pouvoir d'arrêter la décision. De façon rapide et facile, le système suivant s'est imposé :

$$\begin{aligned} k_{10} &< k_2 = k_7 = k_8 < k_1 = k_4 = k_5 < k_3 = k_6 = k_9 = k_{11}, \\ k_{10} &\leq k_{12} \leq k_{11}, \\ k_1 &= k_2 + k_{10}, \\ k_{11} &= k_1 + k_2. \end{aligned}$$

On peut poser, de façon non restrictive, $k_{10} = 1$. La valeur de chacun des autres poids s'exprime alors simplement (compte-tenu du système ci-dessus) en fonction de k_2 :

$$\begin{aligned} k_7 &= k_8 = k_2, \\ k_1 &= k_4 = k_5 = k_2 + 1, \end{aligned}$$

¹ Telle est la terminologie qui a été utilisée dans l'étude réelle de préférence à "coefficients d'importance" jugés trop abstraits.

$$k_3 = k_6 = k_9 = k_{11} = 2 \cdot k_2 + 1,$$

$$1 \leq k_{12} \leq 2 \cdot k_2 + 1.$$

L'éventail des poids $\frac{k_{11}}{k_{10}} = \frac{2 \cdot k_2 + 1}{1}$ est d'autant plus ouvert que k_2 est plus élevé. Par référence à la métaphore des poids, il a été admis que k_{11} devait rester inférieur à cinq ou six fois k_{10} et strictement supérieur à quatre fois k_{10} . Le choix $k_{11} = 5 \cdot k_{10}$ amène à poser :

$$k_2 = 2 \cdot k_{10} = 2.$$

Ceci a été regardé comme étant une hypothèse de travail convenable. Les valeurs qui découlent de cette vision de l'importance des critères figurent dans le tableau 8.4.1. La valeur de k_{12} restant indéterminée entre 1 et 5, c'est la valeur 3 qui a été adoptée.

8.4.2 Valeurs des seuils de veto v_j

Les valeurs des seuils v_j ont été fixées comme indiqué au 5.4.3. Nous commentons brièvement ci-après, critère par critère (en suivant l'ordre croissant des k_j), les valeurs des veto retenues pour le jeu de référence (cf. tableau 8.4.1).

Compte-tenu de leur faible importance mais aussi de la façon dont ils étaient perçus par l'ensemble des acteurs, il a été admis que les critères g_{10} , g_7 et g_8 ne pouvaient opposer aucun veto à un surclassement unanime de la part des autres critères. Les seuils v_{10} , v_7 et v_8 ont donc été choisis de manière à ne pas jouer. Le critère g_2 , bien qu'ayant le même poids que g_7 et g_8 , s'est vu reconnaître, compte-tenu de la perception que pouvaient en avoir certains acteurs, un pouvoir de veto dans le cas où $g_2(a) - g_2(b)$ dépasserait la moitié de l'étendue de l'échelle ($v_2 = 50$). Il ressort des valeurs observées (cf. tableau 8.3.2) que ce veto n'a jamais eu l'occasion de s'exercer. Enfin, en raison de sa nature propre, le critère g_4 s'est vu dénier tout pouvoir de veto ($v_4 = 100$).

Etant de même nature que g_2 , le critère g_1 s'est vu attribuer le même pouvoir de veto : $v_1 = 50$ (lequel s'est avéré, lui aussi, sans

effet). Le critère g_5 s'est vu reconnaître un pouvoir de veto légèrement plus fort, au moins dans le jeu de valeurs de référence : $v_5 = 40$ (ce qui correspond¹ à $\frac{v_5}{q_5} = 8$; cette valeur étant jugée trop élevée par certains, il a été décidé d'affaiblir cet effet de veto dans le cadre de l'analyse de robustesse. En raison de la part de subjectivité qui affecte les évaluations selon le critère g_{12} mais aussi de l'importance attaché par certains acteurs à ce critère, il a été admis que $\frac{v_{12}}{q_{12}} = 5$ était la force maximum qui méritait d'être attribuée au pouvoir de veto de ce critère. Des valeurs moindres devaient, par conséquent, être envisagées dans l'analyse de robustesse.

Tableau 8.4.1 : Jeu de valeurs définissant la relation S de référence

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
k_j	3	2	5	3	3	5
v_j	50	50	40	100	40	25
q_j	5	5	5	5	5	8
	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
k_j	2	2	5	1	5	3
v_j	100	50	5	100	30	50
q_j	10	0	1	10	5	10

En ce qui concerne les quatre critères ayant le poids le plus élevé, il a été jugé souhaitable de leur attribuer un pouvoir de

¹ Etant donné que $q_j = p_j$, ce sont les rapports $\frac{v_j}{q_j}$ (cf. 5.4.3) qui rendent possible une certaine comparaison de la force de l'effet de veto d'un critère à l'autre.

veto relativement fort. Celui-ci a été raisonné de façon comparative sur la base des rapports $\frac{v_j}{q_j}$. Eu égard à la manière dont étaient perçus les critères, les ordres de grandeur suivants ont paru convenir pour asseoir le jeu de référence :

$$\frac{v_3}{q_3} \approx 8, \quad \frac{v_6}{q_6} \approx 3, \quad \frac{v_9}{q_9} \approx 5, \quad \frac{v_{11}}{q_{11}} \approx 6,$$

le pouvoir de veto de g_6 méritant, de plus, d'être affaibli dans l'analyse de robustesse.

8.4.3 Exploitation de la relation de référence S avec ELECTRE IS

La relation de référence S (laquelle constitue le système de référence dont il a été question au 5.4.4) est ici définie par le jeu de valeurs du tableau 8.4.1 complété par la valeur attribuée au niveau de concordance s . Pour fixer cette valeur, il a été conseillé (cf. 5.4.4) de commencer par observer la manière dont les valeurs de l'indice de concordance $k[C(b \text{ S } a), C(a \text{ Q } b)]/k[F]$ se répartissent dans l'intervalle $[0.5 ; 1]$ (voir tableau 8.4.2). Faisons observer que les critères étant ici des quasi-critères, $C(a \text{ Q } b) = \emptyset$ (cf. (r.5.2.6)). Dans ce qui suit, l'indice de concordance est donc tout simplement noté $k[C(b \text{ S } a)]/k[F]$.

On a posé $s = 0,7$ pour achever de définir S (cf. figure 8.4.1). Avec cette valeur du niveau de concordance, la condition de concordance (r.5.4.8) (avec $C(a \text{ Q } b) = \emptyset$) :

$$k[C(b \text{ S } a)]/k[F] \geq 0,7$$

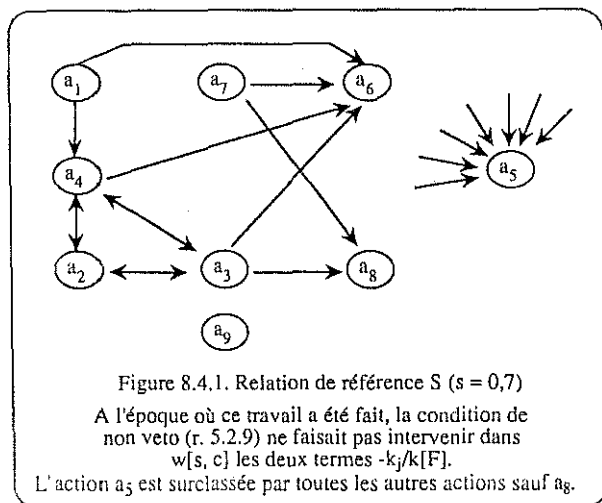
est vérifiée si et seulement si les critères discordants totalisent un poids au plus égal à 11 sur un total de 39 correspondant à la somme des poids de divers critères. Compte-tenu des valeurs que peuvent prendre les coefficients k_j (entre 1 et 5 avec le jeu de référence), la condition ainsi formulée apparaît comme relativement sévère. C'est pourquoi, dans le cadre de l'analyse de robustesse, s pourra être :

**Tableau 8.4.2 : Valeurs de l'indice de concordance $k[C(b \ S \ a)]/k[F]$
découlant du jeu de valeurs de référence du tableau 8.4.1**

$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1,000	0,718	0,667	0,795	0,925	0,744	0,692	0,923	0,718
a_2	0,692	1,000	0,872	0,718	0,923	0,641	0,718	0,795	0,667
a_3	0,615	0,923	1,000	0,846	0,923	0,769	0,641	0,795	0,590
a_4	0,692	0,846	0,795	1,000	1,000	0,718	0,590	0,795	0,667
a_5	0,231	0,410	0,298	0,282	1,000	0,205	0,205	0,462	0,538
a_6	0,513	0,462	0,538	0,692	0,949	1,000	0,615	0,538	0,667
a_7	0,769	0,590	0,538	0,615	0,872	0,923	1,000	0,795	0,667
a_8	0,538	0,590	0,538	0,590	0,667	0,590	0,590	1,000	0,641
a_9	0,436	0,615	0,615	0,538	0,744	0,462	0,410	0,615	1,000

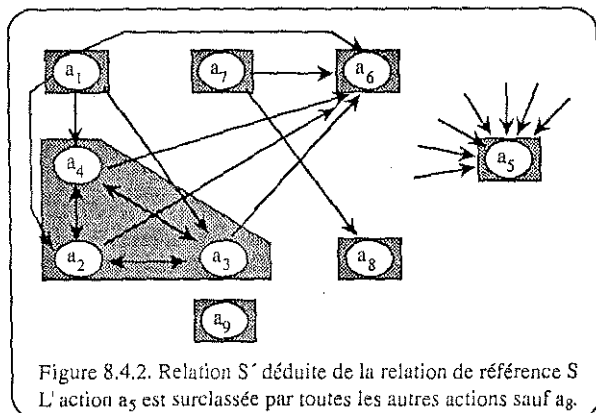
- exceptionnellement augmenté jusqu'à 0,73 de façon à n'accepter le surclassement que si le poids de la coalition discordante est au plus égal à 10 (dans le jeu de référence) ;
- diminué jusqu'à 0,63 de façon à accepter la concordance même si le poids de la coalition discordante atteint 14 (dans le jeu de référence).

L'exploitation de la relation S donnée à la figure 8.4.1 avec ELECTRE IS a été conduite sans qu'un indice de robustesse for-



mel ait été explicité¹ (cf. 6.2.2 b)). Les retraits et adjonctions de surclassements ont cependant été raisonnés de la même façon qu'au 6.2.2 c). Ce sont les écarts entre premier et second membres des conditions de concordance (r.6.2.8) et de non discordance (r.6.2.9) qui ont servi de guide. Nous indiquons brièvement ci-après le raisonnement qui a conduit à substituer, à la relation S de la figure 8.4.1, la relation S' de la figure 8.4.2 de façon à traiter, comme étant une classe d'ex æquo, le sous-ensemble d'offres $c = \{a_2, a_3, a_4\}$.

¹ Il en a été de même pour les relations étudiées dans le cadre de l'analyse de robustesse (cf. 8.4.4).



L'application de la première étape d'ELECTRE IS fait apparaître, de façon évidente, une seule classe de présumés ex æquo :

$$c = \{a_2, a_3, a_4\}.$$

La seconde étape consiste essentiellement à savoir comment comparer c aux autres offres. En effet, les doubles surclassements qui lient entre elles les offres a_2, a_3, a_4 sont ici suffisamment bien établis pour ne pas avoir à envisager une quelconque division de c en deux.

L'acceptation de $a_1 \succ_c' c$ suppose ¹ celles de $a_1 S' a_2$ et $a_1 S' a_3$. Chacun de ces deux surclassements est absent de la figure 8.4.1 car :

– D'une part le critère 12 oppose son veto ² à chacun d'eux du fait d'un écart défavorable à a_1 égal à 42. Il suffirait d'accroître de 50 à 52 la valeur de v_{12} pour que cet effet de veto n'ait plus lieu.

– D'autre part la condition de concordance ne valide pas $a_1 S a_3$. On a : $k[C(a_1 S a_3)]/k[F] = 2/3$, ce qui est très voisin de 0,7.

¹ La relation $\succ_c'$ est la relation définie sur l'ensemble A_c' des classes d'ex æquo obtenue conjointement avec S' à l'issue de la seconde étape d'ELECTRE IS (conformément aux trois propriétés énoncées à la fin de cette seconde étape, cf. 6.2.2 a)).

² Rappelons que la relation S a été construite sans prendre en compte les termes $-k_j/k[F]$ dans (r.5.2.9). Si (r.5.2.9) avait été utilisée telle quelle, la relation $a_1 S a_2$ aurait été acceptée d'emblée.

Compte-tenu de $a_1 S a_4$, il paraît, dans ces conditions, légitime d'accepter $a_1 \succ'_c c$.

Aucun veto ne s'oppose à $a_2 S a_6$. L'absence de ce surclassement provient d'une valeur de l'indice de concordance trop faible : 0,64. Dans ces conditions, puisque les deux autres offres de c surclassent a_6 , $c \succ'_c a_6$ a été accepté.

La seule offre de c qui surclasse a_8 est a_3 : $a_2 S a_8$ est refusé en raison du veto du critère g_6 et $a_4 S a_8$ l'est en raison du veto du critère 12. Dans les deux cas, cet effet de veto est nettement affirmé. Dans ces conditions, on a posé $\text{Non}(c \succ'_c a_8)$.

La relation S' (cf. figure 8.4.2) admet pour noyau N (troisième étape d'ELECTRE IS) :

$$N = \{a_1, a_7, a_9\}.$$

Telle est donc la sélection finale que préconise cette première application d'ELECTRE IS : en effet, la quatrième étape d'ELECTRE IS conduit, de façon évidente, à poser $A' = N$.

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher le résultat qui précède de celui de l'application faite au 6.2.2 c). La relation de la figure 6.2.1 a en effet été obtenue à partir des performances du tableau 8.3.2, du jeu de référence du tableau 8.4.1 en posant $s = 0,65$ (au lieu $s = 0,7$ comme pour les figures 8.4.1 et 8.4.2). En abaissant ainsi le niveau de concordance s , on fait apparaître l'offre a_1 comme ex æquo à celle de la classe c (cf. figures 6.2.3 et 8.4.2).

8.4.4 Analyse de robustesse

Conformément aux indications du 5.4.4, un certain nombre de relations $S_1, S_2, S_3, \dots$ ont été étudiées. Elles ont été obtenues en modifiant le jeu de valeurs de référence de façon à prendre en compte les diverses hésitations mises en évidence au 8.4.1 à propos des poids k_j , au 8.4.2 à propos des seuils de veto v_j , enfin au 8.4.3 à propos du niveau exigé de concordance s . De façon plus précise, ces nouvelles relations ont été déduites de la relation de référence S :

- en faisant varier k_{12} dans l'intervalle $[1 ; 2 k_2 + 1]$;
- en faisant varier k_2 dans l'intervalle $[1,5 ; 2,5]$ (ce qui correspond à $4 \leq k_{11} \leq 6$) ;

- en augmentant quelque peu les valeurs de v_5 , v_6 , v_{12} (de façon à affaiblir le pouvoir de veto des critères correspondants) ;
- en faisant varier s dans l'intervalle $[0,63 ; 0,73]$ (intervalle pouvant légèrement varier avec le jeu de poids considéré).

Une analyse de robustesse tout-à-fait bien conduite nécessiterait de prendre en compte, en les combinant, non seulement deux valeurs extrêmes proches respectivement de l'une et l'autre des bornes des intervalles ci-dessus mais aussi une valeur médiane sur chacun de ces intervalles. Même en faisant varier conjointement les trois veto, cela conduirait à étudier $3^4 = 81$ relations. Seules une vingtaine d'entre elles ont été examinées et cela pour deux raisons :

1°) Le manque de temps : L'étude, commencée en novembre 1983, a permis de lancer l'appel d'offres en février 1984 et son dépouillement n'a eu lieu qu'en juin. Or, la DGP souhaitait conclure au plus tard début juillet.

2°) L'analyse d'une première série de relations a révélé le peu d'intérêt que pouvait présenter l'analyse de certaines autres. Ceci a permis de limiter le nombre des cas à examiner et à respecter la contrainte de temps.

Les figures 8.4.3 et 8.4.4 montrent deux des relations analysées.

L'analyse de robustesse ainsi conduite a permis d'énoncer les conclusions suivantes (précisons que la quatrième étape d'ELECTRE IS, cf. 6.2.2 a), a systématiquement été laissée de côté à ce stade du travail).

Conclusion n° 1 : a_1 est présente dans la presque totalité des noyaux.

Conclusion n° 2 : a_5 , a_6 , a_8 n'apparaissent jamais dans le noyau.

Conclusion n° 3 : lorsque a_9 apparaît dans un noyau, sa présence n'est due qu'au veto du critère 12 car, sans ce veto, on

aurait $a_1 \ S \ a_9$ (cela est vrai quels que soient les jeux de poids considérés sauf dans quelques cas où $s > 0,7$) ; quelle que soit la relation analysée, a_9 ne surclasse que la seule offre a_5 .

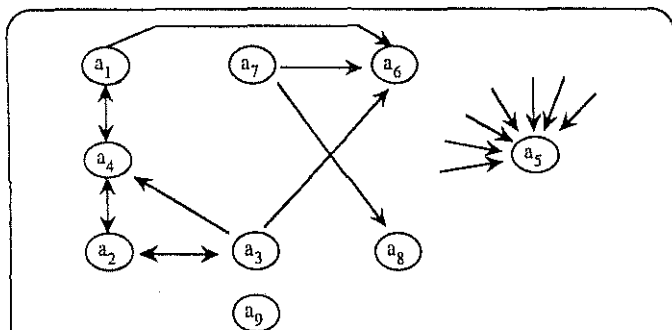


Figure 8.4.3. Relation S_1

Le jeu de valeurs ne diffère de celui de S que par $k_{12} = 5$ (au lieu de 3).
L'action a_5 est surclassée par toutes les autres actions sauf a_8 .

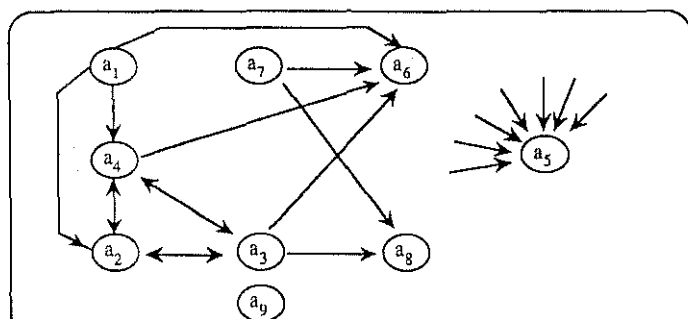


Figure 8.4.4. Relation S_2

Le jeu de valeur ne diffère de celui de S que par
 $v_5 = 45$ (au lieu de 40), $v_6 = 30$ (au lieu de 25), $v_{12} = 55$ (au lieu de 50).
L'action a_5 est surclassée par toutes les autres actions sauf a_8 .

Conclusion n° 4 : $c = \{a_2, a_3, a_4\}$ constitue un groupe d'offres toujours deux à deux indifférentes et fréquemment présent dans le noyau.

Conclusion n° 5 : a_7 (généralement incomparable à c) est fréquemment présente dans le noyau.

8.5 RÉSULTATS FINAUX ET COMMENTAIRES

Les conclusions de l'analyse de robustesse ci-dessus justifient les recommandations suivantes :

a) Dans le cas où il est exclu de construire plus d'un prototype, c'est l'offre a_1 qui mérite d'être retenue (cf. conclusion n° 1).

b) Dans le cas où il est envisagé de construire plus d'un prototype, les offres a_5 , a_6 , a_8 , a_9 peuvent être définitivement éliminées (cf. conclusions n° 2 et 3 jointes aux spécificités de g_{12} , cf. 8.3.2).

c) Dans le cas où il est envisagé de construire trois prototypes, ce sont les offres a_1 , a_7 et l'une des trois offres de c qui méritent d'être retenues (cf. conclusions n° 4 et 5) ; les 12 critères pris en compte ne permettent pas de différencier clairement les offres a_2 , a_3 et a_4 (pour y parvenir, on pourrait faire appel à des considérations non ou mal prises en compte par cette famille de critères). Dans la mesure où a_1 serait effectivement retenue, la sélection conjointe de a_3 paraît mieux justifiée que celle de a_2 ou a_4 car, contrairement à ces dernières, a_3 est généralement incomparable à a_1 (cette façon de raisonner a été justifiée dans le cadre de la quatrième étape d'ELECTRE IS, cf. 6.2.2 a)).

d) Dans le cas où il serait envisagé de construire deux prototypes, il convient (en raisonnant comme aux a), b) et c) ci-dessus) de sélectionner, à côté de a_1 , soit a_7 , soit une offre de c . L'offre a_7 étant difficilement comparable aux offres de c , cette option met fondamentalement en jeu le système de valeurs du "décideur".

La DGP a très rapidement pris la décision de construire deux prototypes. L'élimination de a_5 , a_6 , a_8 , a_9 n'a soulevé aucune difficulté : des raisons techniques, d'exploitation ou de coût d'investissement trop élevé jouaient nettement en leur défaveur ; aucune de ces offres n'était, de surcroît, bien classée dans le calcul de somme pondérée. La comparaison entre les offres de c et a_7 s'est soldée en défaveur de a_7 jugée trop coûteuse en investissement (cf. critère g_9 au tableau 8.3.2).

Le compte-rendu de la réunion du 11 juillet 1984 du comité d'évaluation fait état de la sélection $\{a_3, a_1\}$ (a_3 étant placée avant a_1) accompagnée des commentaires suivants :

– l'offre a_1 "a l'avantage d'être d'origine française mais présente un risque industriel important car le constructeur est uniquement un bureau d'étude ; ainsi, il est demandé d'éclaircir le montage industriel pour obtenir une garantie sur la série" ;

– l'offre a_3 "présente peu de risques et possède des références ; elle est basée sur une machine de technologie étrangère ; il est demandé des garanties sur la fabrication en France de la machine".

Ce compte-rendu fait également état d'une solution de repli : a_4 (essentiellement pour le cas où les garanties demandées ci-dessus ne seraient pas obtenues pour l'une des deux offres).

Attirons en conclusion l'attention sur le fait que l'intérêt d'ELECTRE IS ne doit pas être vu comme étant strictement limité à son apport direct à la prise de décision. Dans le cas présent (mais ce qui suit n'est pas propre à ce cas), les différentes sphères de la Poste concernées par l'automatisation se sont vues, grâce à la méthodologie, impliquées dans le processus d'évaluation (définition des critères et évaluation des offres). Ainsi, les différents services de la Poste ont été amenés à bien définir et hiérarchiser leurs préférences en fonction du type de responsabilités et de compétences qui étaient les leurs. Les offres pouvaient ainsi être discutées et comparées sur des bases ayant fait l'objet d'un assez large consensus. Enfin, le choix final pouvait être clairement argumenté.

Chapitre 9

COMPARAISON DE DEUX ÉTUDES D'AIDE À LA DÉCISION À PROPOS D'UN CAS DE LOCALISATION D'UNE CENTRALE NUCLÉAIRE

RÉSUMÉ

L'objet de ce chapitre est de comparer deux études d'aide à la décision à propos d'un cas de localisation d'une centrale nucléaire.

Au 9.1, on précise les objectifs et les conditions de cette comparaison.

Au 9.2, on présente, étape par étape, l'étude réalisée en 1974 sur ce cas par Keeney et Nair en utilisant un modèle de préférences globales fondé sur un critère unique de synthèse. On illustrera notamment :

- le choix des axes de signification et des dimensions (9.2.2 et 9.2.3) ;
- la détermination des distributions de probabilités (9.2.4) ;
- l'élaboration de la fonction d'utilité (fonctions d'utilité partielles, coefficients k_j) (9.2.5, 9.2.6, 9.2.7 et 9.2.8) ;
- l'analyse de sensibilité et l'élaboration de la recommandation (9.2.9).

Quelques années plus tard, nous avons tenté de réaliser en laboratoire le travail qui aurait pu être fait sur ce cas en utilisant une PAMC non fondée sur un critère unique de synthèse, en l'occurrence ELECTRE III. Les principales étapes de l'élaboration de cette étude sont présentées au 9.3. On insistera en particulier sur :

- le mode de construction des critères (9.3.2) ;
- l'élaboration des informations inter-critères (9.3.3) ;
- l'analyse de robustesse et l'élaboration de la recommandation (9.3.4).

Au 9.4, on tentera de tirer quelques enseignements de cette comparaison. A l'issue de la confrontation de deux modèles à une même réalité, on s'efforcera de :

- mieux mettre en évidence les différences que l'un et l'autre induisent quant à la manière de questionner la réalité et d'élaborer des "données" ;

- mieux comprendre ce que l'un et l'autre ont d'arbitraire, de fragile, de réaliste, de robuste ;
- mieux percevoir en quoi l'un et l'autre peuvent conduire à des recommandations convergentes ou divergentes.

9.1 GÉNÉRALITÉS

En 1974, le Washington Public Power Supply System (WPPSS), regroupement d'entreprises publiques produisant de l'électricité dans l'état de Washington sur la côte Nord-Ouest des USA, a demandé une étude au Woodward-Clyde Consultants concernant le choix d'un site pour l'implantation d'une centrale nucléaire. Cette étude a été menée par Keeney et K. Nair (1976)¹ en utilisant un modèle de préférences globales fondé sur un critère unique de synthèse du type utilité espérée (PAMC de type I, cf. 4.5 et 5.1). Elle semble particulièrement représentative des travaux utilisant ce type de modèles d'aide à la décision.

On présente au 9.2 les principales étapes de l'élaboration de cette étude d'aide à la décision auxquelles nous nous référerons, dans la suite de ce chapitre, sous le nom d'étude U.

Quelques années plus tard², à des fins de comparaison, nous avons tenté de réaliser en laboratoire le travail qui aurait pu être fait sur ce cas de localisation en utilisant une PAMC non fondée sur un critère unique de synthèse, en l'occurrence ELECTRE III (PAMC de type II, cf. 5.3.2.2 et 6.4.3). Dans ce chapitre, nous nous référerons à cette étude en laboratoire sous le nom d'étude S. On la présente au 9.3.

Précisons dès à présent que, étant dans l'impossibilité d'interroger ni experts, ni responsables du WPPSS, nous avons dû parfois, dans le cadre de l'étude S, supputer une réponse sur la base des seules informations recueillies pour les besoins de

¹ Cf. Keeney et Nair (1976). Ce texte est reproduit dans Bell et al. (1977, chapitre 14) et dans Keeney (1980, chapitre 3).

² Voir Roy et Bouyssou (1983 et 1986).

l'étude U. Notre but n'étant pas de refaire l'étude mais de comparer les modèles d'aide à la décision utilisés dans ces deux études, les inconvénients découlant de cette impossibilité se sont avérés peu importants.

Au 9.4, on tentera de tirer quelques enseignements de cette comparaison. A l'issue de cette confrontation de deux modèles à une même réalité, on s'efforcera de :

- mieux mettre en évidence les différences que l'un et l'autre induisent quant à la manière de questionner la réalité et d'élaborer ce que l'on appelle traditionnellement (à tort) des données (ces dernières étant, le plus souvent, des "construits") ;
- mieux comprendre ce que l'un et l'autre ont d'arbitraire, de fragile, de réaliste, de robuste (tous aspects essentiels pour apprécier leur degré de probance respectif) ;
- mieux percevoir en quoi l'un et l'autre peuvent conduire à des recommandations convergentes ou divergentes.

9.2 LE CAS WPPSS : L'ÉTUDE U

9.2.1 Insertion dans le processus de décision, problématique, détermination des actions potentielles

Le WPPSS souhaite, en 1974, bâtir une centrale nucléaire de 3 000 MW, à l'horizon de 1984, sur le territoire relevant de sa compétence, c'est-à-dire l'état de Washington et une partie des états de l'Oregon et de l'Idaho. La construction d'une centrale sur un site donné implique une autorisation de la part d'une agence fédérale. Cette autorisation n'est accordée qu'à l'issue d'études approfondies qu'il serait trop coûteux de vouloir entreprendre de manière systématique. A ce stade du processus de décision, l'objectif du WPPSS est donc de sélectionner un ou un petit nombre de sites dont on a de bonnes raisons de croire qu'ils sont de "bons" sites et donc auraient de "bonnes chances" d'être acceptés par l'agence fédérale à l'issue des études approfondies. Cette première sélection doit se fonder uniquement sur les données disponibles sur les sites et des reconnaissances sur le terrain à l'exclusion de toute étude approfondie de chaque site.

Un tel objectif pourrait amener l'homme d'étude à opter pour une problématique du tri $P.\beta$ en cherchant à isoler les "bons" sites. Les auteurs de l'étude U ont procédé autrement en :

- retenant, dans une première phase, les sites acceptables d'un point de vue technique et
- en appliquant à ces sites une procédure de classement (problématique du rangement $P.\gamma$).

La première phase de l'étude a donc visé à cerner un ensemble de sites potentiels techniquement acceptables. Cette phase a été réalisée par l'application d'une procédure d'écrémage de type conjonctif (cf. 5.2.2.2) sur la base de critères techniques, les niveaux d'aspiration étant fixés par les experts du WPPSS. On a par exemple :

- exclu tous les sites situés à moins de 3 miles d'une agglomération de plus de 2 500 habitants ;
- exclu tous les sites situés à moins de 5 miles d'une faille de plus de 12 miles de long, etc.

A l'issue de cette procédure d'écrémage ainsi que de premières reconnaissances sur le terrain, 9 sites possibles ont été retenus comme techniquement acceptables. Ces 9 sites constituent l'ensemble A des actions potentielles. La deuxième phase de l'étude vise alors à classer les 9 sites sur la base de considérations autres que purement techniques. Notons que, lors de cette deuxième phase, les auteurs de l'étude U n'ont eu que peu accès aux "décideurs" du WPPSS. De ce fait, c'est souvent l'équipe d'étude elle-même, comprenant de nombreux experts, qui a joué le rôle de ces décideurs dans l'élaboration du système de préférences sur lequel prend appui l'étude d'aide à la décision.

9.2.2 Détermination des axes de signification

Les 9 sites retenus lors de la deuxième phase d'étude ont tous fait l'objet d'une description détaillée. Ils se différencient sur de nombreux aspects. Afin de raisonner leur comparaison, les auteurs

de l'étude U ont retenu ¹ six points de vue donnant lieu à autant d'axes de signification :

– *axe n° 1 : santé, sécurité* : l'installation d'une centrale sur un site accroît le taux de radiation auquel sont soumis les individus présents dans le voisinage du site ainsi que le risque d'accidents nucléaires auxquels ils sont exposés ;

– *axe n° 2 : perte de saumons* : une fraction des nombreux saumons qui fréquentent la rivière servant au refroidissement de la centrale est appelée à disparaître (du fait de la prise d'eau et de l'eau rejetée à une température plus élevée) ;

– *axe n° 3 : impact biologique sur la région environnant la centrale* : il s'agit ici des effets biologiques de toute nature, à l'exclusion de la perte des saumons ;

– *axe n° 4 : impact socio-économique* : l'afflux temporaire de main-d'œuvre durant la construction de la centrale entraîne des effets perturbateurs (nécessité de créer et de financer de nouveaux équipements) sur l'équilibre socio-économique de la région environnante ;

– *axe n° 5 : esthétique* : les lignes électriques à haute tension servant à raccorder la centrale au réseau général peuvent contribuer à enlaidir le paysage ;

– *axe n° 6 : coût* : il s'agit des coûts d'investissement et d'exploitation de la centrale.

La description des conséquences de l'action a (implantation d'une centrale sur le site a) ayant trait à l'un quelconque de ces 6 axes de signification ne s'impose pas de toute évidence.

¹ au vu des descriptions détaillées des différents sites et après élimination de points de vue pertinents mais sur lesquels les sites ne se différenciaient pas ou n'avaient que fort peu de chance de se révéler différents.

Dans le modèle de la théorie de l'utilité espérée utilisé dans l'étude U, on cherche à associer, à chaque axe de signification, une ou plusieurs dimensions (cf. 1.5, 4.5) et à évaluer les conséquences de la mise en œuvre d'une action potentielle sous la forme d'une distribution de probabilités sur les échelles associées à ces dimensions.

Rappelons (cf. 4.5.1), en notant $E_1, E_2, \dots, E_{\pi}$ les échelles associées aux $\bar{n}$ dimensions retenues, que le modèle de la théorie de l'utilité espérée conduit à bâtir un critère unique de synthèse du type ¹ (cf. (r.4.5.1)) :

$$g(a) = \sum_{\underline{e} \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\pi}} u(\underline{e}) \delta^a(\underline{e}), \quad (\text{r.9.2.1})$$

$\delta^a(\underline{e})$ étant la probabilité de l'élément $\underline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{\pi})$ de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\pi}$ si l'action a est mise à exécution.

La mise en œuvre de ce modèle suppose donc :

- de déterminer, compte-tenu des 6 axes de signification pertinents, l'ensemble des $\bar{n}$ dimensions $d_1, d_2, \dots, d_{\pi}$ à considérer et leurs échelles associées $E_1, E_2, \dots, E_{\pi}$,
- de déterminer, pour chaque site $a \in A$, les conséquences de sa mise à exécution sous la forme d'une distribution de probabilités sur l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\pi}$, produit cartésien des échelles associées aux $\bar{n}$ dimensions, et
- d'associer, à chaque élément $\underline{e}$ de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{\pi}$, une utilité $u(\underline{e})$.

9.2.3 Détermination des dimensions

Axe n° 1 : Santé-sécurité : La dimension retenue d_1 correspond à un indice administratif (le "Site Population Factor") visant

¹ dans le cas où les échelles sous-jacentes ont un nombre fini d'échelons. Il est aisé de modifier cette formule lorsque tel n'est pas le cas.

à mesurer le nombre d'individus dont la santé et la sécurité risquent d'être affectées par l'implantation d'une centrale et ceci en fonction de l'éloignement de ces individus au site.

Axe n° 2 : Perte de saumons : La quantité totale de saumons dont on redoute la disparition suite à l'installation d'une centrale a été jugée insuffisante pour appréhender la conséquence "perte de saumons". Compte-tenu de la précarité de certains équilibres écologiques, la destruction de 10 000 saumons dans une rivière qui en compte 20 000 ne peut être regardée comme équivalente à celle de 10 000 saumons dans une rivière qui en compte 300 000. La perte de saumons a donc été analysée selon deux sous-dimensions :

d_2' : nombre total de saumons vivant dans la rivière concernée,

d_2'' : pourcentage de saumons détruits.

En notant respectivement E_2' et E_2'' les échelles associées aux sous-dimensions d_2' et d_2'' , on associe, à l'axe n° 2, une dimension composite d_2 dont l'échelle est $E_2 = E_2' \times E_2''$. Notons que, contrairement à ce qui est le cas pour toutes les autres dimensions, les éléments de E_2 ne sont pas naturellement ordonnés¹.

Axe n° 3 : Impact biologique : Les conséquences biologiques liées à l'implantation d'une centrale nucléaire sont nombreuses et complexes. Toute étude approfondie étant exclue à ce stade, il a semblé judicieux, aux auteurs de l'étude U, de chercher à évaluer l'impact biologique de l'implantation d'une centrale en bâtissant une échelle qualitative à 9 échelons, chaque échelon faisant l'objet d'une description détaillée intégrant l'ensemble des impacts

¹ Il est cependant clair que le meilleur niveau sur cette échelle composite consiste à ne perdre aucun saumon et cela quelle que soit la population de saumons dans la rivière. De même, le pire échelon sur cette échelle consiste à perdre 100 % des saumons dans une rivière en comportant un très grand nombre.

biologiques pertinents ¹.

A titre d'illustration, nous donnons ici la description du premier et du dernier de ces échelons ² (sachant qu'un Mile carré représente approximativement la surface perturbée par l'installation d'une centrale) :

Echelon 0 (meilleur échelon)	Perte complète d'1 Mile carré de terre consacrée à l'agriculture ou entièrement urbanisée. Aucune perte de biotopes spécifiques.
Echelon 8 (pire échelon)	Perte complète d'1 Mile carré de forêt adulte et non exploitée et/ou de marais et/ou de biotopes spécifiques à des espèces en danger.

C'est l'ensemble des 9 échelons de l'échelle E_3 qui constitue la dimension d_3 .

Axe n° 4 : Impact socio-économique : Pour les mêmes raisons que pour l'axe n° 3, les auteurs de l'étude U ont retenu une dimension correspondant à une échelle qualitative à 8 échelons.

A titre d'illustration, nous donnons ici la description des deux échelons extrêmes ³.

Echelon 0 (meilleur échelon)	Région urbaine, population d'au moins 100 000 habitants. Pas d'impact significatif.
---------------------------------	---

¹ Pour une analyse approfondie des problèmes liés à ce genre d'échelles, nous renvoyons à Keeney (1981).

² Pour plus de précisions, nous renvoyons à Keeney et Nair (1976) et à Keeney et Robillard (1977).

³ Rappelons que cet axe vise à prendre en compte les perturbations de l'équilibre socio-économique engendrées par la centrale. La meilleure situation correspond alors à l'absence de perturbations.

Echelon 7
(pire échelon)

Site situé loin d'une ville de 10 000 habitants. De nombreux impacts à attendre en raison de la venue d'un très grand nombre d'ouvriers. Les infrastructures existantes permettent au début un développement rapide mais se révéleront insuffisantes pour faire face à cette croissance. Des déséquilibres importants dans les finances locales sont à prévoir. Ecart importants entre encaissements et décaissements. La taille de la ville et sa capacité d'emprunt ne permettront pas d'éviter une période de dépression.

De même que précédemment, c'est l'ensemble des 8 échelons de l'échelle E_4 qui constitue la dimension d_4 .

Axe n° 5 : Impact esthétique : La dimension d_5 mesure la longueur (exprimée en Miles) des lignes à haute tension (nécessaires pour raccorder la centrale au réseau) qui porteront atteinte à l'environnement si la centrale est installée.

Axe n° 6 : Coût : Les auteurs de l'étude U ont considéré que les coûts occasionnés par la construction et l'exploitation d'une centrale sur un site quelconque a pouvaient être analysés par référence à ceux relatifs au site le plus économique a_2 . La dimension d_6 reflète un coût différentiel annuel (exprimé en millions de Dollars de 1985) en faisant l'hypothèse d'une durée de vie de 30 ans pour la centrale, le taux d'actualisation retenu étant de 8,4 % ¹.

¹ Les coûts sont supposés correspondre à un type standard de construction que l'on n'envisage pas de remettre en cause pour, par exemple, augmenter la sécurité.

9.2.4 Evaluation des distributions de probabilités

On a vu, au paragraphe précédent, que les auteurs de l'étude U ont retenu 6 dimensions ¹ ($d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$) pour repérer les conséquences de l'implantation d'une centrale sur un site. L'étape suivante, dans le cadre du modèle de la théorie de l'utilité espérée, consiste à apprécier, sous la forme d'une distribution de probabilités sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_6$, les conséquences de l'implantation d'une centrale sur un site donné.

Les auteurs de l'étude U ont admis que, sur un site donné, les distributions de probabilités sur chacune des dimensions pouvaient être considérées comme indépendantes. On a donc, pour tout site potentiel a et pour tout élément $\underline{e} \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_6$:

$$\delta^a(\underline{e}) = \prod_{i=1}^6 \delta_i^a(e_i),$$

e_i désignant la $i^{\text{ème}}$ composante de $\underline{e}$ et δ_i^a étant la distribution marginale de δ^a sur E_i .

On cherche alors à évaluer, pour chacune des 6 dimensions retenues, 9 distributions de probabilités correspondant à chacun des 9 sites.

– *Dimensions d_1 et d_5* : Les auteurs de l'étude U ont retenu, sur ces deux dimensions et pour tous les sites, des distributions de probabilités dégénérées affectant une probabilité 1 à un échelon bien défini. Les évaluations sont de ce fait ponctuelles ². Chaque site $a \in A$ est ainsi repéré, sur ces deux dimensions, par deux valeurs certaines ³ dont l'évaluation a fait appel à des comptages

¹ dont la dimension "composite" d_2 .

² Cf. 1.5 et MMCAD, chapitre 8.

³ D'un point de vue formel, pour chaque site a , on définit deux distributions de probabilités δ_1^a et δ_5^a telles que, pour $i = 1, 5$ et pour tout $e \in E_i$:

$\delta_i^a(e) = 1$ si $e = \gamma_i(a)$ et

$\delta_i^a(e) = 0$ sinon.

sur des cartes :

- $\gamma_1(a)$: valeur d'un indice de santé-sécurité pour les populations au voisinage du site a ;

- $\gamma_5(a)$: longueur, en Miles, des lignes à haute tension qui porteront atteinte à l'environnement si une centrale est bâtie sur le site a .

– *Dimensions d_3 et d_4* : L'évaluation des sites sur ces deux dimensions fait appel à des avis d'experts (biologistes pour d_3 , économistes urbains pour d_4). Sur la dimension d_3 , on a demandé à chaque expert de déterminer, pour chaque site, deux échelons consécutifs de l'échelle E_3 encadrant, selon eux, l'impact biologique de l'installation d'une centrale sur ce site. L'échelle E_3 a 9 échelons et donc 8 intervalles entre échelons consécutifs. La distribution de probabilités associée à un site donné sur la dimension d_3 n'est autre que la distribution de fréquences des avis d'experts sur les 8 intervalles. On a procédé de même sur la dimension d_4 .

– *Dimension d_6* : Sur cette dimension, la distribution de probabilités associée à chaque site (à l'exception du site a_2 supposé être le plus économique) a été supposée gaussienne¹. Des experts ont estimé, pour chaque site $a \in A \setminus \{a_2\}$, une évaluation moyenne $\bar{x}_6(a)$ l'écart-type de la distribution étant alors exprimé comme une fraction de cette moyenne, en l'occurrence 1/4. Sur cette dimension qui correspond à un coût différentiel par rapport à a_2 , l'évaluation de a_2 vaut 0 avec certitude.

– *Dimension d_2* : De part sa nature "composite", cette dimension est plus complexe que les précédentes. Les auteurs de l'étude U ont admis que, pour chaque site $a \in A$:

¹ La dimension d_6 représentant un coût différentiel par rapport au site le plus économique a_2 , cette hypothèse peut sembler critiquable. Notons par exemple que la modélisation retenue ici n'exclut pas le fait qu'un site donné puisse entraîner des coûts inférieurs au site a_2 , ce qui paraît contredire la définition même de d_6 . Une variable aléatoire bornée et positive semblerait ici plus adaptée. Un examen critique des options prises par les auteurs de l'étude U sera fait au 9.3.

. Le nombre de saumons vivant dans la rivière concernée (sous-dimension d_2') pouvait faire l'objet d'une appréciation certaine $\gamma_2(a)$ dont l'évaluation a fait appel à des avis d'experts.

. Le pourcentage de saumons détruits (sous-dimension d_2'') pouvait se modéliser sous la forme d'une distribution de probabilités gaussienne ¹. Des experts ont alors estimé, pour chaque site $a \in A$, la moyenne $\bar{x}_2(a)$ de cette distribution, son écart-type étant alors apprécié comme une fraction de cette moyenne, en l'occurrence 1/2.

L'évaluation des 9 sites sur les 6 dimensions est donnée au tableau 9.2.1.

9.2.5 Détermination de la forme de la fonction d'utilité

Quelques questions ainsi que des considérations de bon sens ont conduit les auteurs de l'étude U à admettre ² que :

- chaque paire de dimensions était indépendante dans l'ensemble des dimensions ;
- chaque dimension était indépendante en utilité dans l'ensemble des dimensions (cf. 4.5.2.1).

¹ Ici encore, cette option paraît critiquable. Notons par exemple que la modélisation retenue amène à considérer des pourcentages de pertes négatifs (création de saumons) et des pourcentages de pertes supérieurs à 100 %. S'agissant d'un pourcentage, une variable aléatoire sur l'intervalle $[0 ; 1]$ semblerait s'imposer.

² Rappelons (cf. 1.7 et 2.4) que le mot "admettre" peut ici s'entendre de deux façons distinctes :

- soit en supposant que le système de préférences tel qu'il existe de façon plus ou moins latente jouit de ces propriétés ;
- soit en supposant que le système de préférences tel qu'on veut le bâtir peut être raisonné dans le cadre de ces propriétés que rien ne permet d'infirmer. Telle que l'étude U est présentée et justifiée, il semble que ses auteurs aient plutôt penché pour la première interprétation.

Tableau 9.2.1 : Evaluation des distributions de probabilités dans l'étude U

	d_1	d_2'	d_2''	d_3	d_4	d_5	d_6
	$\gamma_1(a)$	$\gamma_2(a)$	$\bar{x}_2(a)$	δ_3^*	δ_4^*	$\gamma_5(a)$	$\bar{x}_6(a)$
a_1	0,057	75	8	1-2:0,9 2-3:0,1	1-2:0,2 2-3:0,65 3-4:0,15	1	2,035
a_2	0,04	75	8	1-2:0,9 2-3:0,1	1-2:0,25 2-3:0,55 3-4:0,1 4-5:0,1	1	0
a_3	0,025	75	8	1-2:0,8 2-3:0,2	1-2:0,3 2-3:0,45 3-4:0,15 4-5:0,1	7	1,535
a_4	0,048	5,5	15	2-3:0,2 3-4:0,8	2-3:0,2 3-4:0,5 4-5:0,3	6	1,933
a_5	0,044	17	15	3-4:0,2 4-5:9,5 5-6:0,3	1-2:0,2 2-3:0,45 3-4:0,2 4-5:0,15	12	12,347
a_6	0,023	5	15	3-4:0,2 4-5:0,5 5-6:0,3	2-3:0,1 3-4:0,55 4-5:0,3 5-6:0,05	1	17,713
a_7	0,052	3	15	1-2:0,3 2-3:0,6 3-4:0,1	2-3:0,2 3-4:0,5 4-5:0,2 5-6:0,1	0	4,834
a_8	0,011	430	1	0-1:0,1 1-2:0,5 2-3:0,4	2-3:0,1 3-4:0,4 4-5:0,4 5-6:0,1	0	10,936

a_5	0,018	365	1	0-1:0,7 1-2:0,3	1-2:0,05 2-3:0,6 3-4:0,2 4-5:0,15	0	11,423
-------	-------	-----	---	--------------------	--	---	--------

Remarques :

Dimensions d_1 et d_5 :

Evaluations ponctuelles $\gamma_1(a)$ et $\gamma_5(a)$.

Dimensions d_3 et d_4 :

Distribution d'avis d'experts sur les intervalles entre échelons consécutifs δ_3^* et δ_4^* .

Sous-dimension d_2' :

Evaluation ponctuelle du nombre de saumons (en milliers) présents dans la rivière concernée $\gamma_2(a)$.

Sous-dimension d_2'' :

Moyenne $\bar{x}_2(a)$ de la distribution de probabilité gaussienne suivie par le pourcentage de saumons perdus. L'écart-type de cette distribution vaut la moitié de la moyenne.

Dimension d_6 :

Moyenne $\bar{x}_6(a)$ de la distribution de probabilités gaussienne suivie par le coût (en millions de Dollars) différentiel avec le site a_2 . L'écart-type de cette distribution vaut le quart de cette moyenne. L'évaluation de a_2 vaut 0 avec certitude.

D'après le résultat 4.5.1, on a alors soit ¹ (cf. (r.4.5.2), (r.4.5.3 bis), (r.4.5.3 ter)) :

$$u(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = \sum_{i=1}^6 k_i^U \cdot u_i(e_i) \quad (r.9.2.2)$$

$$\text{si } \sum_{i=1}^6 k_i^U = 1,$$

soit

¹ en notant $e_2 = (e_2', e_2'') \in E_2 = E_2' \times E_2''$. L'exposant U associé aux coefficients k_i vise à les différencier des coefficients d'importance qui seront utilisés dans l'étude S.

$$u(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = [(\prod_{i=1}^6 (1 + k k_i^U u_i(e_i))) - 1] \cdot 1/k. \quad (r.9.2.3)$$

$$\text{si } \sum_{i=1}^6 k_i^U \neq 1,$$

avec

$$\begin{aligned} u_i(e_{i*}) &= 0, u_i(e_i^*) = 1, \\ u(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{6*}) &= 0, \\ u(e_1^*, e_2^*, \dots, e_6^*) &= 1, \\ k_i^U &\in [0; 1], \end{aligned}$$

$$k > -1 \text{ et } k \neq 0 \text{ solution de } 1 + k = \prod_{i=1}^6 (1 + k \cdot k_i^U), \quad (r.9.2.4)$$

e_i^* et e_{i*} désignant respectivement la meilleur et la pire valeur sur l'échelle E_i associée à la dimension d_i .

La fonction d'utilité sera alors déterminée si l'on parvient à élaborer les 6 fonctions d'utilité partielles et les 6 coefficients k_i^U (le coefficient k s'en déduisant éventuellement par un simple calcul, cf. 4.5.3.2 et 4.5.3.3).

9.2.6 Fonctions d'utilité partielles

L'élaboration des fonctions d'utilité partielles u_1, u_3, u_4, u_5 et u_6 a été réalisée au moyen des techniques standards décrites au 4.5.3.2¹ (loteries 50-50 pour u_1, u_5 et u_6 , probabilité variable pour u_3 et u_4 , les échelles sous-jacentes étant discrètes). Le cas de la fonction u_2 est plus complexe.

¹ Le travail d'élaboration de u_6 a été ici simplifié en admettant des hypothèses sur la nature de l'aversion pour le risque sur les dimensions considérées, hypothèses conduisant à spécifier une forme fonctionnelle précise pour les fonctions (cf. Pratt (1964), Keeney et Raiffa (1976, chapitre 4) et 4.5.3.2). Il en a été de même pour u_2 .

On aurait pu, conceptuellement, envisager d'élaborer de la même manière la fonction u_2 . Du fait de la nature composite de cette dimension, la complexité des questions posées aurait néanmoins été très grande. Un travail spécifique¹ a conduit à distinguer le cas des grandes rivières ($\gamma_2(a) > 300\,000$) et celui des petites rivières ($\gamma_2(a) < 100\,000$), aucune rivière moyenne n'intervenant dans l'étude. Pour les grandes rivières, il a été admis que seule la quantité de saumons perdus était à prendre en compte, c'est-à-dire que :

$$u_2(e_2) = u_2(e_2' e_2'') = f(e_2' e_2'').$$

La technique des loteries 50-50 (jointe à une hypothèse sur la nature de l'aversion pour le risque) a alors conduit à :

$$u_2(e_2) = u_2(e_2' e_2'') = 0,568 + 0,432 \cdot [0,7843 \cdot [e^{0,00274(300 - e_2' e_2'')} - 1]],$$

$e_2' e_2''$ étant exprimé en milliers de saumons.

Pour les petites rivières, on a posé :

$$u_2(e_2) = u_2(e_2', e_2'') = f(e_2') + g(e_2'') - f(e_2') g(e_2''),$$

f et g étant obtenues par la technique des loteries 50-50.

Ces fonctions d'utilité partielles sont représentées à la figure 9.2.1.

9.2.7 Remarque : obtention d'un tableau de performances

Notons que, en raison de l'hypothèse d'indépendance stochastique des diverses distributions de probabilités considérées, on a, pour tout site $a \in A$:

$$\begin{aligned} g(a) &= \sum_{e_1 \in E_1} \sum_{e_2 \in E_2} \dots \sum_{e_6 \in E_6} u(e_1, e_2, \dots, e_6) \cdot \delta^a(e_1, e_2, \dots, e_6) \\ &= \sum_{e_1 \in E_1} \sum_{e_2 \in E_2} \dots \sum_{e_6 \in E_6} u(e_1, e_2, \dots, e_6) \cdot \prod_{i=1}^6 \delta_i^a(e_i). \end{aligned}$$

Lorsque $u(e_1, e_2, \dots, e_6)$ s'écrit sous la forme additive (r.9.2.2) ou sous la forme multiplicative (r.9.2.3), il est facile de montrer

¹ Voir Keeney et Robillard (1977).

(cf. Keeney et Raiffa (1976, p. 242)) alors que $g(a)$ peut respectivement s'écrire :

$$g(a) = \sum_{i=1}^6 k_i^U \cdot g_i(a) \quad (\text{forme additive}) \quad (r.9.2.5)$$

et

$$g(a) = \left(\prod_{i=1}^6 (1 + k \cdot k_i^U \cdot g_i(a)) - 1 \right) \frac{1}{k} \quad (r.9.2.6)$$

(forme multiplicative)

avec

$$\text{où } g_i(a) = \sum_{e_j \in E_i} u_i(e_j) \cdot \delta_i^a(e_j). \quad (r.9.2.7)$$

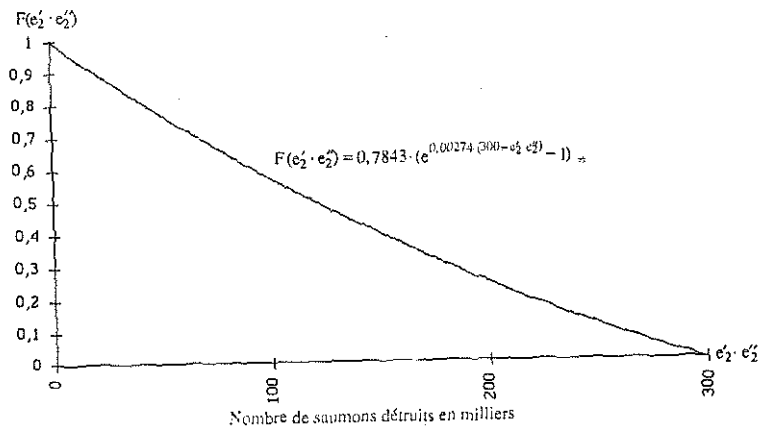
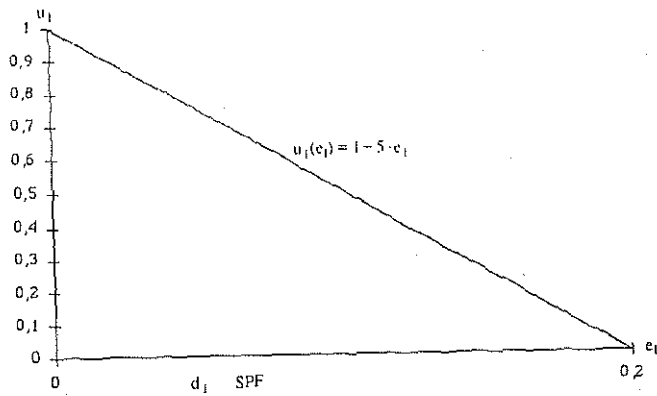
Les nombres $^1 g_i(a)$ représentent donc l'espérance par rapport à la fonction d'utilité partielle u_i de la distribution de probabilités sur la dimension d_i correspondant à l'action a .

Bien qu'il ne soit pas nécessaire de faire appel à la notion de critère dans la théorie de l'utilité espérée (cf. 4.5.1), il est clair ici que les fonctions g_i jouent le rôle de vrai-critères.

L'évaluation de ces 6 vrai-critères pour les 9 sites est donnée au tableau 9.2.2.

Le fait d'exhiber un tel tableau de performances dans l'étude U peut être utile et/ou informatif, en particulier si celui-ci révèle des cas de dominance. On constatera aisément que tel n'est pas le cas ici.

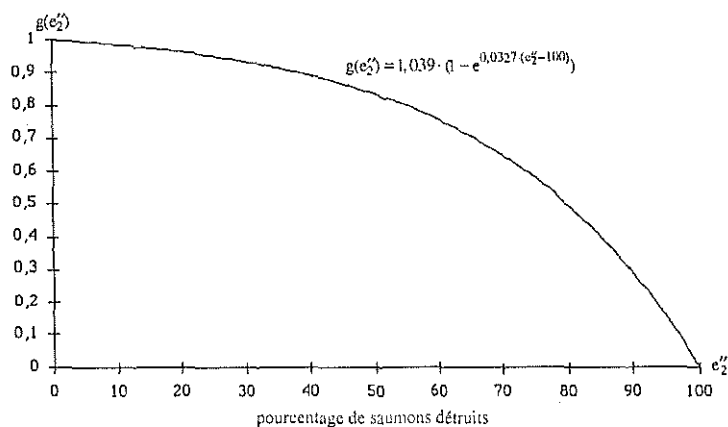
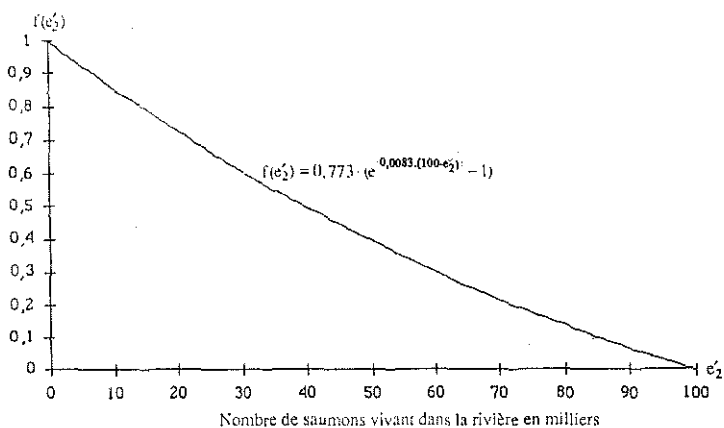
¹ Dans la formule (r.9.2.7), la sommation devient une intégrale lorsque la distribution δ_i^a est continue comme c'est le cas sur les dimensions d_2 et d_6 .



Cas des grandes rivières

$$u_2(e_2) = u_2(e_2', e_2'') = 0.568 + 0.432 \cdot F(e_2', e_2'')$$

Figure 9.2.1 : Fonctions d'utilité dans l'étude U



Cas des petites rivières

$$u_2(e_2) = u_2(e'_2, e''_2) = f(e'_2) + g(e''_2) - f(e'_2) \cdot g(e''_2)$$

Figure 9.2.1 (suite) : Fonctions d'utilité dans l'étude U

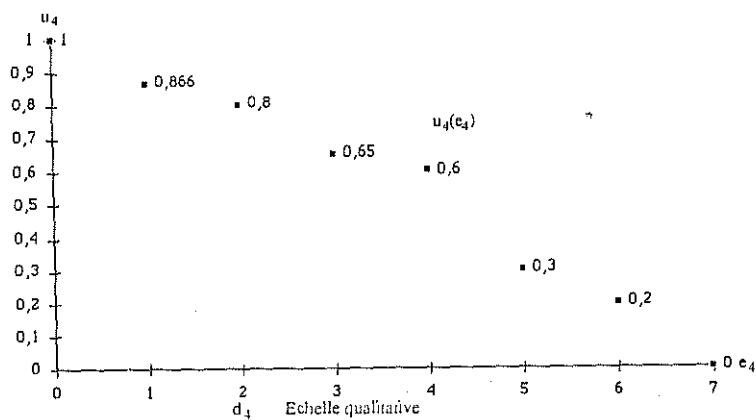
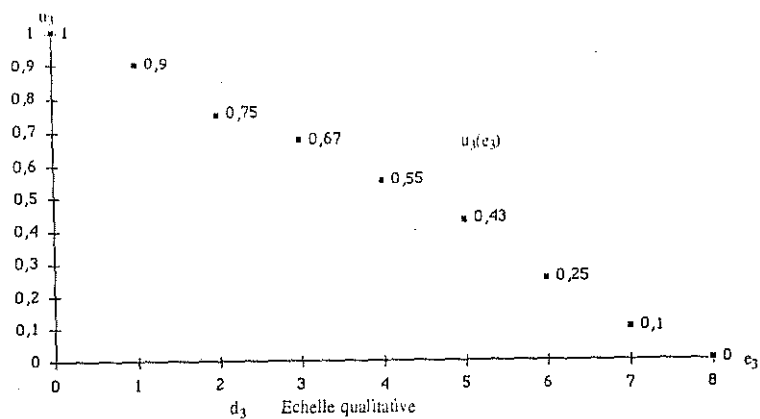


Figure 9.2.1 (suite) : Fonctions d'utilité dans l'étude U

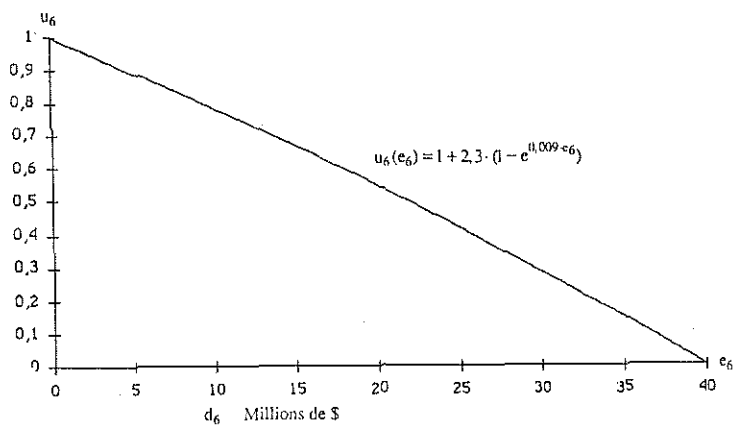
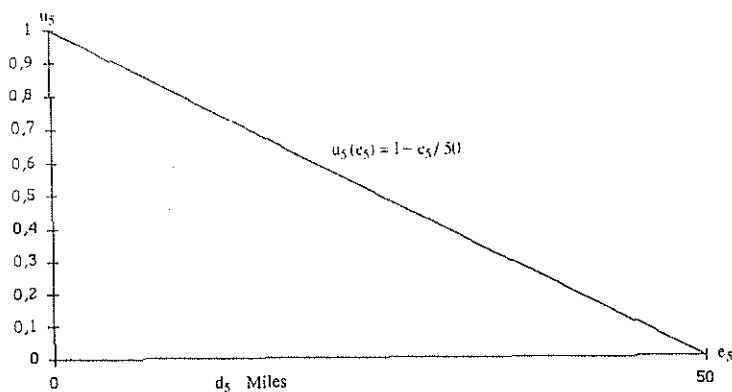


Figure 9.2.1 (suite) : Fonctions d'utilité dans l'étude U

Tableau 9.2.2 : Tableau de performances dans l'étude U

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1	0,71500	0,98953	0,81350	0,73160	0,98000	0,95746
2	0,80000	0,98953	0,81350	0,71450	0,98000	1,00000
3	0,87500	0,98953	0,80200	0,71490	0,86000	0,96799
4	0,76000	0,99782	0,63000	0,59250	0,88000	0,95961
5	0,78000	0,99359	0,46900	0,68535	0,76000	0,72868
6	0,88500	0,99801	0,46900	0,56375	0,98000	0,60035
7	0,74000	0,99880	0,73450	0,57250	1,00000	0,89759
8	0,94500	0,99099	0,79150	0,52750	1,00000	0,76134
9	0,91000	0,99235	0,91250	0,66915	1,00000	0,75012

Remarques :

- La préférence croît avec les valeurs pour tous les critères.
- Les calculs de g_2 et g_6 ont été effectués sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{\lambda x} dx = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}.$$

(Notons que ce mode de calcul justifie les critiques que l'on peut faire au choix d'une distribution normale, l'intégrale étant ici prise de $-\infty$ à $+\infty$).

- Les calculs de g_3 et g_4 ont été effectués en affectant, à chaque intervalle entre deux échelons consécutifs, une utilité égale à la moyenne de l'utilité des deux échelons.

9.2.8 Evaluation des coefficients k_i^U

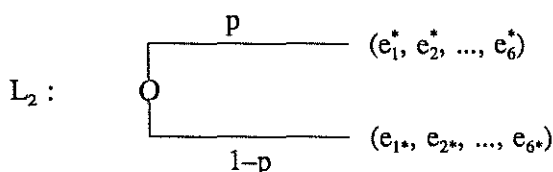
Pour achever de caractériser le système de préférences dans l'étude U, il faut obtenir une valeur pour les coefficients k_i^U et en déduire, si leur somme est différente de 1, la valeur de k en résol-

vant l'équation ¹ (r.9.2.4) conformément à ce qui a été dit au 4.5.3.3.

Au sein du modèle de la théorie de l'utilité espérée, l'évaluation des coefficients k_i^U intervenant dans la décomposition de la fonction d'utilité globale s'opère au travers de comparaisons de loteries, de même que pour l'élaboration des fonctions d'utilité partielles u_i (cf. 4.5.3.3).

Notons e_i^* et e_{i*} les valeurs respectives utilisées pour caler la fonction d'utilité partielle entre 0 et 1. On a $u_i(e_{i*}) = 0$ et $u_i(e_i^*) = 1$. Considérons les deux loteries multidimensionnelles suivantes. La première, L_1 , est une loterie dégénérée conduisant avec certitude au site fictif ayant les pires évaluations sur toutes les dimensions, sauf sur la dimension j où son évaluation est e_j^* . La seconde loterie, L_2 , met en jeu un second site fictif ayant pour évaluation soit le maximum possible sur toutes les dimensions avec une probabilité p , soit le minimum possible sur toutes les dimensions avec une probabilité $(1 - p)$.

$$L_1 : (e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_j^*, \dots, e_{6*})$$



L'espérance d'utilité de L_2 est égale à p . Dans la forme multiplicative comme dans la forme additive, l'utilité de la loterie L_1 est égale à k_i^U . Si l'on peut trouver une probabilité p assurant l'indifférence entre ces deux loteries, on pourra poser $k_j^U = p$ (cf. 4.5.3.3).

¹ Cette équation en k est de degré 6. Cependant, elle admet, en général, une seule racine réelle différente de 0 et supérieure à -1 . Sur ce point, voir Keeney et Raiffa (1976).

En itérant la procédure, on peut donc, en principe, obtenir de la sorte 6 coefficients k_i^U et en déduire éventuellement k .

A la différence des comparaisons de loteries nécessaires pour élaborer les fonctions d'utilité partielles, celles devant être effectuées à ce niveau font intervenir des sites fictifs se différenciant sur plus d'une dimension. Même si l'on a recours, pour l'élaboration de la probabilité p , à des techniques de questionnement sophistiquées, on ne peut que constater la difficulté de prendre en considération de tels sites fictifs irréalistes. Pour tenter de contourner cet obstacle, les auteurs de l'étude U ont eu recours à une procédure d'évaluation indirecte comprenant :

- un classement des coefficients k_i^U ;
- une évaluation de taux de substitution ;
- une évaluation des coefficients k_i^U .

a) Classement des coefficients k_i^U

Avant de passer directement à une élaboration numérique des coefficients k_i^U , on procède à un classement de ceux-ci, ce qui permet d'éviter les incohérences lors des étapes ultérieures. Considérons le site fictif ayant pour évaluation $(e_{1*}, e_{2*}, \dots, e_{i*}, \dots, e_{6*})$. Son utilité, tant dans la forme additive que multiplicative, vaut k_i^U (cf. 4.5.3.3).

On pose alors au "décideur" ¹ la question suivante : "Considérons un site fictif ayant, sur toutes les dimensions, la plus mauvaise évaluation avec certitude. Si vous en aviez la possibilité, sur quelle dimension préféreriez-vous passer de la pire évaluation à la meilleure ?" ².

¹ Rappelons que, dans l'étude U, c'est en fait l'équipe d'étude qui a eu à répondre à ces questions.

² Même si cette question fait intervenir des sites fictifs irréalistes, elle ne porte pas sur des loteries et semble plus "simple" que celle nécessaire pour élaborer directement les coefficients k_i^U .

Supposons qu'une dimension soit choisie. On repose alors la même question en supposant que l'on ne peut jouer sur la dimension qui vient d'être choisie et ainsi de suite. Dans l'étude U, ce processus a donné les relations :

$$\begin{aligned} (e_{1*}, e_{2*}, e_{3*}, e_{4*}, e_{5*}, e_6^*) & P (e_1^*, e_{2*}, e_{3*}, e_{4*}, e_{5*}, e_{6*}), \\ (e_1^*, e_{2*}, e_{3*}, e_{4*}, e_{5*}, e_{6*}) & P (e_{1*}, e_2^*, e_{3*}, e_{4*}, e_{5*}, e_{6*}), \\ (e_{1*}, e_2^*, e_{3*}, e_{4*}, e_{5*}, e_{6*}) & P (e_{1*}, e_{2*}, e_{3*}, e_4^*, e_{5*}, e_{6*}), \\ (e_{1*}, e_{2*}, e_{3*}, e_4^*, e_{5*}, e_{6*}) & P (e_{1*}, e_{2*}, e_{3*}, e_{4*}, e_5^*, e_{6*}), \\ (e_{1*}, e_{2*}, e_{3*}, e_{4*}, e_5^*, e_{6*}) & P (e_{1*}, e_{2*}, e_3^*, e_{4*}, e_{5*}, e_{6*}). \end{aligned}$$

Tant dans la forme additive que multiplicative, ces relations conduisent à :

$$k_6^U > k_1^U > k_2^U > k_4^U > k_5^U > k_3^U.$$

b) Evaluation de taux de substitution

Avant de passer directement à une comparaison portant sur les 6 dimensions à la fois, on essaie d'obtenir des taux de substitution. Sachant que $k_6^U > k_1^U$, on doit avoir :

$$(e_{1*}, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_6^*) P (e_1^*, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_{6*}).$$

Comme le permettent les hypothèses d'indépendance sous-tendant la forme additive ou multiplicative de la fonction d'utilité, $e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0$ sont des valeurs fixées quelconques. On cherche alors à questionner le décideur sur la valeur e_6^1 pour laquelle il estime :

$$(e_1^*, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_{6*}) I (e_{1*}, e_2^0, e_3^0, e_4^0, e_5^0, e_6^1).$$

Rappelons que l'on a $e_1^* = 0$, $e_6^* = 0$ et $e_{6*} = 40$ (cf. figure 9.2.1).

Après réflexion, le décideur a admis l'indifférence entre le couple (0 ; 40) et (0,2 ; 5) sur les dimensions 1 et 6, les valeurs sur les autres dimensions étant fixées. En d'autres termes, le décideur était prêt à augmenter le coût de la centrale de 35 millions de Dollars afin de passer d'une région à forte densité de population à une région inhabitée.

La dimension 6 étant prise pour dimension de référence, on obtient de la sorte 4 autres taux de substitution tout en procédant à des questions de contrôle. L'information ainsi obtenue est résumée dans la figure 9.2.2.

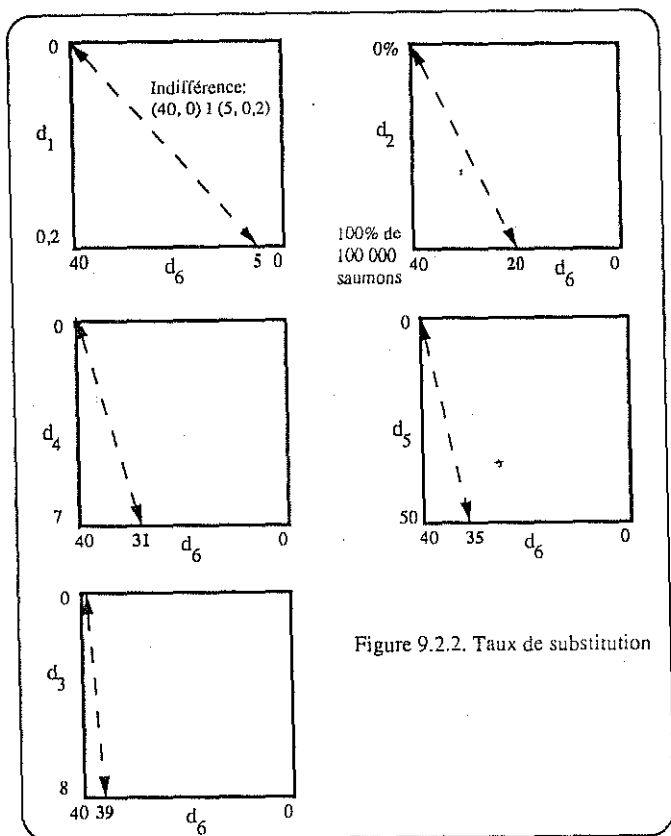
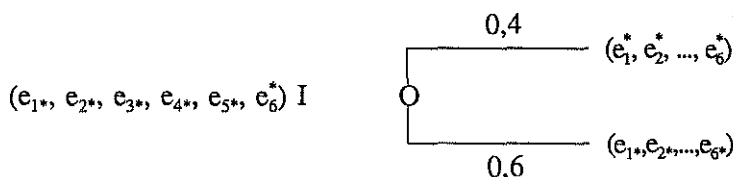


Figure 9.2.2. Taux de substitution

c) Evaluation des coefficients k_i^U

Sur la base de ce qui précède, on peut se contenter d'évaluer directement un seul des coefficients k_i^U . Cette évaluation concerne la dimension de référence choisie au b) qui correspond au plus grand des k_i^U . Après tâtonnements, il a été estimé que :



On en déduit $k_6^U = 0,4$.

Les taux de substitution obtenus au b) permettent alors de tirer, de la valeur de k_6^U , tous les autres k_i^U . En effet, on a, pour $i = 1, 2, \dots, 5$:

$$(e_1^*, e_6^*) \text{ I } (e_1^*, e_6^i)$$

quelles que soient les valeurs e_j^0 fixées sur les dimensions j autres que i et 6 .

En posant $e_j^0 = e_{j^*}$ pour $j \neq i$ et $j \neq 6$, on a, tant dans la forme additive que multiplicative, $k_i^U = u_6(e_6^i)$ où la valeur de e_6^i est fixée par la figure 9.2.2.

Les fonctions d'utilité partielles de la figure 9.2.1 permettent de calculer $u_6(e_6^i)$ pour $i = 1, 2, \dots, 5$.

On obtient après calcul ¹ :

$$k_1^U = 0,358 ; k_2^U = 0,218 ; k_3^U = 0,013 ; k_4^U = 0,104 ;$$

$$k_5^U = 0,059 ; k_6^U = 0,4.$$

On constate que $\sum_{i=1}^6 k_i^U = 1,152 \neq 1$, ce qui est regardé comme une justification du choix de la forme multiplicative ².

¹ On retiendra dans ce qui suit ces valeurs approximatives données par Keeney et Nair (1976).

² Cf. Keeney (1974) et 4.5.3.

L'équation $1 + k = \prod_{i=1}^6 (1 + k \cdot k_i^U)$ admet une racine réelle unique différente de 0 et supérieure à -1. Un calcul simple permet de trouver $k = -0,33166$ ¹.

9.2.9 Elaboration de la recommandation

On a, d'après (r.9.2.6) :

$$g(a) = \left[\prod_{i=1}^6 (1 + k \cdot k_i^U g_i(a)) - 1 \right] \frac{1}{k}.$$

Les valeurs de k et des k_i^U sont données à la section précédente et les valeurs des $g_i(a)$ au tableau 9.2.2. On peut donc obtenir simplement le nombre $g(a)$ et, conformément aux principes du vrai-critère, préordonner totalement les sites sur cette base :

$$\begin{aligned} b P a &\Leftrightarrow g(b) > g(a), \\ b I a &\Leftrightarrow g(b) = g(a) \end{aligned}$$

et en déduire la recommandation².

Les résultats de l'étude U sont résumés au tableau 9.2.3³.

Le classement des sites obtenu est un ordre total (cf. 1.4.2 a)).

¹ Cette valeur est différente de celle, très approximative (-0,325), donnée par Keeney et Nair (1976). Les résultats étant sensibles à cette valeur, nous retiendrons la valeur -0,33166 dans tout ce qui suit.

² Rappelons que rien n'oblige à utiliser les données du tableau 9.2.2. On aurait pu aussi bien faire directement usage de (r.9.2.1) et (r.9.2.3) avec les données du tableau 9.2.1.

³ Les résultats figurant dans ce tableau sont ceux que nous avons obtenus en effectuant les calculs à partir des données publiées dans les articles cités. Ils diffèrent quelque peu de ceux donnés par Keeney et Nair (1976, tableau 6).

Tableau 9.2.3 : Classement des sites dans l'étude U

Rang	Site	$g(a)$
1	a_3	0,926
2	a_2	0,920
3	a_1	0,885
4	a_4	0,883
5	a_8	0,872
6	a_9	0,870
7	a_7	0,862
8	a_5	0,813
9	a_6	0,804

Une analyse de sensibilité a été conduite pour tester la robustesse de ce classement. Elle a concerné :

- une modification des valeurs des k_i^U , chaque k_i^U variant séparément, l'ordre des coefficients restant inchangé ;
- une modification des valeurs de $\bar{x}_g(a)$: augmentation des coûts différentiels moyens de 20 % et 50 % ;
- une modification du rapport moyenne/écart-type pour d_6 qui passe de 1/4 à 1/2 ;
- une modification des valeurs de $\bar{x}_2(a)$ (moyenne de la perte de saumons).

On constate une stabilité quasi-totale du classement face à ces modifications.

Notons néanmoins que les auteurs de l'étude U n'ont testé chacune de ces modifications que "toutes choses égales par ailleurs" en n'étudiant pas l'impact simultané de plusieurs modifications. Cette analyse de sensibilité reste donc distincte d'une véritable analyse de robustesse (cf. 5.4.4).

Rappelons que l'objectif du WPPSS en demandant cette étude, était de retenir parmi les 9 sites, ceux qui auraient la plus grande chance d'être acceptés par l'autorité administrative pour la construction d'une centrale. Le WPPSS était intéressé par deux types d'informations :

- les sites que l'on pouvait, à l'issue de cette phase d'étude, éliminer de toute considération ultérieure, faisant apparaître de bonnes raisons pour être rejetés ;
- parmi les sites restants qui feront tous l'objet d'études plus approfondies, ceux dont on pense qu'ils sont nettement supérieurs aux autres.

Il résulte du tableau 9.2.3 et de l'analyse de sensibilité qu'il est justifié de recommander :

- d'éliminer les sites a_5 et a_6 ;
- de retenir les sites a_3 et a_2 tout en conservant les sites a_1 et a_4 qui se situent juste derrière ;
- de laisser de côté les sites a_8 , a_9 et a_7 qui se situent en milieu de classement.

9.3 LE TRAVAIL EN LABORATOIRE : L'ÉTUDE S

9.3.1 Actions potentielles, problématique et axes de signification

Compte-tenu des conditions de notre travail en laboratoire, nous avons été conduits :

- à accepter l'ensemble des 9 sites retenus par les auteurs de l'étude U ;
- à adopter une problématique de rangement ($P.\gamma$) pour rester conforme à ce qui a été fait dans l'étude U ;
- à retenir les mêmes 6 axes de signification que dans l'étude U en supposant qu'ils nous sont imposés par nos interlocuteurs du WPPSS.

Les auteurs de l'étude U, on l'a vu au 9.2, ont retenu un modèle de préférences globales fondé sur un critère unique de

synthèse (PAMC de type I, cf. 4 et 5.1). Nous avons, dans l'étude S, retenu un modèle de préférences globales non fondé sur un critère unique de synthèse (PAMC de type II, cf. 5.1). Compte-tenu de la problématique retenue, la PAMC ELECTRE III nous a semblé la plus appropriée (cf. 6.1.5).

L'étude S nous a alors conduits, sur la base du travail effectué par les auteurs de l'étude U, à :

- associer, à chaque axe de signification, un ou plusieurs pseudo-critères ;
- déterminer les informations inter-critères nécessaires à l'utilisation de la PAMC ELECTRE III (indices d'importance et seuils de veto) ;
- élaborer une recommandation après analyse de robustesse.

Ce sera l'objet des trois paragraphes suivants.

9.3.2 Elaboration des critères

Pouvoir comparer deux actions quelconques, toutes choses égales par ailleurs, selon chacun des axes de signification considérés constitue un préalable pour la PAMC ELECTRE III¹. Les axes de signification doivent précisément être conçus de telle sorte que les comparaisons faites avec ce genre de restrictions constituent un point de départ convenable pour asseoir les rapports que l'homme d'étude a pour mission d'établir entre les intervenants (éventuellement décideurs) qu'il est censé aider et ce qui leur apparaît être la réalité. Le système de préférences de ces intervenants n'étant pas nécessairement complètement structuré, l'existence et la définition des critères g_i ne peuvent pas être de

¹ Notons que, en théorie, il n'en va pas de même pour la PAMC issue de la théorie de l'utilité espérée où une telle comparaison toutes choses égales par ailleurs implique d'accepter une hypothèse d'indépendance en utilité sur chaque dimension. La théorie prévoit des "tests" destinés à en vérifier le réalisme. De tels tests n'ont cependant de sens que par rapport à un système de préférences pré-existant et suffisamment bien structuré. En-dehors de ce cas, l'indépendance au sens des utilités apparaît alors comme une hypothèse de travail pour structurer des préférences.

simples conséquences de propriétés observables d'un système de préférences. Ces critères méritent en particulier d'être définis en fonction de la nature des informations disponibles ayant trait à chaque axe de signification et en tenant le plus grand compte des facteurs d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination qui affectent ces informations. Rien ne s'oppose bien évidemment à ce que tel ou tel critère prenne la forme d'une espérance mathématique d'utilité. Dans bien des cas, on pourra estimer que le concept de lois de probabilités ne permet pas de saisir ces facteurs dans toute leur étendue. De plus, le cadre du vrai-critère peut paraître trop étroit et insuffisamment nuancé pour décrire les conclusions de telles comparaisons. Dans l'étude S, on est conduit à substituer des pseudo-critères aux vrai-critères implicitement utilisés dans l'étude U.

On a rappelé au 1.6 la démarche que nous aurions suivie pour bâtir des critères si nous avions eu à réaliser l'étude dans la réalité. Cette démarche repose sur une analyse des conséquences associées à un axe de signification et sur notre capacité à les décrire, soit par un seul nombre (constituant ce que nous appelons une évaluation ponctuelle), soit par plusieurs nombres (constituant une évaluation non ponctuelle), chacun de ces nombres pouvant être affecté d'un indice de vraisemblance ayant par exemple la signification d'une probabilité. Cette analyse n'a pu être entreprise ici que très imparfaitement au travers de la description des conséquences établies pour l'étude U. C'est ce travail d'élaboration des critères dans l'étude S que nous allons présenter maintenant.

Axe n° 1 : Santé-sécurité

Les auteurs de l'étude U ont associé, à cet axe de signification, une dimension d_1 correspondant à un indice officiel de mesure de la "densité humaine" autour d'un site. A chaque site $a \in A$, ils ont fait correspondre une évaluation ponctuelle $\gamma_1(a)$.

Dans l'étude S, il est naturel de poser $g_1(a) = \gamma_1(a)$. Cependant, $\gamma_1(a)$ paraît entaché d'erreur et d'arbitraire. Ce nombre résulte en effet d'une opération de "ponctualisation" ayant pour objet de résumer en un seul nombre une distribution caractérisant

un nombre de personnes situées à des distances de plus en plus grandes du site. Or, cette distribution est appelée à évoluer. La forme de l'opérateur de ponctualisation n'est pas la seule concevable. La manière même de l'appliquer prête à variation. Il nous a, dans ces conditions, semblé légitime d'adopter des seuils de dispersion par excès et par défaut servant à délimiter la zone de mauvaise détermination autour de γ_1 . On les a posés tous deux égaux à $0,10 \cdot \gamma_1$. On en déduit alors simplement (cf. MMCAD, chapitre 9 et 1.6.3, cf. (r.1.6.6)) les seuils d'indifférence et de préférence caractérisant le pseudo-critère $g_1(a)$:

$$q_1(g_1(a)) = 0,1 \cdot g_1(a), p_1(g_1(a)) = 0,222 \cdot g_1(a).$$

Axe n° 2 : Perte de saumons

On a vu que les auteurs de l'étude U ont associé une dimension composite à cet axe de signification ($d_2 = (d_2', d_2'')$ avec d_2' : nombre total de saumons vivant dans la rivière et d_2'' : pourcentage de saumons détruits après installation de la centrale). Ils ont ensuite effectué une étude complexe pour déterminer une fonction d'utilité $u_2(e_2', e_2'')$ dont la forme dépend de la taille de la rivière en cause.

Si nous avions eu à réaliser l'étude S autrement qu'en laboratoire, il est probable que nous ne nous serions pas livrés à une analyse aussi complexe pour définir le critère g_2 . On est d'autant plus fondé à s'interroger sur la portée du travail des auteurs de l'étude U que :

- d'une part les lois de probabilité sur cette dimension composite n'ont pas été définies avec un soin comparable ¹ à celui mis pour asseoir la fonction d'utilité u_2 ;
- d'autre part les valeurs de $g_2(a)$ données au tableau 9.2.2, qui ordonnent les 9 sites exactement comme l'aurait fait l'espérance du nombre de saumons perdus, paraissent assez mal refléter

¹ Rappelons les critiques faites au 9.2.4 sur le choix d'une distribution de probabilités gaussienne sur le pourcentage de saumons détruits.

les principes qualitatifs posés au départ de l'analyse (cf. tableaux 9.2.1 et 9.2.2).

Nous aurions, pour notre part, cherché à mieux comprendre pourquoi, étant donné deux rivières comptant exactement y et y' saumons, il pouvait être plus préjudiciable d'en détruire un nombre q dans la première, supposée ici la moins poissonneuse, plutôt qu'un nombre légèrement plus élevé q' dans la seconde. Prenant ensuite appui sur des considérations d'ordre qualitatif, nous aurions cherché à relier q' à q , y et y' de telle sorte que les préjudices causés dans les deux rivières soient du même ordre. On aurait par exemple pu examiner si une formule simple du type $q' = q \cdot (y'/y)^\alpha$ était susceptible de rendre compte (moyennant une valeur convenablement choisie de α entre 0 et 1) d'avis d'experts portant sur des cas de préjudices équivalents. Ceci aurait conduit à poser $g_2(a) = q(a)/y(a)^\alpha = q(a) \cdot y(a)^{-\alpha}$ pour un site a affectant une rivière contenant $y(a)$ saumons dont exactement $q(a)$ serait perdu après l'installation de la centrale. En notant $x(a) = q(a)/y(a)$ le pourcentage de saumons détruits, on aurait alors :

$$g_2(a) = x(a) \cdot y(a)^{(1-\alpha)}.$$

Ne disposant que du seul travail effectué par les auteurs de l'étude U, il nous a paru possible de définir le critère g_2 sur la base de la formule ci-dessus tout en adoptant deux versions de ce critère correspondant respectivement à :

$$\alpha = 1/2 : g_2'(a) = \bar{x}_2(a) \sqrt{\gamma_2(a)},$$

$$\alpha = 0 : g_2''(a) = \bar{x}_2(a) \gamma_2(a)$$

où $\bar{x}_2(a)$ et $\gamma_2(a)$ sont donnés au tableau 9.2.1 et représentent respectivement :

- le pourcentage moyen de saumons perdus dans la rivière ;
- le nombre total de saumons vivant dans la rivière tel qu'estimé par les experts interrogés par les auteurs de l'étude U.

Le raisonnement qui précède a été conduit en faisant abstraction des difficultés qu'il y a, pour chaque rivière, à cerner la valeur $\gamma_2(a)$. De plus, le taux $\bar{x}_2(a)$ n'est qu'un taux moyen. La valeur élevée adoptée pour l'écart-type de la distribution de probabilités sur le pourcentage de saumons détruits et la nécessité de regarder $\gamma_2(a)$ comme non connue avec une précision absolue ont amené à adopter des seuils de dispersion par excès et par défaut élevés. On les a posés tous deux égaux à la moitié de la valeur concernée (quelle que soit la forme du critère). On en déduit alors, de même que précédemment (cf. (r.1.6.6)) :

$$\begin{aligned} q_2(g_2'(a)) &= 0,5 \cdot g_2'(a) ; p_2(g_2'(a)) = 2 \cdot g_2'(a) ; \\ q_2(g_2''(a)) &= 0,5 \cdot g_2''(a) ; p_2(g_2''(a)) = 2 \cdot g_2''(a). \end{aligned}$$

Axes n° 3 et 4 : Impact biologique et impact socio-économique

Pour définir les dimensions d_3 et d_4 , les auteurs de l'étude U ont introduit deux échelles qualitatives possédant respectivement 9 et 8 échelons.

La nature de l'impact biologique ou socio-économique que chacun des intervalles entre échelons est destiné à recouvrir a été cernée à l'aide de descriptions relativement concrètes et précises des situations futures qui étaient, par définition, concernées. Pour chacun de ces deux axes et pour chaque site a , plusieurs experts ont été invités à se prononcer sur la base de tels descriptifs sur la situation future qu'ils jugeaient la plus vraisemblable dans l'hypothèse où la centrale serait installée sur le site. La proportion des voies ainsi recueillies par chaque intervalle a servi à définir des distributions de probabilités dans l'étude U.

Il est ici vraisemblable d'admettre que, devant mettre au point l'étude S dans la réalité, nous aurions procédé de façon analogue pour évaluer l'impact biologique et l'impact socio-économique des sites à étudier. L'évaluation obtenue (distribution d'avis d'experts faisant en général intervenir plus d'un intervalle de l'échelle concernée) est dite non ponctuelle. Pour définir $g_3(a)$ comme $g_4(a)$, il faut choisir un seul des intervalles envisagés par les experts. Nous avons retenu l'intervalle médian, c'est-à-dire

celui qui partage le plus également la population des experts entre ceux qui sont au moins aussi optimistes et ceux qui sont au moins aussi pessimistes que cette valeur. Compte-tenu de la nature des échelles en cause et de la répartition observée des avis d'experts, il nous a paru raisonnable de retenir des seuils de discrimination constants valant respectivement :

$$\begin{aligned} q_3 &= 1, p_3 = 2, \\ q_4 &= 0, p_4 = 1. \end{aligned}$$

Axe n° 5 : Esthétique

Rappelons que les auteurs de l'étude U ont associé, à cet axe de signification, une dimension d_5 : "longueur en Miles des lignes à haute tension portant atteinte à l'environnement". A chaque site a, ils ont fait correspondre une évaluation ponctuelle $\gamma_5(a)$.

Tout conduit à penser que, ayant à élaborer l'étude S dans la réalité, un critère associé à cet axe de signification aurait été défini en posant $g_5(a) = \gamma_5(a)$. Toutefois, ce nombre ne paraît pas connu avec une précision telle que l'on puisse affirmer que si deux sites a et b sont respectivement caractérisés par :

$$\gamma_5(a) = 10, \gamma_5(b) = 9,$$

le site b puisse de ce fait être regardé (toutes choses égales par ailleurs) comme significativement meilleur que le site a. L'écart de 1 Mile peut en effet ne pas sembler probant compte-tenu de l'incertitude des tracés de lignes, de la part d'arbitraire que recèle le choix des portions de lignes à prendre en considération, etc. Ne disposant pas de l'information nécessaire pour appréhender la portée de ces facteurs, nous avons admis que les nombres $\gamma_5(a)$ étaient entachés, par excès ou par défaut, d'une erreur au moins égale à 1 Mile pour les faibles longueurs, erreur qui pouvait croître proportionnellement avec cette longueur. Il nous a semblé raisonnable de choisir un taux de croissance très faible, 3 % (un taux de 10 % n'aurait pas changé les résultats). Ceci revient à dire que $g_5(a) = \gamma_5(a)$ est mal déterminé dans un intervalle de la forme :

$$[g_5(a) - \eta_5(g_5(a)) ; g_5(a) + \eta_5(g_5(a))]$$

avec $\eta_5(g_5(a)) = 1 + 0,03 \cdot g_5(a)$.

On déduit alors de ces seuils de dispersion les seuils de discrimination en utilisant (r.1.6.6). On a :

$$\begin{aligned} q_5(g_5(a)) &= 1 + 0,03 \cdot g_5(a), \\ p_5(g_5(a)) &= 2,0618 + 0,0618 \cdot g_5(a). \end{aligned}$$

Axe n° 6 : Coût

Les auteurs de l'étude U ont considéré que les coûts occasionnés par la construction et l'exploitation d'une centrale sur un site quelconque a pouvaient être analysés par référence à ceux relatifs au site le plus économique a_2 . La dimension d_6 reflète par conséquent un coût différentiel. L'évaluation de chaque site a alors été regardée comme une distribution de probabilités gaussienne de moyenne $\bar{x}_6(a)$ et d'écart-type $\bar{x}_6(a)/4$. La valeur $\bar{x}_6(a)$ a fait l'objet d'évaluations d'experts.

Ici encore, il est probable que nous aurions procédé autrement dans le cadre d'une étude réelle. Dans la mesure où ce ne sont probablement pas les mêmes acteurs qui supportent les coûts d'investissement et les coûts d'exploitation, nous aurions peut-être introduit un critère pour chacun d'eux. N'ayant pas la possibilité d'analyser ces coûts dans le détail, nous nous contenterons, dans le présent travail, de poser :

$$g_6(a) = \bar{x}_6(a).$$

Faute de bases plus objectives, nous croyons pouvoir raisonner comme suit pour asseoir les seuils de discrimination. En premier lieu, les valeurs de $x_6(a)$ qui ont été avancées supposent que les travaux et les éléments de fonctionnement qui n'entrent pas dans le coût différentiel conduiront bien aux mêmes dépenses sur le site a_2 et sur un site quelconque a. Il y a évidemment là une source d'erreurs qui suffit à faire douter du fait qu'un site b est

plus économique qu'un site a lorsque $\bar{x}_6(a) - \bar{x}_6(b)$ est faible eu égard au montant de ces dépenses supposé identique sur les deux sites. Nous avons admis que, du fait de cette seule hypothèse, le coût différentiel réel devait être regardé comme mal déterminé sur un intervalle caractérisé à partir de $\bar{x}_6(a)$ de façon dissymétrique comme suit :

$$[\bar{x}_6(a) - 1 ; \bar{x}_6(a) + 2].$$

En second lieu, le calcul de $\bar{x}_6(a)$ découle de l'évaluation de multiples facteurs qui, tous, concernent des suppléments de dépenses propres au site a. Or, tant que la construction n'est pas décidée, l'étude faite relativement à chaque site reste sommaire. C'est dire que ces coûts ne sont pas forcément bien tous recensés, qu'ils sont vraisemblablement chiffrés de façon assez imprécise et peut-être optimiste. La marge d'erreur qui en découle apparaît dissymétrique et d'autant plus élevée que $\bar{x}_6(a)$ est plus grand. Les facteurs intervenant à ce niveau nous semblent être sans lien avec ceux pris en compte précédemment. Nous admettrons donc qu'il y a additivité des effets et regarderons le coût différentiel comme finalement mal déterminé dans l'intervalle :

$$[\bar{x}_6(a) - 1 - 0,1 \cdot \bar{x}_6(a) ; \bar{x}_6(a) + 2 + 0,5 \bar{x}_6(a)].$$

Sur la base de ces seuils de dispersion, on déduit les seuils de discrimination selon le même principe que précédemment (cf. (r.1.6.6)) :

$$\begin{aligned} q_6(g_6(a)) &= 1,1 + 0,11 \cdot g_6(a), \\ p_6(g_6(a)) &= 3,33 + 0,67 \cdot g_6(a). \end{aligned}$$

On supposera cohérente la famille des 6 critères ainsi construits. L'évaluation des 9 sites sur ces 6 critères est donnée au tableau 9.3.1. Les seuils de dispersion et de discrimination sont donnés au tableau 9.3.2.

Tableau 9.3.1 : Tableau des performances dans l'étude S

	$g_1(a)$	$g_1'(a)$	$g_2''(a)$	$g_3(a)$	$g_4(a)$	$g_5(a)$	$g_6(a)$
a_1	0,057	21,91	6 000	2	3	1	2,035
a_2	0,040	21,91	6 000	2	3	1	0,000
a_3	0,025	21,91	6 000	2	3	7	1,535
a_4	0,048	11,12	825	4	4	6	1,933
a_5	0,044	19,56	2 250	5	3	12	12,347
a_6	0,023	10,61	750	5	4	1	17,713
a_7	0,052	8,22	450	3	4	0	4,834
a_8	0,011	6,56	4 300	2	4	0	10,936
a_9	0,018	6,04	3 650	1	3	0	11,423

Remarques :

- La préférence décroît avec les valeurs pour tous les critères.
- Pour déterminer g_3 et g_4 , on a codé l'intervalle médian de δ_3^s et δ_4^s de la manière suivante :

0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8
1	2	3	4	5	6	7	8

9.3.3 Elaboration des informations inter-critères

Afin d'obtenir un modèle de préférences globales avec la méthode ELECTRE III, il faut élaborer deux types d'informations inter-critères (cf. 5.3.2 b) et 5.4) :

- les indices d'importance k_i^s intervenant dans les calculs de concordance ;
- les seuils de veto $v_i(g_i(a))$ intervenant dans les calculs de discordance.

Tableau 9.3.2 : Seuils de dispersion et seuils de discrimination dans l'étude S

	g_1	g_2' et g_2''	g_3	g_4	g_5	g_6
Seuils de dispersion par excès	$0,1 \cdot g_1(a)$	$0,5 \cdot g_2(a)$	-	-	$1 + 0,03 \cdot g_5(a)$	$2 + 0,5 \cdot g_6(a)$
Seuils de dispersion par défaut	$0,1 \cdot g_1(a)$	$0,5 \cdot g_2(a)$	-	-	$1 + 0,03 \cdot g_5(a)$	$1 + 0,1 \cdot g_6(a)$
Seuils d'indifférence	$0,1 \cdot g_1(a)$	$0,5 \cdot g_2(a)$	1	0	$1 + 0,03 \cdot g_5(a)$	$1,11 + 0,11 \cdot g_6(a)$
Seuils de préférence	$0,222 \cdot g_1(a)$	$2 \cdot g_2(a)$	2	1	$2,062 + 0,062 \cdot g_5(a)$	$3,33 + 0,67 \cdot g_6(a)$

Remarque : Tous les seuils d'indifférence et de préférence sont des seuils inverses (cf. MMCAD, 9.3.2).

a) Indices d'importance

Dans la PAMC ELECTRE III, les indices d'importance jouent principalement au travers du classement qu'ils induisent sur les différents critères ou groupes de critères. Si nous avions eu à effectuer l'étude dans la réalité, il est probable que c'est ce classement que nous aurions tenté d'élaborer de façon interactive avec les décideurs du WPPSS. Nous aurions ensuite cherché un ensemble de jeux d'indice d'importance compatible avec ces considérations purement ordinales (cf. 5.4.2).

N'ayant pas accès aux acteurs concernés, il nous a fallu essayer de "traduire" l'information véhiculée par la fonction d'utilité au niveau de l'importance relative des critères en termes d'indices d'importance afin de tenter de reproduire un système de valeurs comparable et ainsi garder un sens à la comparaison des résultats des deux études.

Au contraire des indices d'importance utilisés dans ELECTRE III, rappelons que les coefficients k_i^U n'ont pas, dans la PAMC issue de la théorie de l'utilité espérée, d'interprétation immédiate en termes d'importance relative des critères (cf. 3.1.5, 3.2.3 ou Keeney et Raiffa (1976), Zeleny (1982)). L'étendue de l'échelle et la forme de la fonction d'utilité partielle influent sur la valeur des coefficients k_i^U . Cette importance nous a semblé mieux reflétée par la plage de variation des différents rapports :

$$R_{ij} = \frac{\frac{\partial g}{\partial g_i}}{\frac{\partial g}{\partial g_j}} \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

où g est donné par (r.9.2.6) et les g_i par (r.9.2.7). On peut interpréter R_{ij} en termes qualitatifs comme le gain nécessaire, en termes d'espérance d'utilité sur la dimension j , pour compenser une perte d'espérance d'utilité sur la dimension i .

La fonction g étant multiplicative, R_{ij} n'est pas constant. On peut toutefois trouver aisément la plage de variation possible de

R_{ij} puisque $u_i(e_i)$ et $u_j(e_j)$ sont compris entre 0 et 1.

En utilisant les valeurs de k et des k_i^U indiquées au 9.2.8 et sachant que $\text{Max}(R_{ij}) = 1/\text{Min}(R_{ji})$ et $\text{Min}(R_{ij}) = 1/\text{Max}(R_{ji})$, on donne, au tableau 9.3.3, les plages de variation des R_{ij} .

Tableau 9.3.3 : Plage de variation des R_{ij}

	1	2	3	4	5	6
1		1,523 1,863	27,420 31,249	3,324 3,906	5,949 6,885	0,7763 1,0156
2			16,697 18,076	2,024 2,260	3,623 3,983	0,4727 0,5875
3				0,121 0,126	0,216 0,221	0,0282 0,0326
4					1,728 1,826	0,2255 0,2263
5						0,1276 0,1504
6						

Soit k_i^S et k_j^S les indices d'importance respectifs des critères i et j . Nous avons considéré que :

$$R_{*ij} \leq k_i^S / k_j^S \leq R_{*ij}^*$$

où R_{*ij} et R_{*ij}^* sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de R_{ij} . A chaque case au-dessus de la diagonale du tableau donnant les valeurs de R_{ij} correspondent 2 contraintes sur les indices d'importance, soit au total $2 \times 15 = 30$ contraintes. On peut poser de façon non restrictive $k_6^S = 1$ et en déduire des intervalles pour chacune des cinq autres valeurs. On a, par exemple, $R_{*56}^* = 0,1504$ et $R_{*56} = 0,1276$, d'où $k_5^S \in [0,1276 ; 0,1504]$.

Il est apparu empiriquement non restrictif de ne considérer que les contraintes exprimées par rapport au critère 6, soit au total 10 contraintes :

$$k_1^s \in [0,7763 ; 1,0156]$$

$$k_2^s \in [0,4727 ; 0,5875]$$

$$k_3^s \in [0,0282 ; 0,0326]$$

$$k_4^s \in [0,2255 ; 0,2693]$$

$$k_5^s \in [0,1276 ; 0,1504].$$

Compte-tenu de l'arbitraire de la méthode et de l'imprécision des valeurs numériques, nous avons choisi de retenir, à l'intérieur de ce domaine, 8 jeux d'indices d'importance. Ces jeux sont choisis pour être les plus contrastés possible. Ils seront étudiés au cours de l'analyse de robustesse. Le coefficient k_6^s étant fixé à 1, nous avons choisi de poser $k_3^s = 0,03$, ce critère étant d'importance très faible. Les 8 jeux d'indices correspondent alors à toutes les combinaisons extrêmes bornes à bornes, respectant toutefois certaines considérations qualitatives issues de l'étude U (le critère 6 est le plus important). On a alors ¹ les 8 jeux : $J_1, \dots, J_8$ donnés au tableau 9.3.4.

b) Seuils de veto

Traduisant une position qualitative et volontariste, il serait illusoire de chercher à estimer les seuils de veto $v_j(g_j(a))$ de manière sophistiquée au travers d'études ou d'interviews. Si nous avons eu à faire l'étude dans la réalité, nous n'aurions pas procédé de manière tellement différente de ce que nous a permis de faire ici notre méthode de travail. Une fois le décideur d'accord avec les principes qualitatifs sous-tendant le caractère uniquement local de la compensation dans la PAMC ELECTRE III (cf. 5.5), on affecte une valeur numérique aux différents seuils de veto de façon pragmatique en tenant compte de l'importance relative des critères, de la répartition des évaluations des sites sur les critères, de l'amplitude des divers seuils de préférence et de ce que l'on peut savoir du systèmes de valeurs

¹ en étendant l'intervalle de variation sur k_4^s .

du décideur. La prise en compte de ces facteurs laisse subsister une part d'arbitraire dans le choix des valeurs numériques pour les seuils de veto. C'est pourquoi on procède généralement à une analyse de robustesse assez poussée sur ces coefficients (cf. 5.4.3 et 5.4.4).

Tableau 9.3.4 : Jeux d'indices d'importance dans l'étude S

	k_1^s	k_2^s	k_3^s	k_4^s	k_5^s	k_6^s
J_1	0,8	0,45	0,03	0,15	0,15	1
J_2	0,8	0,60	0,03	0,15	0,15	1
J_3	0,9	0,45	0,03	0,15	0,15	1
J_4	0,9	0,60	0,03	0,15	0,15	1
J_5	0,8	0,45	0,03	0,25	0,10	1
J_6	0,8	0,60	0,03	0,25	0,10	1
J_7	0,9	0,45	0,03	0,25	0,10	1
J_8	0,9	0,60	0,03	0,25	0,10	1

La PAMC de la théorie de l'utilité espérée ne faisant pas usage de l'idée de veto, il n'a pas été possible de déduire des informations disponibles des considérations qualitatives permettant de guider le choix des seuils de veto. C'est donc principalement notre propre perception du problème qui est reflétée dans ce choix, l'analyse de robustesse venant tempérer cette position. Il a semblé raisonnable (cf. 5.4.3) d'admettre que le seuil de veto sur un critère devait d'autant plus jouer que ce critère était important (l'importance d'un critère étant appréciée globalement en tenant compte des 8 jeux d'indices d'importance). En particulier, pour les trois critères les moins importants (g_3 , g_4 et g_5), ces seuils ont été choisis de manière à ne pas jouer. Sur les autres critères, il est apparu commode de raisonner les seuils de veto par référence aux seuils de préférence en posant $v_j(g_j(a)) = \alpha_j p_j(g_j(a))$. Compte-tenu de l'importance des divers critères et de la valeur des seuils de préférence, nous avons retenu, en

première analyse, les valeurs indiquées au tableau 9.3.5. Ces valeurs sont systématiquement modifiées au cours de l'analyse de robustesse.

Tableau 9.3.5 : Valeur des seuils de veto dans l'étude S

	g_1	g_2' et g_2''	g_3	g_4	g_5	g_6
$v_i(g_i)$	$6p_1$	$2,5p_2$	$4p_3$	$4p_4$	$20p_5$	$1,7p_6$

Remarque : Les seuils de veto des critères g_3 , g_4 et g_5 ont été choisis de manière à ne pas jouer.

9.3.4 Elaboration de la recommandation

Conformément à ce qui a été dit au 5.3.2.2, la méthode ELECTRE III utilise l'information contenue dans le tableau des performances et les informations inter-critères pour bâtir une relation de surclassement floue (cf. (r.5.3.10), (r.5.3.11) et (r.5.3.12)) appréciant, sur une échelle de crédibilité, la proposition "le site b est au moins aussi bon que le site a". L'exploitation de cette relation s'opère au travers d'un procédé de distillation" se fondant sur les notions de "puissance" et de "faiblesse" d'une action (cf. 6.4.3). On met ainsi en évidence deux préordres totaux qui se comportent de façon opposée vis-à-vis des actions se comparant mal à un groupe d'autres actions (c'est-à-dire telle que la crédibilité du fait qu'elles sont au moins aussi bonnes que les actions de ce groupe et que ces dernières soient au moins aussi bonnes qu'elle est quasi-nulle) : l'un a tendance à les classer avant ce groupe et l'autre après.

L'intersection de ces deux préordres donne naissance à un préordre partiel mettant en évidence les actions dont la position dans le classement est mal déterminée.

Certaines des données intervenant dans l'étude S – seuils de veto, indices d'importance, seuils de discrimination – étant entachées d'une imprécision et d'un arbitraire importants dus, en partie, à notre méthode de travail mais aussi à la nature même de ces concepts, les résultats ne peuvent acquérir de probance

$$[g_2(a) - 0,6 \cdot g_2(a) ; g_2(a) + 0,6 \cdot g_2(a)]$$

$$\Rightarrow q_2(g_2(a)) = 0,6 \cdot g_2(a)$$

$$p_2(g_2(a)) = 3 \cdot g_2(a) \text{ et}$$

$$[g_2(a) - 0,4 \cdot g_2(a) ; g_2(a) + 0,4 \cdot g_2(a)]$$

$$\Rightarrow q_2(g_2(a)) = 0,4 \cdot g_2(a)$$

$$p_2(g_2(a)) = 1,33 \cdot g_2(a)$$

– Critère 6 : Quatre seuils de discrimination ont été retenus en fonction du seuil de dispersion autour de g_6 :

$$[\bar{x}_6(a) - 2 - 0,1 \bar{x}_6(a) ; \bar{x}_6(a) + 3 + 0,5 \bar{x}_6(a)] \quad (a)$$

$$[\bar{x}_6(a) - 0,1 \bar{x}_6(a) ; \bar{x}_6(a) + 1 + 0,5 \bar{x}_6(a)] \quad (b)$$

$$[\bar{x}_6(a) - 1 - 0,1 \bar{x}_6(a) ; \bar{x}_6(a) + 2 + 0,6 \bar{x}_6(a)] \quad (c)$$

$$[\bar{x}_6(a) - 1 - 0,1 \bar{x}_6(a) ; \bar{x}_6(a) + 2 + 0,4 \bar{x}_6(a)] \quad (d)$$

d'où les seuils de discrimination du tableau 9.3.6.

Tableau 9.3.6 : Analyse de robustesse -
Seuils de discrimination du critère 6

	$q_6(g_6(a))$	$p_6(g_6(a))$
(a)	$2,22 + 0,111 \cdot g_6(a)$	$5,555 + 0,666 \cdot g_6(a)$
(b)	$0,111 \cdot g_6(a)$	$1,111 + 0,666 \cdot g_6(a)$
(c)	$1,111 + 0,111 \cdot g_6(a)$	$3,333 + 0,777 \cdot g_6(a)$
(d)	$1,111 + 0,111 \cdot g_6(a)$	$3,33 + 0,555 \cdot g_6(a)$

iv) Deux formes possibles du critère 2 : g_2' et g_2'' .

Parmi toutes les combinaisons de possibilités mentionnées, nous en avons éliminé a priori certaines trop irréalistes. L'analyse de robustesse ayant été menée pas à pas, nous avons pu restreindre le nombre de combinaisons à prendre en compte, certains éléments n'ayant manifestement aucune influence (par exemple veto du critère 3). Finalement, 17 jeux de paramètres concernant les seuils de discrimination et de veto ainsi que la

forme du critère g_2 ont été retenus soit, combinés avec les 8 jeux de poids, $17 \times 8 = 136$ préordres partiels¹.

Nous nous contentons ici de mentionner que, parmi toutes les sources de variations possibles, la forme du critère 2 retenue (g_2' ou g_2'') a la plus grande influence. Cette modification peut s'interpréter comme une modification indirecte du seuil de veto sur ce critère. Mis à part la forme du critère 2, la stabilité des résultats est bonne. Notons que cette stabilité est obtenue avec des variations de diverses grandeurs que l'on ne peut tenir pour marginales. Elle permet donc de donner une certaine probance aux résultats.

On peut, de façon très qualitative, résumer les 136 préordres partiels par deux préordres, l'un correspondant à la forme g_2' , l'autre à la forme g_2'' du critère 2, l'influence des autres paramètres étant plus faible. On a les "préordres types" indiqués à la figure 9.3.1.

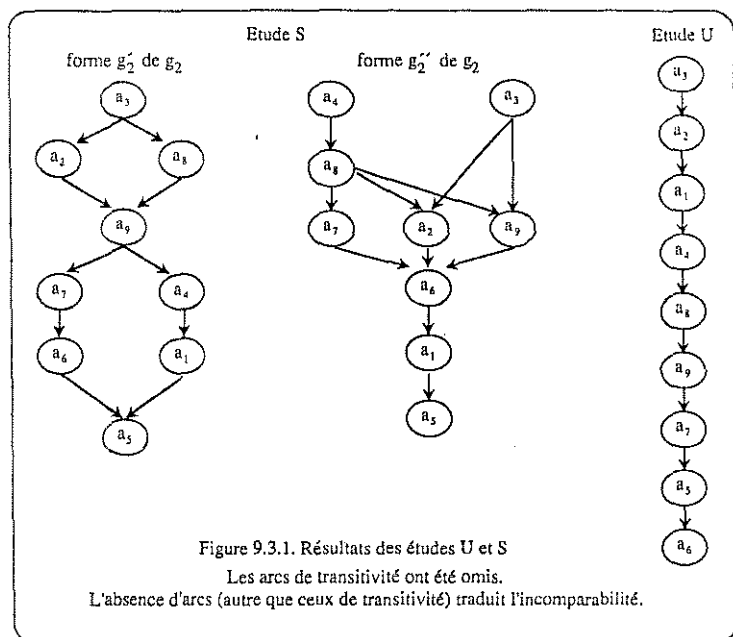
L'analyse de ces résultats révèle une remarquable stabilité de la queue de classement, les sites a_5 , a_6 et a_1 apparaissant toujours moins bons que les autres. Le site a_3 se situe en tête dans l'étude S quelle que soit la forme du critère 2 retenue. Les sites a_2 , a_8 et a_4 viennent juste derrière tandis que a_7 et a_9 se situent en milieu de classement dans une zone d'instabilité.

Sur ces bases, nous aurions recommandé :

- d'éliminer les sites a_5 , a_6 et a_1 ;
- de sélectionner le site a_3 ainsi que les sites a_2 , a_8 et a_4 ;
- de laisser de côté les sites a_7 et a_9 .

Soulignons dès à présent une divergence importante entre les études U et S concernant l'intérêt du site a_1 et, dans une moindre mesure, du site a_8 .

¹ Ils sont présentés et analysés en détail dans Roy et Bouyssou (1983).



9.4 COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES À LA LUMIÈRE DU CAS

Les modèles et méthodes d'aide à la décision fondés sur la théorie de l'utilité espérée sont souvent justifiés en faisant observer :

- que la théorie repose sur une base axiomatique solide et convaincante ;
- que les procédures utilisées dans ces méthodes pour asseoir les divers paramètres entrant dans le modèle du critère unique de synthèse (fonctions d'utilité partielles u_i , coefficients k_i^U) découlent logiquement du système d'axiomes.

Recourir à une telle justification implique d'une part d'admettre le caractère absolument convaincant des axiomes de la théorie

de l'utilité espérée (on a vu au 4.5 que ce point avait récemment soulevé bien des controverses ; nous n'y reviendrons pas ici). D'autre part, une telle justification est inséparable de l'hypothèse selon laquelle existe, de façon plus ou moins consciente ou latente, dans l'esprit d'un intervenant clairement identifié pour lequel s'exerce l'aide à la décision ¹, un ensemble d'"attitudes" ² capables de déterminer des préférences qui :

- ne soient pas en contradiction avec les axiomes, c'est-à-dire pouvant être interprétées dans le cadre des axiomes ;
- soient suffisamment stables pour pouvoir être appréhendées de façon opérationnelle sans les perturber ;
- soient suffisamment riches pour, en liaison avec le corps d'axiomes, définir un critère unique de synthèse ³.

Une telle justification n'a de sens que dans ce que nous avons appelé une "démarche descriptive" d'aide à la décision (cf. 1.7). Elle relève d'un schéma de type : "si, dans la réalité, les préférences ont telle ou telle propriété, alors le modèle de préférences globales doit avoir telle ou telle forme".

Cette possibilité de justification du modèle dans une démarche descriptive semble avoir conditionné certains aspects du travail des auteurs de l'étude U. Mentionnons par exemple :

- Le fait qu'ils aient tenu à tester, à l'aide de procédures de questionnement sophistiquées, les "hypothèses" d'indépendance auxquelles ils font appel. Ces procédures sophistiquées ne peuvent avoir de sens que par rapport à une réalité qu'il convient de

¹ C'est cet intervenant privilégié qui est habituellement appelé le décideur (cf. 1.1).

² Sur cette notion, nous renvoyons à Bouyssou (1984).

³ C'est là une hypothèse forte. Elle implique en effet que les attitudes sont suffisamment riches et structurées pour permettre de déterminer, **dans tous les cas**, si deux actions sont indifférentes ou si l'une est préférée à l'autre quelles que soient les conséquences de ces deux actions.

cerner le plus finement possible ¹. A titre d'exemple, on a vu que l'isolabilité des différents axes de signification constitue un prérequis indispensable dans le modèle utilisé dans l'étude S. Avec celui-ci, on admet qu'il est en général illusoire de chercher à bâtir une préférence globale s'il est impossible de parler de préférences partielles en raisonnant toutes choses égales par ailleurs sur un axe de signification. On cherche alors à faire en sorte que la phase de construction de critère vienne conforter ce "prérequis". Les auteurs de l'étude U ont procédé différemment en cherchant à tester explicitement l'isolabilité des diverses dimensions. Notons que de tels "tests" conduisent, en général, à accepter l'isolabilité sans laquelle il semble difficile de chercher à bâtir une préférence globale.

— Le fait de ne modéliser les éléments imprécis, incertains et/ou mal déterminés dans l'évaluation des conséquences des actions potentielles qu'au travers de distributions de probabilités ². Cette option de modélisation des auteurs de l'étude U ne va pas sans soulever quelques problèmes. Avec la méthodologie sous-tendant l'étude S (que nous avons rappelée aux 1.5 et 1.6), on ne fait pas, a priori, d'hypothèses restrictives sur la nature des éléments imprécis, incertains et/ou mal déterminés. On cherche alors à les prendre en compte à l'aide d'une démarche heuristique laissant une large place au "bon sens" en remplaçant le modèle du vrai-critère par celui du pseudo-critère. On peut vouloir modéliser, de façon probabiliste, le coût de construction et d'exploitation d'une centrale nucléaire à bâtir dans 10 ans, en procédant à une modélisation très fine de chacun des éléments pertinents (taux d'inflation, coût des matériaux de construction, coût de la matière fissile). Cependant, ce qui semble importer dans le cas du WPPSS, ce n'est pas de connaître, avec une précision peut-être illusoire, une distribution de probabilités sur la conséquence coût, mais de pouvoir dire si l'on peut raisonnablement estimer qu'un

¹ A ce sujet, on pourra comparer les procédures utilisées au 9.2 avec celles présentées et illustrées par von Winterfeld et Edwards (1986).

² On peut légitimer, de façon descriptive, cette volonté de n'utiliser que des distributions de probabilités en invoquant l'axiomatique de Savage (1954) qui englobe celle de la théorie de l'utilité espérée.

site entraînera ou non des coûts plus élevés qu'un autre. Dans cette situation, un raisonnement en termes de seuils de discrimination semble présenter des avantages comme dans tous les cas où il s'agit de modéliser davantage une imprécision et un flou conceptuel qu'un véritable phénomène aléatoire ¹.

— Le fait qu'il n'y ait pas eu de véritable analyse de robustesse au sens du 5.4.4 mais seulement une analyse de sensibilité conduite de façon "marginale", c'est-à-dire en ne faisant varier qu'un paramètre à la fois dans un intervalle de faible ampleur. Une telle façon de faire se justifie dans une démarche descriptive si l'on considère que le modèle de préférences obtenu n'est pas trop éloigné du système de préférences qu'il s'agit de décrire. On a vu, au 5.4.4, toute l'importance d'une véritable analyse de robustesse dès lors que l'on s'écarte d'une telle démarche. C'est elle qui permet alors de conférer une certaine probance aux résultats obtenus.

L'examen du travail des auteurs de l'étude U et, plus généralement, notre expérience dans des études réelles, nous laissent croire qu'il est souvent illusoire de ne vouloir justifier un modèle d'aide à la décision que dans une démarche descriptive. En effet, dans les études réelles :

— Le décideur dont on voudrait décrire les préférences est parfois une entité mythique ou difficilement accessible. On a vu que tel était le cas pour l'étude U où l'équipe d'étude elle-même a souvent été amenée soit à jouer le rôle du décideur (par exemple pour valoriser les k_j), soit à interroger des intervenants divers (par exemple pour déterminer les fonctions d'utilité partielles) sans que rien ne garantisse que l'ensemble d'attitudes déterminant leurs préférences soit identique.

— La façon dont un décideur et des intervenants divers perçoivent une situation impliquant une comparaison de deux actions est rarement exempte de larges zones de flou, d'hésitation ou de conflit. A ce propos, notons que les auteurs de l'étude U

¹ A ce sujet, voir Bouyssou et Roy (1987), Roy (1988) et Bouyssou (1989).

ont été amenés à formuler de nombreuses questions faisant intervenir des sites fictifs irréalistes. Il nous semble difficile d'admettre que, face à de tels sites, les préférences d'un intervenant soient toujours parfaitement structurées.

— La façon de formuler un problème, la mise en situation, la formulation même des questions conditionnent grandement la réalité que l'on souhaiterait observer (cf. 7.1).

A notre sens, la légitimité d'un modèle d'aide à la décision doit se fonder sur sa capacité à proposer des hypothèses et méthodes de travail acceptables et raisonnables pour favoriser la communication entre intervenants dans le processus et, finalement, élaborer et argumenter des convictions et des recommandations. Au-delà de la théorie qui peut le sous-tendre, le modèle se doit d'être une base de dialogue avec le réel et d'intervention sur celui-ci. Adopter une telle "démarche constructive" (cf. 1.7), ce n'est pas nier l'intérêt des modèles d'aide à la décision fondés sur la théorie de l'utilité espérée¹. De par la richesse des concepts qu'ils proposent et des techniques qu'ils utilisent, ceux-ci gardent tout leur intérêt dans une telle démarche. Ils y perdent néanmoins leur caractère d'exclusivité souvent mis en avant dans une démarche descriptive. En effet, les utiliser dans une démarche constructive consiste à les concevoir sans pouvoir prendre appui sur un système de préférences pré-existant, complet, transitif et stable qu'ils sont censés décrire ; autrement dit, ce qui devait servir de fondement à leur légitimité est devenu ce qu'ils produisent. Les comparer avec des modèles tel celui que nous avons utilisé lors de l'étude S, conçus dès le départ dans une démarche constructive, prend alors tout son sens.

Comparer des modèles d'aide à la décision dans une démarche constructive soulève des questions difficiles². Comment en effet juger de la capacité d'un modèle à apporter une aide effective pour parvenir à des convictions, les communiquer, intervenir dans

¹ On peut d'ailleurs les présenter dans ce sens : voir, par exemple, von Winterfeldt et Edwards (1986).

² Sur ces questions, nous renvoyons à Roy (1990, 1992) et à Le Moigne (1983).

le cours des choses ? Le concept de "pouvoir prédictif" d'un modèle ne paraît pas, dans ce domaine, pouvoir servir de référence et fournir des tests de validité comme c'est le cas dans beaucoup d'autres disciplines. On a vu cependant, aux chapitres 4, 5 et 6, que le modèle utilisé par les auteurs de l'étude U, tout comme celui que nous avons utilisé, proposent des concepts qui nous semblent riches et utiles en matière d'aide à la décision :

- fonction d'utilité partielle, aversion pour le risque, agrégation additive ou multiplicative, taux de substitution d'une part ;
- pseudo-critères, concordance, discordance, surclassement, indice de crédibilité d'autre part.

Ces concepts ne sont cependant pas identiques et il ne faut donc pas s'étonner de constater qu'ils puissent conduire à des prescriptions et recommandations différentes. Le cas du WPPSS en fournit un bon exemple.

L'examen de la figure 9.3.1 montre un certain nombre de convergences entre les deux études :

- le site a_3 apparaît en tête ;
- le site a_2 vient juste derrière a_3 ;
- les sites a_5 et a_6 viennent en queue de classement.

L'examen du tableau des performances de chaque étude (cf. tableaux 9.2.2 et 9.3.1) montre :

- que le site a_3 a de bonnes performances sur la plupart des critères ;
- que le site a_2 a des performances légèrement inférieures à celles de a_3 sur la plupart des critères tout en ayant un profil comparable ;
- que les sites a_5 et a_6 ont de mauvaises performances sur la plupart des critères.

La convergence des recommandations des deux études à propos de ces sites est donc assez naturelle. Ces deux modèles peuvent néanmoins conduire à des recommandations non semblables. Ainsi, dans le cas étudié ici, nous aurions recommandé

l'abandon du site a_1 qui apparaît comme un bon site dans l'étude U. A l'inverse, le site a_8 , qui est en bonne position dans l'étude S, est rejeté en milieu de classement dans l'étude U¹.

Ces divergences reflètent la différence des principes qualitatifs sous-tendant les deux modèles. Rappelons qu'elles résident, pour l'essentiel, dans la probance accordée aux écarts entre les évaluations sur les différents critères et le caractère plus ou moins compensatoire de leur agrégation. Illustrons ces différences sur la position des sites a_1 et a_8 .

Le site a_1 est très bien évalué sur quatre (g_3, g_4, g_5, g_6) des six critères dans les deux modèles (cf. tableaux 9.2.2 et 9.3.1). En revanche, il possède la moins bonne évaluation parmi les neuf sites en ce qui concerne la santé-sécurité (g_1) et les pertes de saumons (g_2). La PAMC d'ELECTRE III, qui n'autorise la compensation entre critères que de façon très locale et qui fait usage de l'idée de veto, a tendance à rejeter un tel profil vers le bas du classement. Au contraire, le modèle utilisé dans l'étude U, qui autorise pleinement la compensation, place ce site en tête en raison de ses très bonnes évaluations sur quatre critères qui permettent de racheter ses mauvaises performances sur les deux autres.

Le site a_8 a des évaluations "moyennes" sur tous les critères. Un tel profil "compromis" a tendance à être plus valorisé par la PAMC d'ELECTRE III que par le modèle utilisé dans l'étude U qui peut classer avant lui des sites dont les bonnes performances sur certains critères viennent compenser de moins bonnes sur d'autres.

Devant l'opposition profonde des principes qualitatifs à la base des deux modèles considérés ici, il n'est pas choquant de les voir aboutir à des recommandations non semblables. Ces divergences ne traduisent pas, à notre sens, l'inutilité et la vanité du

¹ Dans les deux études, les sites a_7 et a_8 sont en milieu de classement. Le site a_4 , en milieu de classement dans l'étude U, a une position controversée dans l'étude S.

travail d'aide à la décision mais peut-être, plus simplement, le fait qu'il peut être apporté plusieurs éléments de réponse à un même problème. Devant l'impossibilité de pratiquer, au sein d'un même processus de décision, deux types d'études différents, les acteurs doivent être conscients des options qualitatives véhiculées par les différents modèles, traduisant souvent des prises de position éthiques de l'homme d'étude, avant de se forger une conviction personnelle sur le choix à effectuer. Dans ce domaine, la multiplicité des modèles nous semble refléter bien plus une reconnaissance de la complexité de la tâche de l'homme d'étude qu'une faiblesse scientifique.

Chapitre 10

PROGRAMMATION D'INVESTISSEMENTS LOURDS : COMPARAISON A POSTERIORI ENTRE LES RÉSULTATS D'UNE "APPROCHE SCIENTIFIQUE" ET LE DÉROULEMENT EMPIRIQUE D'UN PROCESSUS DE DÉCISION

RÉSUMÉ

La réalisation d'un plan portant sur des investissements lourds tels que des prolongements de lignes de métro ne peut qu'être étalée dans le temps. Le cas dont il est question dans ce chapitre concerne le classement (programmation) de tels projets de prolongements en fonction de leur plus ou moins grande priorité.

Au 10.1, nous décrivons tout d'abord le cadre général dans lequel le problème se pose à la Régie Autonome des Transports Parisiens (RATP). Cet organisme a en effet vocation pour contribuer à la planification des infrastructures. Nous indiquons ensuite les raisons qui ont amené à entreprendre, dans ce cadre, l'étude a posteriori qui fait l'objet du présent chapitre. La section se termine par une présentation sommaire des six critères devant guider la programmation.

Au 10.2.1, on expose pourquoi certaines particularités de ce problème concret ont conduit à élaborer une nouvelle méthode : ELECTRE IV. Le 10.2.2 traite de la façon dont le concept de pseudo-critère a été utilisé pour prendre en compte la part d'arbitraire qui affectait les performances (c'était là une des caractéristiques importantes du problème).

Le 10.3 est consacré à l'application d'ELECTRE IV. Les résultats obtenus à partir d'un système relationnel de référence S y sont tout d'abord présentés (cf. 10.3.1). Ils sont ensuite discutés à la lumière d'une analyse de robustesse (cf. 10.3.2).

Au 10.4, on confronte enfin les résultats précédents à ceux, empiriques, qui ont historiquement jalonné un processus de décision qui s'est déroulé de 1973 à 1980. On s'efforce d'apporter des éléments de réponse aux questions qui furent à l'origine de cette étude a posteriori.

Dans le secteur des transports comme dans beaucoup d'autres, des plans d'investissement sont périodiquement conçus. Ce type de plans comporte habituellement une série de projets. Ceux-ci, une fois le plan approuvé, doivent être progressivement réalisés. Les ranger en fonction de jugements concernant leurs priorités relatives relève de ce qu'il est convenu d'appeler la programmation du plan d'investissement. Divers critères interviennent couramment pour raisonner et argumenter ces priorités relatives. Le processus de décision par lequel s'opère la programmation fait intervenir divers acteurs n'ayant pas forcément la même opinion quant à l'importance à accorder à chaque critère.

Le présent chapitre traite d'un cas de programmation entrant dans le cadre général qui vient d'être décrit. Il reprend une étude conduite en 1980 par l'un d'entre nous ¹. Précisons que cette étude n'était pas destinée à accompagner un travail de programmation. Des décisions avaient déjà été prises pour la majorité des projets ; les priorités avaient été discutées et arbitrées, certains engagements avaient été arrêtés, tout cela dans le cadre d'un processus complexe, souvent conflictuel, ayant mobilisé de nombreux acteurs dans des réunions multiples échelonnées sur huit années. Il s'agissait de comparer les décisions arrêtées au fil des années aux recommandations qu'il aurait été possible de formuler dès l'origine sur la base d'une "approche scientifique" ² visant à aider à cette programmation.

Après avoir précisé, au 10.1, l'objet de l'étude, nous exposerons, au 10.2, comment s'est opéré le choix (plus exactement la conception) d'une méthode appropriée à l'approche scientifique envisagée. Cela nous amènera à achever la présentation des

¹ Il s'agit en l'occurrence de B. Roy (cf. Roy et Hugonnard (1982 a, b et d)) ; il convient de préciser ici qu'au moment où ont été conduits les calculs décrits au 10.3, les faits rapportés au 10.4 n'étaient pas connus.

² Rappelons (cf. 1.1) qu'une telle approche, même si elle est qualifiée de scientifique, ne prétend pas découvrir une vérité devant s'imposer à tous comme ce devrait être le cas si l'on disposait d'une science de la décision ; le caractère scientifique ne s'applique ici qu'à l'aide à la décision (cf. Roy (1992)).

données disponibles. La mise en œuvre de la méthode ainsi que la présentation des conclusions auxquelles elle a conduit seront présentées au 10.3. Ces conclusions seront enfin comparées (au 10.4) avec ce qui s'est effectivement produit au cours des années 1973 à 1980.

10.1 L'OBJET DE L'ÉTUDE

10.1.1 Cadre général

En 1952 s'achevait la première vague d'extension en banlieue du métro parisien. Le plan de cette extension avait été élaboré en 1928. De 1952 à 1970, le réseau est resté stable. A cette époque, une nouvelle phase d'extension s'est dessinée. Entre 1928 et 1970, un développement considérable de la région parisienne s'est opéré, principalement dans la partie suburbaine. C'est pourquoi, dès la fin des années 1960 et sans cesse depuis, il est apparu nécessaire de mettre à l'étude le prolongement de nombreuses lignes en banlieue. En 1973, un plan d'ensemble, portant sur 12 nouveaux prolongements de lignes, fut élaboré par la RATP et rapidement approuvé par les instances compétentes.

Au terme de sa première phase d'extension, le métro de Paris comptait, en 1952, 148,4 km de lignes pour la seule ville de Paris contre 20,2 pour toute la banlieue. A partir de 1970, après une longue période de stagnation, quelques réalisations mineures ont vu le jour, portant notamment le réseau de banlieue à 31,8 km en 1973.

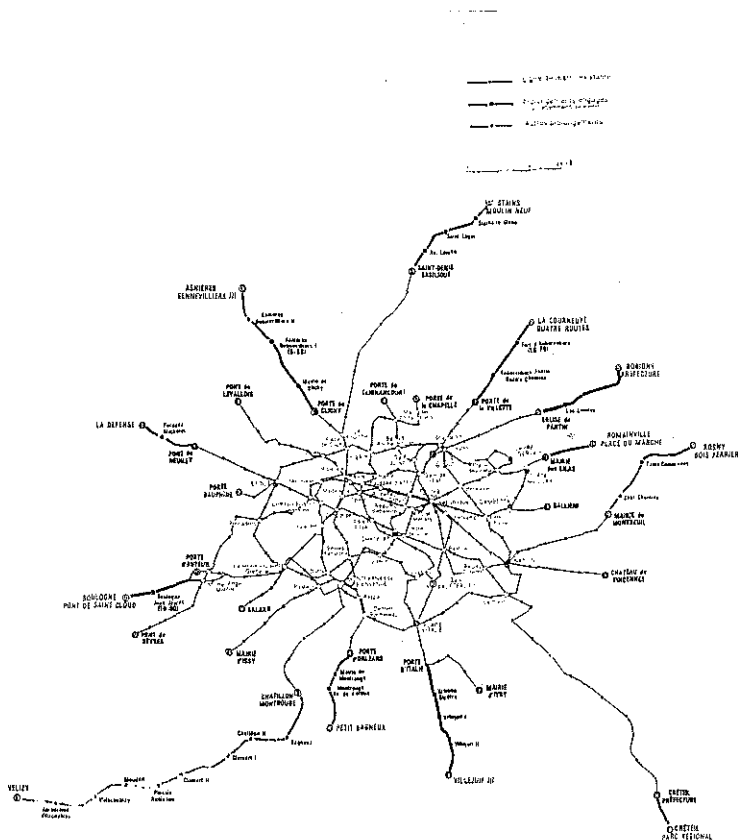
Les 12 nouveaux prolongements de lignes figurant au plan de 1973 (cf. figure 10.1.1) totalisaient 42,6 km et conduisaient à créer 38 nouvelles stations (ceci correspondait à doubler le nombre des stations existant en banlieue). En France de 1980, le coût de ce plan 1973 était de 7,5 milliards.

Dès 1974, l'un des prolongements du plan de 1973, jugé "le plus prioritaire", a été engagé. Deux autres l'ont été en 1975 puis, en 1979 et en 1981, deux autres encore. Cet échéancier ainsi que les décisions de programmation qui ont précédé ces engagements seront précisés au 10.4.

Faisons remarquer que, relativement à un prolongement de ligne, la décision d'engagement ne porte pas nécessairement sur

la totalité du prolongement. La décision initiale peut ne concerner qu'un premier tronçon. Une nouvelle décision sera alors nécessaire pour engager le second (qui est, en général, le dernier).

Figure 10.1.1 : Tracé des 12 prolongements du plan de 1973 (source : RATP)



La programmation arrêtant les priorités d'engagement des travaux ainsi que les décisions d'engagement échappent à la RATP. Ces décisions appartiennent en effet à d'autres instances (politiques et sociales, nationales et régionales, cf. 10.4). Il est en revanche, dans les attributions de la RATP, d'instruire le dossier sur des bases techniques, économiques et sociales afin de mettre en évidence toutes les priorités qui peuvent être solidement établies indépendamment de tout système de valeur qui lui serait propre. La RATP a par conséquent pour mission d'éclairer les décisions d'échelonnement dans le temps des tranches de travaux concernés par ces prolongements de lignes. Une fois les décisions d'engagement prises, il lui incombe d'en mener à bien la réalisation.

En 1979, la RATP publie un dossier intitulé : "Extension du métro en banlieue... Evaluation globale et classement des différents prolongements". Ce dossier, établi sur les bases fournies par l'ensemble des études menées entre 1973 et 1979, rassemblait et synthétisait la totalité des informations disponibles à partir desquelles la comparaison des prolongements de lignes pouvait être (et avait été) raisonnée. Sur la base de ce volumineux travail et en accord avec ses différents partenaires, la RATP a pris le parti de structurer et de résumer ces informations concernant les 12 prolongements du plan de 1973 à l'aide de six critères. Nous les noterons g_j ($j = 1, \dots, 6$). Comme nous le verrons au 10.1.3, chacun d'eux peut être regardé comme reflétant un point de vue concernant tout spécialement l'un des acteurs naturellement concerné.

Ce dossier de 1979 décrivait en détail les procédures à suivre pour évaluer un prolongement quelconque a sur chacun de ces six critères. Ces procédures permettaient donc d'attribuer une valeur à chacune des performances $g_j(a)$. L'évaluation d'une telle performance nécessitait, selon le critère considéré :

- de procéder à de multiples estimations chiffrées, inévitablement très approximatives, de diverses grandeurs (population, coût, ...) caractéristiques de la situation actuelle ;
- de définir des normes fixant, par exemple, le périmètre dans lequel une population doit être dénombrée, la manière

d'opérer ce dénombrement, des prix de référence (valeur du temps, de l'énergie, ...) ;

- d'adopter des options prospectives concernant, par exemple, certaines évolutions urbaines ou encore le comportement des usagers vis-à-vis du transport en commun ;
- de recourir à des avis d'experts.

Il s'ensuit que, si minutieuses qu'aient été les procédures décrites dans ce dossier de 1979, les performances $g_j(a)$ auxquelles elles conduisaient ne pouvaient être regardées comme indiscutables. Elles n'étaient, dans la plupart des cas, que des ordres de grandeur à partir desquels il était impossible d'affirmer que, toutes choses égales par ailleurs, le prolongement b devait être prioritaire par rapport au prolongement a si et seulement si $g_j(b) > g_j(a)$ (le sens de cette inégalité devant être renversé pour les critères tels que l'urgence du prolongement est d'autant plus forte que la performance est plus faible). Il y avait là une caractéristique des données du problème qui ne pouvait être négligée pour raisonner et argumenter les priorités.

10.1.2 Raison d'être de l'étude a posteriori

Effectuer la programmation des 12 prolongements prévus au plan de 1973 consiste à ranger ceux-ci en classes d'égale priorité et à ordonner ces dernières. Il s'agit autrement dit de définir, sur l'ensemble des projets considérés, une structure de préordre complet. Comme on l'a vu tout au long des chapitres 3 à 6, déduire "scientifiquement" une telle structure d'un tableau de performances n'est pas, en général, aisé. Dans le cas particulier des données issues du dossier de 1979 (cf. tableaux 10.1.1 et 10.1.2), nous avons pu vérifier combien il était difficile de concevoir empiriquement et d'argumenter un tel préordre complet. A diverses reprises, il a cependant été constaté que certains des membres des commissions, chargés de préparer ou d'arrêter la programmation, se livraient à des calculs de moyennes ou encore à des sommations de rangs de façon à attribuer une valeur à chacun des prolongements étudiés et qu'ils proposaient, comme base de discussion, le préordre qui en découlait. La part importante d'arbitraire affectant le résultat de tels calculs est évidemment très grande. Elle était parfois dénoncée mais pouvait aussi

Tableau 10.1.1 : Critères et performances associées

Prolongements \ Critères						
	g_1 Population + emplois desservis par km de ligne en 1975	g_2 Trafic prévisible d'entrants aux stations nouvelles par km de ligne	g_3 Coût/km de ligne (en millions de Francs en 1978)	g_4 Taux de rentabilité interne	g_5 Organisation du réseau de transports en commun	g_6 Effet structurant sur l'urbanisme
1 à la Défense	82 900	26 500	270	8,7	1	1
4 à Petit Bagneux	32 800	11 600	180	6,4	9	9
5 à Bobigny	12 500	7 100	110	4,6	2	2
7N à la Coumeuve	33 100	11 500	140	14,1	3	7
7S à Villejuif	24 000	11 200	160	12,0	8	5
8 à Créteil-Parc Régional	17 100	4 000	40	11,8	12	3
9 à Rosny Bois-Perrier	14 200	3 700	130	3,9	7	10
10 à Boulogne	29 200	7 500	120	6,0	11	12
11 à Romainville	24 600	7 200	160	3,7	10	11
13b à Asnières-Genevilliers	37 650	10 400	130	12,2	3	8
13N à Stains Moulin-Neuf	17 400	4 600	170	3,7	5	6
13S à Vélizy	14 100	3 000	90	5,8	6	4

Remarques :

- Pour g_4 , les valeurs indiquées ici sont celles d'une grandeur corrélée aux taux de rentabilité interne et non ce taux lui-même.
- Les critères g_5 et g_6 étant qualitatifs, le numéro d'ordre dans le classement (de 1 à 12 par ordre d'intérêt décroissant) tient lieu de performance.
- Les évaluations pour les prolongements 1 et 8 supposent réalisée la totalité des programmes d'urbanisme prévus.

passer inaperçue.

Il est donc apparu intéressant de pouvoir disposer d'une méthode destinée à élaborer (sur des bases pouvant être reconnues comme étant "scientifiques" par les principaux acteurs concernés) un préordre sur un ensemble quelconque de projets soumis à programmation. Ce préordre, accompagné d'un certain nombre de commentaires, était destiné à être servir de point de départ des discussions de programmation. Il n'était cependant pas nécessaire que ce préordre soit complet. Imposer cette condition, c'était, au contraire, accroître le risque de faire apparaître des priorités mal fondées.

En effet, les critères peuvent être fortement conflictuels, leurs performances assez imprécises, l'importance qu'il convient de leur accorder source de divergences entre acteurs. Si certaines priorités peuvent être solidement établies, il en est d'autres qui peuvent avoir tendance à s'inverser selon que l'on considère un écart comme significatif ou non, que l'on adopte telle ou telle règle d'agrégation, que l'on regarde tel critère ou tel-autre comme prépondérant. Il est donc préférable de laisser la possibilité de conclure à l'incomparabilité de deux prolongements quant à leurs priorités respectives plutôt que de forcer la comparaison, dans un sens ou dans l'autre, ou vers des priorités égales. D'une façon plus générale, il paraît important de pouvoir mettre à l'épreuve de diverses hypothèses (explorant l'espace de liberté laissé par les principaux facteurs d'arbitraire) la robustesse des conclusions que révèle le préordre recommandé par la méthode.

Soulignons que les recommandations faites pourront toujours être remises en question à partir de considérations non prises en compte par la famille de critères et, plus généralement, par la méthode. Ces considérations, d'ordre politique par exemple, peuvent intervenir également pour arbitrer les cas d'incomparabilité ou de priorité non robuste.

La méthode à définir devait tenir compte de certains traits caractéristiques des données en matière de programmation de prolongements de lignes de métro.

Tableau 10.1.2 : Priorités restreintes à l'axe de chaque critère et seuils de discrimination

Les relations d'égale priorité, de priorité faible et de priorité stricte sont indiquées pour les seuls prolongements consécutifs avec les conventions suivantes :

- égale priorité : aucun signe
- priorité faible : $\sim$
- priorité stricte : $\cup$

Critères	Priorités restreintes à l'axe de signification du critère	Seuils de discrimination
g_1 : Population + emplois desservis en 1975 à moins de 1 000 m par kilomètre de ligne	1 $\cup$ 13 ^b 7N 4 $\cup$ 10 11 7S $\cup$ 13N 8 9 $\cup$ 13S 5	$q_1 = 0,10 \ g_1$ $p_1 = 0,20 \ g_1$
g_2 : Trafic prévisible d'entrants aux stations nouvelles par kilomètre de ligne	1 4 7N 7S 13 ^b 10 11 5 13N 8 9 13S	$q_2 = 0,15 \ g_2$ $p_2 = 0,30 \ g_2$
g_3 : Coût par kilomètre de ligne	8 13S 5 10 13 ^b 9 7N 7S 11 13N 4 1	$q_3 = 0,10 \ g_3$ $p_3 = 0,25 \ g_3$
g_4 : Taux de rentabilité interne socio-économique	7N 13 ^b 7S 8 1 4 10 13S 5 9 11 13N	$q_4 = 1$ $p_4 = 2,5$
g_5 : Organisation du réseau de transports en commun	1 5 13 ^b 7N // 13N 13S 9//7S 4 11//10 8	q_5 $p_5 = 3$
g_6 : Effet structurant sur l'urbanisme	1 5 8//13S 7S 13N//7N 13 ^b 4//9 11 10	q_6 $p_6 = 3$

Remarques :

- La valeur importante du seuil p_3 tient compte de l'évolution technique possible des projets.
- Le signe // sert à délimiter des sous-groupes de prolongements qui sont jugés d'égale priorité relativement au critère considéré. Les valeurs des seuils d'indifférence q_5 et q_6 qui en découlent sont indiquées tableau 10.2.2.

En premier lieu, nous avons indiqué, à la fin du 10.1.1, pourquoi les valeurs des performances pouvaient apparaître imprécises, incertaines, voire mal déterminées. Faisons toutefois

observer que ceux qui avaient participé à l'étude de 1979 (que ce soit pour définir les procédures d'évaluation ou pour calculer les performances des 12 prolongements) avaient une assez bonne connaissance qualitative des marges d'arbitraire dont ont été entachés les chiffres qui figurent dans le tableau de performances. Ils étaient en mesure de dire pourquoi tel écart de performance pouvait ou ne pouvait pas servir d'argument (toutes choses égales par ailleurs) pour justifier une priorité bien établie de l'un des prolongements par rapport à l'autre.

En second lieu, tout comme la RATP, les autres acteurs intervenant dans le processus de décision reconnaissaient que chacun des 6 critères explicités dans l'étude de 1979 méritait de contribuer à la définition des priorités. Il n'en demeurerait pas moins que l'importance du rôle qui devait revenir à chacun restait non définie. Il était exclu que la RATP prenne parti sur ce point. Elle aurait, par là, fait prévaloir son propre système de valeurs. On aurait pu concevoir qu'elle consulte les différents intervenants sur ce point. Obtenir des informations chiffrées, significatives sur le poids que les divers acteurs étaient prêts à accorder aux différents critères semblait à la fois fort difficile (compte-tenu notamment de la complexité de cette notion d'importance, cf. 3.1.6) et de peu d'intérêt pour l'application de la méthode à des contextes similaires. De surcroît, tout permettait de penser que les opinions qui auraient pu être recueillies se seraient avérées relativement divergentes. Pour le travail de programmation considéré, toute pondération a des incidences politiques. Pour toutes ces raisons, on s'est senti contraint de considérer qu'aucune donnée ne pouvait être disponible. On a toutefois admis que les deux hypothèses qualitatives suivantes pouvaient et devaient être prises en considération :

- aucun des 6 critères ne doit jouer un rôle prépondérant ;
- chacun des 6 critères est susceptible de modifier un ordre de priorité qui, sans lui, découlerait des 5 autres.

Compte-tenu des conditions décrites ci-dessus, la question se posait de savoir s'il existait une méthode permettant d'élaborer un préordre capable de constituer une bonne base de départ pour établir une programmation. Qui plus est, si une telle méthode

existait, il a été jugé indispensable, afin de mettre en lumière son aptitude à être prise en compte effectivement dans un processus de décision, qu'elle soit testée sur des projets ayant déjà donné lieu à discussion et arbitrage quant à leurs priorités respectives. Il s'agissait également de vérifier si, grâce à la méthode, on pouvait parvenir directement et plus rapidement, sur la base des données disponibles, à des conclusions analogues à celles qui avaient été dégagées progressivement par d'autres voies moins formalisées. Dans le cas où ces dernières se trouveraient en contradiction avec celles dégagées par la méthode, il convenait de savoir si les divergences constatées pouvaient être expliquées : la méthode n'aurait pas été condamnée dans la mesure où ces explications feraient apparaître les résultats de la méthode comme étant "scientifiquement" mieux fondés (en-dehors de toute considération extérieure aux données) que ceux découlant de l'évolution historique du processus de décision. Un tel exercice (qualifié ici d'étude *a posteriori*) a donc été effectué sur les données du plan de 1973 telles qu'elles avaient été mises en forme et synthétisées dans le dossier de 1979. L'objet du paragraphe suivant est de préciser les critères et le tableau de performances qui en découlait.

10.1.3 Critères et tableau de performances

Pour les raisons qui précèdent, ni le choix des critères, ni les valeurs des performances qui figurent au tableau 10.1.1 ne pouvaient être l'objet de discussion dans le cadre de l'étude rapportée ici. Nous ne chercherons donc ni à justifier le choix de la famille de critères, ni à décrire en détail les procédures de calcul des performances. Nous nous bornerons à donner à leur sujet les informations utiles à une bonne intelligibilité de l'ensemble du travail.

La famille de critères a été définie en privilégiant successivement le point de vue de l'habitant, de l'exploitant, de l'investisseur, de l'état et des responsables de la région Ile-de-France. Cela ne signifie nullement que chacun de ces acteurs n'est intéressé que par celui ou ceux des critères conçus en considérant le point de vue qu'il est censé privilégier. L'habitant, par exemple, ne peut se désintéresser de tout ce qui a une incidence aussi bien sur les coûts directs et indirects de son transport que sur la richesse et le

bon fonctionnement du réseau ou encore sur l'impact de ce réseau en matière d'urbanisme.

Pour l'habitant, ce qui importe, c'est d'être desservi, c'est-à-dire le fait qu'il existe une station proche de son domicile ou de son lieu de travail. D'après les enquêtes d'attractivité des stations de métro en banlieue, il paraît raisonnable de considérer comme directement desservis les populations et emplois situés à moins de 1 000 m de marche à pied réelle d'une station de métro. Le critère g_1 concerne l'importance des populations et emplois desservis dans ce sens. Toutefois, le nombre $g_1(a)$ n'est pas égal au chiffre total des résidents et des emplois desservis par l'ensemble des stations du prolongement a mais à ce nombre divisé par le nombre de kilomètres du prolongement. Ceci est justifié par le fait que les prolongements sont de longueur relativement inégale et que la décision d'engager les travaux n'est pas prise une fois pour toutes pour la totalité du prolongement mais tronçon par tronçon.

L'exploitant juge de l'intérêt d'un prolongement en fonction de l'importance du trafic qu'il attire. Il a l'habitude de raisonner en nombre d'entrants journaliers dans les nouvelles stations. La valeur $g_2(a)$ est définie comme le quotient de ce nombre évalué pour un jour ouvrable moyen par le nombre de kilomètres de a . Faisons observer que le trafic total d'une ligne est la somme du nombre des voyageurs se rabattant à pied et du nombre de ceux se rabattant par l'autobus, en deux roues ou en voiture particulière. Le premier de ces termes (et non les autres) dépend du nombre de résidents et d'emplois desservis. En ce sens, g_2 n'est pas totalement indépendant de g_1 . Ceci est toutefois sans importance pour l'étude puisque l'un de ces critères concerne la population et l'autre l'exploitant.

Pour l'investisseur, c'est évidemment le coût de l'investissement qui importe au premier chef. La valeur $g_3(a)$ est tout simplement le coût d'investissement du projet a par kilomètre de ligne.

Pour l'Etat, il est habituel de faire entrer en ligne de compte le taux de rentabilité socio-économique qui résulte d'une analyse classique coûts-avantages. C'est le critère g_4 . Celui-ci agrège tous les coûts et avantages pouvant être évalués et dont une bonne part n'est pas prise en compte par les critères g_1 , g_2 , g_3 . Il s'agit notamment des coûts d'exploitation, des gains de temps des usagers, des avantages pour la collectivité qui résultent de l'abandon de la voiture particulière au profit des transports en commun, etc.

Aux yeux des responsables de la région Ile-de-France, il existe des conséquences indirectes de ces projets qui ne sont pas prises en compte par les critères précédents et qui méritent d'intervenir pour fixer les priorités. C'est la raison d'être des deux derniers critères. L'objet de g_5 est de rendre compte de l'intérêt du prolongement vis-à-vis de l'organisation générale des réseaux de transport dans le secteur considéré : rabattement par autobus (notamment de

rocade), connexion avec d'autres réseaux (ferroviaires, autoroutiers, ...). Le critère g_6 vise enfin à appréhender les effets structurants sur l'urbanisme qu'il s'agit d'apprécier en fonction des orientations du schéma directeur d'aménagement et d'urbanisme de la région Ile-de-France. Les performances selon ces deux derniers critères étant essentiellement de nature qualitative, les chiffres qui figurent dans le tableau 10.1.1 traduisent seulement un numéro d'ordre (1 pour le meilleur prolongement, 12 pour le moins bon).

Faisons observer qu'un prolongement est d'autant plus prioritaire que sa performance sur les critères :

- g_1, g_2, g_4 est plus grande ;
- g_3, g_5, g_6 est plus petite.

10.2 LE CHOIX D'UNE MÉTHODE

10.2.1 Pourquoi ELECTRE IV ?

Le travail qui fait l'objet du présent chapitre a débuté en 1980 par une recherche documentaire portant sur des revues très variées. Quelques articles ¹ mettaient l'accent sur le fait que, pour éclairer correctement des choix en matière d'investissement de transport, il était nécessaire de faire intervenir plusieurs critères, précisément du type de ceux présentés au 10.1.3. Les difficultés qu'il y a à vouloir affecter des poids à ces critères s'y trouvaient soulignées.

Sur le plan théorique, aucune source ne fournissait de méthode apte à traiter le problème tel qu'il avait été formulé. Certes, la méthode coûts-avantages avait fréquemment été utilisée dans le passé pour classer des investissements de transport. Toutefois, elle avait fait depuis l'objet de critiques sévères ².

Toute méthode fondée sur l'élaboration d'un critère unique de synthèse (cf. chapitre 4) nous a semblé devoir être exclue. Elle

¹ Cf. Barbier (1971), Keitel (1975), Simpson (1976) et Grabe (1978).

² Cf. Winner (1978) et O'Leary (1979). La méthode coûts-avantages est une méthode monocritère. Elle repose, implicitement, sur l'établissement d'un critère unique de synthèse directement à partir d'un modèle du type $\Gamma(A)$ (cf. 1.5) sans passer par l'élaboration d'une famille de critères.

se serait heurtée à trois obstacles difficilement surmontables :

- i) l'absence d'information sur l'importance relative des critères,
- ii) le caractère purement ordinal des critères g_5 et g_6 ,
- iii) des valeurs imprécises ou incertaines, voire mal déterminées, des performances selon les critères g_1 à g_4 .

Les deux dernières de ces trois difficultés pouvaient être surmontées par des méthodes de type ELECTRE. Les seules ayant pour objectif l'élaboration d'un préordre partiel qui existaient à l'époque étaient ELECTRE II et ELECTRE III. On a pu s'assurer (cf. 10.2.2) que le concept de pseudo-critère permettait de prendre en compte les connaissances qualitatives à partir desquelles une différence $g_j(b) - g_j(a)$ pouvait être regardée comme révélatrice d'une priorité stricte, faible ou, au contraire, d'une indifférence entre b et a selon le seul critère g_j . Malheureusement, la mise en œuvre de ces deux méthodes nécessitait que des poids soient affectés à chacun des critères. Nous avons songé à surmonter la difficulté i) en appliquant la méthode retenue (de préférence ELECTRE III) avec un ensemble de jeux de poids. Il nous est toutefois très vite apparu que cette voie n'avait que peu de chances d'aboutir à une méthode suffisamment systématique et convaincante pour présenter de l'intérêt.

Pour les raisons qui précèdent, une recherche a été entreprise afin d'élaborer une méthode qui, tout en restant aussi proche que possible d'ELECTRE III, puisse justifier un préordre partiel sans trop préjuger de l'importance relative donnée aux différents critères. Ce fut l'origine d'ELECTRE IV (cf. 5.3.1.2 et 6.4.4). C'est cette méthode qui a été finalement retenue.

10.2.2 Prise en compte de la connaissance sur la part d'arbitraire qui affecte les performances

Nous avons signalé, à la fin du 10.1.1, les raisons pour lesquelles les performances qui figurent au tableau 10.1.1 se trouvaient être affectées d'une part d'arbitraire impossible à négliger. Ceux qui avaient élaboré ces performances connaissaient les sources d'imprécision, d'incertitude et de mauvaise détermina-

tion. Pour une paire de prolongements donnée $\{a, b\}$ et pour un critère g_j précisé, ils pouvaient répondre à des questions telles que :

– En faisant varier, dans une plage raisonnable, les facteurs mal connus, serait-il possible d'inverser le sens de la différence $g_j(b) - g_j(a)$? Une réponse oui à une telle question conduisait naturellement à poser $b I_j a$ (où I_j est une relation d'égale priorité¹ restreinte à l'axe de signification du critère g_j).

– En supposant, dans le cas où la réponse à la question précédente est négative, que l'on cherche à faire varier les facteurs mal connus de façon à réduire à son minimum la quantité $|g_j(b) - g_j(a)|$, le minimum ainsi atteint peut-il s'interpréter comme une différence trop faible pour que le critère g_j permette d'argumenter (toutes choses égales par ailleurs) une priorité bien fondée en faveur du meilleur des deux prolongements ? Selon que la réponse à une telle question était positive ou négative, on pouvait poser (en supposant que b désigne le meilleur des deux prolongements) $b Q_j a$ ou $b P_j a$ (Q_j et P_j désignant respectivement des relations de priorité faible et de priorité stricte restreintes à l'axe de signification du critère g_j).

Il n'était évidemment pas concevable de vouloir obtenir une réponse aux questions ci-dessus pour chacune des 66 paires de prolongements considérés selon les 6 critères (ce qui aurait amené à examiner 396 cas). On s'est tout d'abord efforcé d'obtenir la réponse à ces questions pour chaque critère en considérant seulement les 11 paires de prolongements qui se trouvaient être consécutifs dans le préordre complet défini par les performances rangées de la meilleure à la moins bonne. Les conclusions obtenues sont reproduites (avec les conventions originelles) dans la partie centrale du tableau 10.2.1.

Pour fixer les valeurs des seuils de discrimination q_j et p_j (cf. dernière colonne du tableau 10.2.1), on a d'une part cherché à

¹ Dans tout ce qui suit, on écrira "égale priorité", "priorité faible" et "priorité stricte" au lieu de "indifférence", "préférence faible" et "préférence stricte".

rendre compte des résultats indiqués dans la partie centrale du tableau 10.2.1 tout en vérifiant, d'autre part, que les valeurs envisagées conduisaient à des résultats satisfaisants pour les paires de prolongements non consécutifs et tout spécialement pour les paires séparées par un seul prolongement.

Pour les trois premiers critères, il était manifeste que l'effet des facteurs d'imprécision, d'incertitude, d'indétermination qui affectaient leurs valeurs était d'autant plus important que $g_i(a)$ était plus grand. Une hypothèse de proportionnalité semblait, dans ces conditions, parfaitement justifiée. Pour g_4 , en revanche, il nous est apparu plus réaliste d'adopter des seuils constants.

Pour ce qui est des deux derniers critères, aucune des deux solutions précédentes ne nous a semblé convenir. En effet, le fait de ranger les prolongements du meilleur au moins bon et de leur affecter, sur cette base, un numéro d'ordre allant de 1 à 12 pour définir la performance n'implique nullement que les écarts de préférences entre deux prolongements consécutifs aient une amplitude comparable. Ainsi par exemple pour g_5 , l'écart entre les prolongements ligne 8 et ligne 10 (respectivement dernier et avant-dernier) est apparu compatible avec une égale priorité alors que l'écart entre les prolongements ligne 10 et ligne 11 (ce dernier prolongement étant rangé juste avant celui de la ligne 10) apparaissait révélateur d'une priorité faible. Pour chacun de ces deux critères, les prolongements se rassemblaient naturellement en sous-groupes de telle sorte que deux prolongements étaient d'égale priorité si et seulement si ils appartenaient au même sous-groupe (cf. tableau 10.2.1). Pour prendre en compte ce résultat, on a donné aux seuils q_5 et q_6 les valeurs indiquées au tableau 10.2.2. Enfin, il est apparu que, en dépit des inégalités mentionnées ci-dessus à propos des écarts de préférences entre prolongements consécutifs, une différence de rang de classement strictement supérieure à 3 pouvait être regardée, dans tous les cas, comme révélatrice d'une priorité stricte. On a donc posé $p_5 = p_6 = 3$.

Les valeurs des seuils qui figurent au tableau 10.2.1 ne sont, bien évidemment, que des ordres de grandeur convenables. La robustesse des conclusions méritait donc d'être testée face à des variations raisonnables (cf. 10.3.2) des valeurs retenues.

Précisons que, relativement aux critères g_1 , g_2 et g_3 , les valeurs des seuils indiquées tableau 10.2.1 sont des seuils directs¹, c'est-à-dire définis en fonction de la moins bonne des deux performances (compte-tenu du sens de variation des critères, il s'agit, pour g_1 et g_2 , de la plus petite des deux valeurs et, pour g_3 , de la plus grande). En revanche, les seuils q_5 et q_6 sont des seuils

¹ Cf. MMCAD, 9.3.

inverses ¹, c'est-à-dire définis à partir de la meilleure des deux performances (dans les deux cas, la plus petite). Les autres seuils (relatifs à g_4 , g_5 et g_6) étant constants peuvent être regardés aussi bien comme des seuils directs que comme des seuils inverses.

Les valeurs de q_5 et q_6 , telles qu'elles figurent dans le tableau 10.2.2, ne peuvent être directement prises en compte par les logiciels usuels ¹. Grâce à un recodage des critères g_5 et g_6 (utilisant une transformée monotone des valeurs de performance), la difficulté peut cependant être aisément tournée. En effet, avec les nouvelles valeurs indiquées tableau 10.2.3, on peut poser $q_5 = q_6 = 2$. Il faut toutefois modifier les valeurs des seuils de préférence et poser $p_5 = p_6 = 5$.

Tableau 10.2.2 : Seuils d'égale priorité des cinquième et sixième critères

Valeurs des critères	1	2	3	4	5	6
$q_5[g_5(a)]$	2	1	0	2	2	1
$q_6[g_6(a)]$	2	1	0	2	1	0
Valeurs des critères	7	8	9	10	11	12
$q_5[g_5(a)]$	0	2	1	0	1	0
$q_6[g_6(a)]$	2	1	0	2	1	0

10.3 LES RÉSULTATS DE L'APPROCHE SCIENTIFIQUE

10.3.1 Application d'ELECTRE IV au système S de référence

La mise en œuvre d'ELECTRE IV implique de préciser :

- celles des relations $S^1, \dots, S^5$ (cf. (r.5.3.5) au 5.3.1.2 a)) que l'on souhaite faire intervenir ;
- la valeur à attribuer aux seuils de veto v_j dans la mesure où S^5 intervient.

¹ Les seuils variables sont supposés être de la forme $\alpha \cdot g_j(a) + \beta$.

Tableau 10.2.3 : Nouvelles codifications des critères g_5 et g_6 compatibles avec des seuils constants

Valeurs de g_5 et g_6	1	2	3	4	5	6
Codage de g_5	1	2	3	sans objet	7	8
Codage de g_6	1	2	3	6	7	8
Valeurs de g_5 et g_6	7	8	9	10	11	12
Codage de g_5	9	12	13	14	17	18
Codage de g_6	11	12	13	16	17	18

Comme dans toute méthode ELECTRE, les options de ce type doivent tout d'abord être prises en vue de définir un système S de référence, lequel devra ensuite être modifié de diverses manières de façon à conduire une analyse de robustesse (cf. 10.3.2). Rappelons que la méthode devait être présentée à des non spécialistes de la modélisation des préférences et de l'aide multicritère à la décision. Il importait donc qu'elle soit relativement simple pour que les principes et les mécanismes puissent en être exposés sur la base d'un exemple numérique. Nous nous sommes donc imposé de n'introduire que deux relations de surclassement dans le système de référence. L'une d'elles était destinée à saisir des surclassements qu'il devait être facile de justifier par simple comparaison des vecteurs de performances associés aux actions considérées, l'autre devant permettre d'appréhender des surclassements sur la base d'arguments certes moins solides mais qui devaient pouvoir également être présentés

simplement sur la base de la comparaison des vecteurs de performances. Comme on le verra plus loin, le fait de ne considérer que deux relations simplifie également la procédure d'exploitation, laquelle peut être exposée sans difficultés (comme on a pu le vérifier) à des personnes non initiées.

Afin d'asseoir des surclassements qui, sans trop préjuger de l'importance relative des critères (cf. la double hypothèse qualitative formulée à la fin du 10.1.2), soient malgré tout suffisamment riches pour faire apparaître des priorités, ce sont les relations S^3 et S^5 qui ont été conçues et utilisées en premier ¹. Les hypothèses et arguments qui justifient l'usage de $S^3 = S_{\Delta Q}$ (cf. (r.3.1.14)) ont été longuement présentés et discutés au 3.1.4 d). La relation $S^5 = S_{\Delta V}$ (cf. (r.5.3.4) au 5.3.1.2 a)) a été introduite afin d'accepter des surclassements plus faiblement établis, reposant sur des considérations de concordance et de discordance moins exigeantes que celles requises par S^3 (elles ont été présentées au 5.3.1.2 b)). Rappelons que, dans S^5 , un seul critère discordant est toléré. Cette discordance est toutefois limitée par le seuil de veto. Il nous a paru judicieux de ne tolérer qu'une faible discordance en posant, pour tous les critères j de la famille :

$$v_j = 2 \cdot p_j. \quad (10.3.1)$$

Le système S de référence a donc été constitué de deux relations de surclassement emboîtées : l'une S^3 reflétant des surclassements assez fortement établis, l'autre S^5 plus faiblement justifiés. Ce système (cf. figure 10.3.1) est complètement défini sur la base des performances et des seuils des tableaux 10.1.1, 10.2.1 et 10.2.2.

Rappelons que la procédure d'exploitation d'ELECTRE IV est un cas particulier de celle d'ELECTRE III, cas particulier qui la rend beaucoup plus simple, comme on l'a montré au 6.4.4. Nous en illustrons ci-après les premières étapes sur le système de référence S qui vient d'être défini.

¹ Cf. Roy et Hugonnard (1982a).

Figure 10.3.1

Représentation matricielle de S^3 (surclassement fort)

	1	4	5	7N	7S	8	9	10	11	13b	13N	13S
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
7N	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
7S	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
13b	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
13N	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
13S	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

Figure 10.3.1 (suite)

Représentation matricielle de S^5 (surclassement faible)

	1	4	5	7N	7S	8	9	10	11	13b	13N	13S
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
7N	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
7S	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
13b	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
13N	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
13S	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

Il convient, en premier lieu, de calculer, pour chacun des 12 prolongements a , sa qualification $q(a)$ en ne faisant intervenir que le seul surclassement S^3 . Rappelons que cette qualification est définie comme la différence entre le nombre d'actions que a surclasse et le nombre d'actions qui surclassent a . Ces qualifications sont données au tableau 10.3.1.

Tableau 10.3.1 : Qualification des prolongements selon S^3

a	1	4	5	7N	7S	8
q(a)	0	-1	+2	+6	+1	0

a	9	10	11	13 ^b	13N	13S
q(a)	-7	-1	-4	+6	-2	0

L'ensemble D_1 est, par définition (cf. 6.4.4), l'ensemble des actions qui confèrent à $q(a)$ sa valeur maximum. On a donc :

$$D_1 = \{7N, 13^b\}.$$

Ces deux actions sont candidates pour la tête de classement dans la distillation descendante (du fait de leur qualification maximum dans l'ensemble des 12 prolongements selon la relation de surclassement la plus "fortement" établie).

L'ensemble D_1 n'étant pas réduit à un seul prolongement, il faut examiner si la relation plus "faiblement" établie S^5 permet ou non de départager les actions que cet ensemble renferme. Pour cela, il suffit de calculer la qualification de chacune d'entre elles dans (D_1, S^5) et de retenir celle(s) qui maximise(nt) cette qualification. Etant donné que 7N et 13^b se surclassent l'une l'autre avec S^5 (ce qui confère à chacune une qualification nulle), il n'est pas possible de les départager. L'ensemble $\{7N, 13^b\}$ constitue donc la première classe $\mathcal{C}_1$ du préordre complet Z_1 que la distillation descendante a pour but de construire.

On raisonne ensuite sur l'ensemble $A \setminus \mathcal{C}_1$ des 10 prolongements restant à classer. Afin de mettre en évidence le ou les prolongements les plus prioritaires parmi eux, on recalcule la qualification de chacun d'eux relativement à $(A \setminus \mathcal{C}_1, S^3)$. Le maximum est obtenu pour le seul prolongement 7S. Il constitue donc la classe $\mathcal{C}_2$. En poursuivant, on obtient $\mathcal{C}_3 = \{5\}$. Ce n'est qu'à la quatrième itération que la relation S^5 intervient effectivement pour départager des ex æquo selon S^3 . Relativement aux 8 prolongements restant à classer, les 4 suivants 4, 10, 13N et 13S ont une qualification maximum selon S^3 . Dans l'ensemble des 4 prolongements ainsi sélectionnés, seul 4 à une qualification

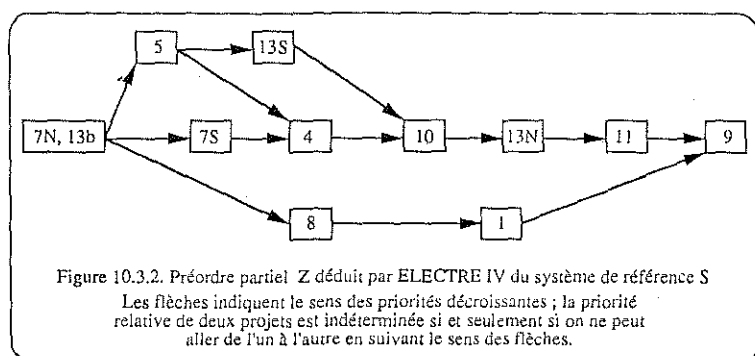
maximum selon S^5 . On pose donc $\mathcal{C}_4 = \{4\}$. En continuant de la sorte, on aboutit au premier préordre complet Z_1 constitué par les classes d'équivalence suivantes rangées selon un ordre de préférence décroissant :

$\{7N, 13^b\}, \{7S\}, \{5\}, \{4\}, \{10, 13N, 13S\}, \{11\}, \{8\}, \{1, 9\}$.

La distillation ascendante consiste à appliquer la même procédure après inversion de tous les sens des surclassements. Elle aboutit au préordre complet Z_2 suivant :

$\{1, 7N, 8, 13^b\}, \{5\}, \{13S\}, \{4, 7S\}, \{10\}, \{13N\}, \{11\}, \{9\}$.

L'application d'ELECTRE IV au système de référence S aboutit au préordre partiel Z représenté figure 10.3.2. Rappelons que Z est l'intersection des deux préordres complets Z_1 et Z_2 obtenus respectivement par distillations descendante et ascendante.



10.3.2 Analyse de robustesse

Il s'agit ici de savoir dans quelle mesure les priorités mises en évidence par le préordre de la figure 10.3.2 sont robustes face aux éléments d'arbitraire que sont ici essentiellement :

- l'appréciation de certains seuils ;
- la façon de modéliser les priorités en ne retenant que les relations de surclassement S^3 et S^5 .

Dans ce but, on a comparé, au préordre de la figure 10.3.2, ceux obtenus en appliquant ELECTRE IV à d'autres systèmes obtenus en modifiant les valeurs données aux seuils et en faisant intervenir d'autres relations que S^3 et S^5 . Dans un premier temps¹, 31 autres systèmes ont été examinés.

Compte-tenu de la façon dont les seuils de discrimination (cf. tableau 10.2.1) avaient été fixés, il nous est apparu non justifié d'envisager des valeurs plus faibles. Nous avons donc reconsidéré, sur des bases plus pessimistes, l'impact que pouvaient avoir, sur les performances, les divers facteurs d'imprécision, d'incertitude et d'indétermination. Nous avons ainsi pu attribuer, à chacun des seuils considérés, une valeur extrême qu'il ne nous paraissait pas réaliste de voir dépassée (cf. tableau 10.3.2).

Tableau 10.3.2 : Valeurs extrêmes des seuils de discrimination

Critère g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$q_i[g_i(a)]$	$0,15 \cdot g_1(a)$	$0,20 \cdot g_2(a)$	$0,15 \cdot g_3(a)$	1,5	3	3
$p_j[g_j(a)]$	$0,25 \cdot g_1(a)$	$0,35 \cdot g_2(a)$	$0,30 \cdot g_3(a)$	3,5	6	6

Pour chaque critère, les seuils q_i et p_j se trouvent donc encadrés entre une valeur minimum (celle du tableau 10.2.1) que nous appellerons valeur normale et une valeur extrême (celle du tableau 10.3.2). Sur ces bases, 8 jeux de seuils ont été pris en considération :

Jeu n° 0 : Valeurs normales pour chaque critère.

Jeu n° j ($j = 1, \dots, 6$) : Valeurs normales de chaque seuil pour tous les critères, sauf le $j^{\text{ème}}$ pour lequel les valeurs sont extrêmes.

Jeu n° 7 : Valeurs extrêmes pour chaque critère.

Venons-en maintenant aux options plus structurelles concernant le fait que l'on peut prendre appui sur un système de

¹ Cf. Groussaud et Le Galès (1980).

préférences (ayant ici une signification en termes de priorité) faisant intervenir un nombre plus ou moins élevé de relations de surclassement emboîtées, lesquelles correspondent à des degrés de crédibilité plus ou moins forts des surclassements qu'elles affirment. Nous avons tout d'abord souhaité combiner à S^5 (toujours dans un système à deux relations) une relation encore plus solidement établie que S^3 . Nous avons choisi S^2 . Nous avons ensuite ajouté S^1 au système initial et au second système.

On remarquera que nous n'avons pas fait intervenir S^4 : cette relation nous est apparue, dans le cas présent, trop peu différente de S^5 du fait de la faible valeur du veto. Dans des analyses de robustesse ultérieures, S^4 a été prise en considération conjointement avec des valeurs du veto v_j légèrement supérieures à $2p_j$ (cf. (r.10.3.1)). Ce second temps de l'analyse de robustesse n'a fait que confirmer les résultats qui vont suivre.

L'analyse de robustesse a donc été conduite en combinant les quatre systèmes de relations de surclassement emboîtées qui viennent d'être introduits, à savoir :

$$(S^3, S^5), (S^2, S^5), (S^1, S^3, S^5), (S^1, S^2, S^3, S^5)$$

avec les 8 jeux définis plus haut sur la base des seuils de préférence normaux et extrémaux. Cela a conduit à 31 préordres partiels venant s'ajouter à celui de la figure 10.3.2. Ils sont présentés et analysés en détail dans Groussaud et Le Galès (1980). Nous nous bornons à rapporter ci-après les conclusions qui découlent de l'analyse des écarts qu'ils présentent par rapport aux préordres Z de la figure 10.3.2.

En dépit de multiples divergences locales, on relève une remarquable stabilité sur les points suivants :

- i) dans les 31 nouveaux préordres, les projets 1 et 8 demeurent comparables aux seuls projets de tête et de queue ;
- ii) dans presque tous les cas, 7N et 13^b restent ex æquo et meilleurs que tous les autres projets et, lorsqu'il n'en est pas ainsi, l'un des deux projets 7N ou 13^b reste meilleur que tous les autres (l'autre venant alors en second) en position éventuellement incomparable à certains projets ;

iii) immédiatement après cette tête de classement, on trouve toujours 5 et 7S en position incomparable ; lorsque 7N vient avant 13^b, 5 et 7S peuvent venir immédiatement après 7N en position incomparable à 13^b ;

iv) les projets 13S et 13N s'intercalent systématiquement et toujours dans cet ordre entre les 4 projets précédents et ceux formant le groupe de queue ;

v) les projets 11 et 9 demeurent, dans tous les cas, en queue de classement, le plus souvent dans cet ordre, sinon en position incomparable ;

vi) enfin, les projets 4 et 10 sont les seuls dont la position est instable ; au mieux, ils viennent immédiatement après 5 et 7S ; au pire, ils se situent dans le groupe de queue ; leur position relative est elle-même fluctuante.

10.4 COMPARAISON AVEC LE DÉROULEMENT EMPIRIQUE DU PROCESSUS DE DÉCISION

La méthode qui vient d'être appliquée, si elle l'avait été a priori et non a posteriori, aurait-elle fourni une bonne base de départ pour établir la programmation ?

Les priorités mises en évidence par le préordre Z (cf. figure 10.3.2) complétées et, dans certains cas, nuancées par les résultats i) à vi) de l'analyse de robustesse avaient-elles quelque chance d'être reconnues comme valables et entérinées au cours du processus ?

Le caractère "scientifiquement" argumenté des résultats dont il vient d'être question aurait-il conduit à une autre programmation que celle effectivement décidée ?

Grâce à la méthode, le processus de programmation aurait-il pu se dérouler plus rapidement et de façon moins conflictuelle ?

Telles étaient les principales questions auxquelles on souhaitait pouvoir apporter des éléments de réponse en effectuant cette étude a posteriori (cf. 10.1.2).

Les réponses aux questions ci-dessus ont donc été recherchées au travers d'une confrontation entre les résultats de la méthode proposée et ceux, empiriques, qui ont historiquement jalonné le déroulement du processus de décision. Comme le montre le contenu des paragraphes a) à e) ci-après, cette confrontation a apporté des réponses franchement positives aux deux premières des quatre questions ci-dessus. Nous reviendrons sur les deux dernières en conclusion du chapitre. En dépit de leur intérêt, il était clair, dès le début, que la confrontation envisagée ne permettrait pas d'y apporter des réponses définitives.

a) Le préordre Z et la conclusion i) de l'analyse de robustesse font clairement apparaître une position particulière des prolongements des lignes 8 et 1 : ils sont incomparables à la plupart des autres. Ceci recoupe les opinions contradictoires qui ont été exprimées à leur sujet à diverses reprises dans plusieurs instances au cours des années 1973 à 1980.

Cet état de chose se comprend fort bien à la lumière du tableau de performances et, mieux encore, lorsque l'on prend en compte les seuils (cf. tableau 10.2.1). Le prolongement 1 est certes le meilleur au regard des critères g_1 , g_2 , g_5 et g_6 mais il est, de très loin, le plus cher (critère g_3). Le prolongement 8 est, au contraire, le moins cher et il est bien placé selon le critère g_6 mais il est parmi les moins bons selon les critères g_1 , g_2 et g_5 . Pour comparer ces projets aux autres, il est indispensable de faire intervenir des jugements de valeurs sur l'importance relative des critères en conflit.

b) En tête du préordre Z, on trouve les deux prolongements 7N et 13^b. Cette position est confirmée par l'analyse de robustesse (cf. ii)). Viennent ensuite, et ce de façon robuste (cf. iii)), deux autres prolongements incomparables : 5 et 7S. Tous deux sont prioritaires par rapport au prolongement 4. Le 6 décembre 1973, un conseil interministériel restreint retenait, comme prioritaires, 4 des 12 prolongements : 5, 7N, 7S et 13^b (cet ordre ne traduisant aucune priorité relative). Les prolongements 13^b et 7N ont été engagés respectivement en 1974 et 1975 alors que 5 et 7S l'ont été beaucoup plus tard (cf. d) ci-après).

c) Trois prolongements 9, 11 et 13N forment la queue du préordre Z (une fois mis à part le prolongement 1 dont le cas a été examiné au a)). Cette position pour 9 et 11 est robuste (cf. v)). Quant à la position de 13N (cf. iv)), elle n'est jamais très bonne et, en tout cas, toujours plus mauvaise que celle de 13S. En 1981, aucune décision d'engagement relative à ces 3 prolongements n'avait été prise. Qui plus est, des études comparatives, approfondies, portant sur le choix du mode de transport (et, par conséquent, susceptibles de remettre en question l'option métro) avaient été reconnues nécessaires.

d) Selon le préordre Z, les prolongements les plus prioritaires, après 5 et 7S (8 étant mis à part, cf. a)), sont ceux des lignes 13S et 4. Si cette position est bien confirmée par l'analyse de robustesse pour 13S, elle conduit à davantage de nuances pour 4. Le Conseil Régional de l'Ile-de-France, dans son plan triennal pour les années 1978 à 1980, a inscrit, dans l'ordre de priorité suivant, les prolongements 7S (engagé en 1979), 5 (engagé en 1981), 4 et, enfin, 13S.

e) Selon le préordre Z, le prolongement 10 mérite d'être programmé au mieux après 7N, 13^b, 7S, 5, 13S et 4. En fait, l'analyse de robustesse révèle (cf. vi)) que la position de ce prolongement n'est pas robuste. Selon les valeurs données aux seuils, selon le modèle de surclassement retenu, ce prolongement peut être rangé immédiatement après le groupe de tête ou, au contraire, inclus dans le groupe de queue. Historiquement, il s'est avéré que, à la demande du Conseil d'Administration du District de la Région Parisienne, le prolongement de la ligne 10 avait été décrété prioritaire en 1975. Il avait même été engagé cette même année au titre du plan de développement de l'économie. Ce sont en réalité des considérations extérieures à celles prises en compte dans les critères g_1 à g_6 qui ont motivé cette décision de 1975. Soulignons que cette dernière a toutefois suscité de vives oppositions de la part de plusieurs intervenants qui la considéraient comme insuffisamment justifiée.

Il ressort de ce qui précède que, si ELECTRE IV avait été mise en œuvre a priori, autrement dit si le préordre Z et les conclusions i) à vi) avaient été présentées aux différents interve-

nants, les décisions finalement arrêtées n'auraient sans doute pas été fondamentalement différentes de ce qu'elles ont été. Peut-être, en apportant des arguments à ceux qui considéraient comme mal justifiée la priorité donnée au prolongement de la ligne 10, celui-ci n'aurait-il pas été déclaré prioritaire aussi tôt. Peut-être les discussions relatives au prolongement des lignes 8 et 1 auraient-elles pu gagner en clarté. Quoi qu'il en soit, on peut estimer qu'en mettant en évidence un "noyau dur" de priorités solidement établies, en faisant apparaître que d'autres sont relativement fluctuantes entre certaines limites, en soulignant enfin des incomparabilités résultant de systèmes de valeurs non nécessairement partagés, le recours à la méthode n'aurait pu avoir que des effets bénéfiques sur les décisions prises. On peut également penser que les résultats dus à une telle méthode peuvent aider à dépassionner certains débats et contribuer à faciliter, ainsi qu'à accélérer, le déroulement du processus de décision. Toutefois, ce ne sont là que des conjectures.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE DE CAS D'APPLICATION ¹

Cette bibliographie vise à présenter et commenter brièvement quelques textes décrivant des cas réels d'aide multicritère à la décision. Pour chaque texte, on s'est efforcé :

1. De cerner le domaine d'application par quelques mots-clés.
2. D'indiquer le (ou les) chapitre(s) du livre auquel (auxquels) se rattache(nt) la (les) méthode(s) utilisée(s).
3. De préciser la (les) méthode(s) utilisée(s).
4. D'indiquer la problématique d'aide à la décision concernée (ainsi que la nature des actions lorsque celle-ci ne peut se déduire du titre de manière évidente).
5. De noter, le cas échéant, quelques caractéristiques spécifiques de l'étude (proposition d'une nouvelle méthode, travail de modélisation spécifique, etc.).

Cette bibliographie comprend une centaine d'entrées. Elle vise à donner au lecteur intéressé un panorama de cas réels d'application et ne prétend aucunement à l'exhaustivité. Le choix des cas retenus a été guidé par :

- La date de publication (on a rejeté tous les textes publiés avant 1980).
- La facilité d'accès du document (ne sont mentionnés que les textes les plus facilement accessibles).
- Le souci de couvrir un large éventail de domaines d'application et de méthodes (certains de ces cas utilisent des méthodes qui, bien que se rattachant directement à cet ouvrage, n'y sont pas

¹ Rappelons que cette bibliographie n'aurait pu être établie sans le concours précieux de Dominique Champ-Brunet.

explicitement décrites. On donnera alors les références précises de la méthode).

– Le caractère représentatif ou typique de ces cas.

Mentionnons que viser à l'exhaustivité serait ici d'autant plus difficile que la plupart des cas réels d'aide multicritère à la décision ne donne pas lieu à publication¹. On trouvera d'autres bibliographies de cas réels dans :

Goicoechea A., Duckstein L., Zionts S. (eds.) (1992) : **Multiple Criteria Decision Making**, Proceedings of the Ninth International Conference : Theory and Applications in Business, Industry and Government, Springer-Verlag, New York.

Goicoechea A., Hansen D.R., Duckstein L. (1982) : **Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications**, John Wiley and Sons (*Chapitre 11, p. 398-415*).

Golden B., Wasil E., Harker P. (1989) : **The Analytic Hierarchy Process : Applications and Studies**, Springer Verlag, New York.

Romero C. (1986) : "A Survey of Generalized Goal Programming (1970-1982)", **European Journal of Operational Research** 25, 183-191.

Saaty T.L., Vargas L.G. (1990) : **Prediction, Projection and Forecasting**, Kluwer Academic Publishers.

Shim J.P. (1989) : "Bibliographical Research on the Analytic Hierarchy Process (AHP)", **Socio-economic Planning Sciences** 23, 161-167.

Tabucanon M.T. (1988) : **Multiple Criteria Decision Making in Industry**, Elsevier (*Chapitres 5, 6, 7, p. 148-320*).

¹ De fait ne sont publiés que certains de ceux qui sont conduits en relation avec le milieu académique.

Vincke Ph. (1989) : **L'aide multicritère à la décision**, Editions Ellipses (France) et Editions de l'Université Libre de Bruxelles (Belgique) (*Chapitre VII.13, p. 154-156*).

Von Winterfeldt D., Edwards N. (1986) : **Decision Analysis and Behavioral Research**, Cambridge University Press (*Chapitre 12, p. 448-529*).

White D.J. (1990) : "A Bibliography on the Applications of Mathematical Programming Multiple Objective Methods", **Journal of the Operational Research Society** 41, 669-691.

Zahedi F. (1986) : "The Analytic Hierarchy Process : A Survey of the Method and its Applications", **Interfaces** 16, 96-108.

ANANDALINGAM G. (1987) : "A multiple criteria decision analytic approach for evaluating acid rain policy choices", **European Journal of Operational Research** 29, 336-352.

1. Environnement, écologie, contrôle des pluies acides, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. $P.\alpha$.
5. Extension de l'approche de Keeney et Raiffa (1976) au cas de groupes multiples d'agents concernés par les conséquences des pluies acides. Application aux négociations entre états des Etats-Unis pour choisir la politique à adopter pour ce problème.

ANANDALINGAM G., OLSSON C.E. (1989) : "A multi-stage multi-attribute decision model for project selection", **European Journal of Operational Research** 43, 271-283.

1. Gestion projet, ressources en eau, approvisionnement zone urbaine, Etats-Unis, Virginie.
2. Chapitres 4 et 5.
3. Méthode d'écémage et théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. $P.\beta$ puis $P.\gamma$ et $P.\alpha$.
5. Présentation d'une procédure originale en trois étapes combinant successivement la méthode d'écémage de Mood (1983), la méthode d'élimination par aspects de Tversky (1972) et la théorie de l'utilité multiattribut. Analyse de sensibilité.

BANA e COSTA C.A. (1988) : "A methodology for sensitivity analysis in three-criteria problems : A case study in municipal management", **European Journal of Operational Research** 33, 159-173.

1. Planification urbaine, Portugal.
2. Chapitre 5 (PAMC de type II).
3. Méthodes TRIDENT (Tavares (1984)) et OUTWEIGH (Bana e Costa (1986)).
4. P.γ.
5. Comparaison de méthodes, situation d'incertitude sur les poids, analyse de sensibilité.

BANA e COSTA C.A., DINIS DAS NEVES C.F. (1989) : "Describing and formalizing the evaluation process of Portuguese navy officers", in Lockett A.G., Islei G. (eds.), **Improving Decision Making in Organisations**, Proceedings of the Eighth International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Manchester, United Kingdom, August 21-26, 1988, LNEMS 335, Springer-Verlag, 355-369.

1. Gestion du personnel, évaluation des officiers de marine, Portugal.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Utilisation d'une méthodologie qui combine la méthode OUTWEIGH (Bana e Costa (1986) et la procédure de distillation d'ELECTRE III.
4. P.γ. Classement d'officiers en vue d'une promotion.
5. Aspects multi-juges. Pas de pondération des critères.

BANAI-KASHANI A.R. (1990) : "Dealing with uncertainty and fuzziness in development planning : a simulation of high-technology industrial location decision-making by the analytic hierarchy process", **Environment and Planning A** 22, 1183-1203.

1. Localisation, développement économique, localisation d'industries de haute technologie, Memphis, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Analyse hiérarchique de Saaty (AHP).
4. P.α. Choix de sites pour une localisation industrielle.

BARDA O.H., DUPUIS J., LENCIONI P. (1990) : "Multicriteria location of thermal power plants", **European Journal of Operational Research** 45, 332-346.

1. Localisation, centrale thermique.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).

3. ELECTRE III

4. P. γ

Voir aussi Barda O.H. (1988) : "Utilisation d'ELECTRE III dans un problème de choix de sites pour l'implantation des centrales thermiques", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 48, 114 p.

Voir aussi, à partir du même cas, une comparaison des méthodes ELECTRE IS, ELECTRE III, AHP et PREFCALC dans Barda O.H. (1989) : "Recherche d'une méthode appropriée pour l'étude des problèmes de choix de sites pour l'implantation de centrales thermiques", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 54, 83 p.

BENJAMIN C.O. (1985) : "A linear goal-programming model for public-sector project selection", **Journal of the Operational Research Society** 36, 13-23.

1. Secteur public, sélection de projets, pays en voie de développement, Trinidad et Tobago, Caraïbes.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming linéaire.
4. P. α .

BOGARDI I., BARDOSSY A., DUCKSTEIN L. (1983) : "Regional management of an aquifer for mining under fuzzy environmental objectives", **Water Resources Bulletin** 19, 1394-1402.

1. Gestion conjointe d'une nappe aquifère et d'un gisement de bauxite, Hongrie.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. "Dynamic Compromise Programming" (cf. Zeleny (1973)) combinée avec la théorie des ensembles flous.
4. P. α .

Voir aussi Szidarovszky F., Duckstein L. (1986) : "Dynamic multiobjective optimization : A framework with application to regional water and mining management", **European Journal of Operational Research** 24, 305-317.

BRIGGS Th., KUNSCH P.L., MARESCHAL B. (1990) : "Nuclear waste management : An application of the multicriteria PROMETHEE methods", **European Journal of Operational Research** 44, 1-10.

1. Energie nucléaire, environnement, gestion des déchets, CEE.

2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthodes PROMETHEE I et II et GAIA.
4. P.γ. Comparaison de politiques de gestion des déchets nucléaires.
5. Beaucoup d'actions (27). Critères peu nombreux mais très conflictuels (4), peu d'informations sur leur importance relative. Analyse de sensibilité sur les poids et sur les seuils de préférence.

Voir aussi Delhaye C., Teghem J., Kunsch P. (1991) : "Application of the ORESTE method to a nuclear waste management problem", **International Journal of Production Economics** 24, 29-39 avec, cette fois, une application de la méthode ORESTE (Roubens (1982), Pastijn et Leysen (1989)).

BROOKS D.G., KIRKWOOD C.W. (1988) : "Decision analysis to select a microcomputer networking strategy : A procedure and a case study", **Journal of the Operational Research Society** 39, 23-32.

1. Entreprise, stratégie, configuration d'un réseau local de micro-ordinateurs.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.α.

BUEDE D.M., CHOISSER R.W. (1992) : "Providing an analytic structure for key system design choices", **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis** 1, 17-27.

1. Configuration d'un système, conception architecturale, système de télécommunication, Ministère de la Défense, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.γ. Comparaison d'architectures de systèmes de communications.

Pour des compléments sur la méthodologie employée ici, voir French (1986), Von Winterfeldt et Edwards (1986), Watson et Buede (1987) et, pour d'autres applications, voir Edwards et Newman (1982), Fryback et Keeney (1983).

CARUSO C., COLORNI A., PARUCCINI M. (à paraître) : "The regional urban solid waste management system : A modelling approach", **European Journal of Operational Research**.

1. Environnement, gestion des déchets solides urbains, Lombardie, Italie.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Méthode GDF. Méthode de point de référence.
4. P.α.

COHON J.L., REVELLE C.S., CURRENT J., EAGLES T., EBERHARD R., CHURCH R. (1980) : "Application of a multiobjective facility location model to power plan siting in a six-state region of the U.S.", *Computers and Operations Research* 7, 107-123.

1. Energie, localisation, centrales thermiques et nucléaires, Etats-Unis.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Utilisation d'un modèle fondé sur la programmation linéaire multiobjectif présenté dans Cohon (1978) et Cohon et Marks (1975).
4. P.α.

COLSON G., DE BRUYN C. (1989) : "Integrated multiobjective portfolio management system", *Mathematical and Computer Modelling* 12, 1359-1381.

1. Finance, gestion de portefeuilles.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming.
4. P.α.
5. Un premier modèle, fondé sur la théorie bayésienne de la décision, fournit huit critères d'évaluation de chaque titre qui sont ensuite utilisés dans le modèle de goal programming pour évaluer des portefeuilles.

CONTANT J.M., DONDI G., BOISSIN J.Ph. (1987) : "Economic equity and international cooperation : The example of ESA", *Acta Astronautica* 15, 133-139.

1. Espace, coopération européenne, évaluation des avantages et retombées économiques pour les pays membres.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I avec aspects interactifs).
3. UTA, PREFCALC.
4. P.γ.

COOK T., FALCHI P., MARIANO R. (1984) : "An urban allocation model combining time series and analytic hierarchical methods", *Management Science* 30, 198-208.

1. Planification urbaine, développement urbain, Portland, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Analyse hiérarchique de Saaty (AHP).
4. P.γ.
5. Combinaison d'un modèle de prévision avec l'analyse hiérarchique de Saaty.

COSSET J.C., SISKOS Y., ZOPOUNIDIS C. (1992) : "The evaluation of country risk - A decision support approach", **Global Finance Journal** 3, 79-95.

1. Finance internationale, évaluation risque-pays.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. MINORA : méthode UTA en mode interactif.
4. P.γ.
5. La méthodologie multicritère proposée permet, à divers décideurs concernés par le risque-pays (experts, investisseurs, organismes de crédit), de structurer interactivement leur propre modèle d'évaluation.

DANILA N. (1980) : **Méthodologie d'aide à la décision dans le cas d'investissements fort dépendants**, Université de Paris-Dauphine, UER Sciences des Organisations, Thèse de Doctorat de 3e Cycle.

1. Développement économique, choix des investissements.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthodologie combinant la méthode ELECTRE II et la méthode ORESTE.
4. P.γ.
5. Proposition d'une méthodologie générale de comparaison de projets d'investissements.

D'AVIGNON G.R. (1992) : **Démarche d'aide à la préparation d'un plan directeur : Le cas des palais de justice**, Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE 73, 65 p.

1. Evaluation et sélection de projets, rénovation des palais de justice du Québec, Canada.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. Utilisation d'une première procédure s'inspirant de la théorie de l'utilité et d'une deuxième approche s'inspirant des méthodes de construction de relations de surclassement.
4. P.γ.
5. Travail de formulation des critères, analyse de sensibilité.

D'AVIGNON G., MARESCAL B. (1989) : "Specialization of hospital services in Québec : An application of the PROMETHEE and GAIA methods", **Mathematical and Computer Modelling** 12, 1393-1400.

1. Santé, Canada.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. PROMETHEE II, GAIA.
4. P.γ.

DESPONTIN M. (1982) : "Regional multiple objective quantitative economic policy : a Belgian model", *European Journal of Operational Research* 10, 82-89.

1. Macroéconomie, politique régionale, Belgique.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Programmation linéaire multiobjectif interactive, méthode de Vincke (1976).
4. P. α .

Pour d'autres applications économiques de l'aide multicritère à la décision, voir Wallenius (1991).

DHINGRA A.K., MOSKOWITH H. (1991) : "Application of fuzzy theories to multiple objective decision making in system design", *European Journal of Operational Research* 53, 348-361.

1. Construction mécanique, conception de mécanismes à grande vitesse.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Programmation non linéaire multiobjectif floue.
4. P. α .
5. Présentation d'une méthode originale adaptée aux problèmes de construction mécanique. Le problème de construction est formulé comme un problème de programmation non linéaire multiobjectif et on utilise la théorie des ensembles flous pour modéliser l'information vague et imprécise entrant dans la formulation du problème.

DIAKOULAKI D., MAVROTAS G., PAPAYANAKIS L. (1992) : "A multicriteria approach for evaluating the performance of industrial firms", *OMEGA* 20, 467-474.

1. Finance, analyse ratio financier, comparaison entreprises, industrie pharmaceutique, Grèce.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Méthode fondée sur le "Displaced ideal" de Zeleny (1982).
4. P. γ .

DUCKSTEIN L., TREICHEL W., EL MAGNOUNI S. (1993) : "Multicriterion analysis of groundwater management alternatives", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 114, 40 p.

1. Gestion des eaux souterraines.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. Compromise programming (Zeleny, 1973, 1974), ELECTRE III, théorie de l'utilité espérée multiattribut (Keeney and Raiffa, 1976), Méthode UTA (Jacquet-Lagrèze et Siskos, 1982).
4. P.γ.
5. Etude comparative de quatre méthodes à partir d'un problème de gestion des eaux souterraines d'une île.

ELLIS J.H. (1988) : "Multiobjective mathematical programming models for acid rain control", **European Journal of Operational Research** 35, 365-377.

1. Environnement, protection de l'environnement, contrôle des pluies acides, Etats-Unis.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Programmation mathématique multiobjectif (Cohon, 1978).
4. P.α.
5. Développement de trois modèles multiobjectifs pour optimiser le contrôle des pluies acides.

FERRAND D.J., MARTEL J.M. (1985) : "Le choix multicritère des items d'une échelle de mesure", **Mathématiques et Sciences Humaines** 89, 35-59.

1. Métrologie, construction d'une échelle de mesure.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE II.
4. P.γ.
5. Choix des items à partir de critères multiples de fiabilité, de validité. Analyse de sensibilité.

FICHEFET J., LECLERCQ J.P. (1986) : "A multicriteria microcomputer-assisted system for the identification of bacteria", **European Journal of Operational Research** 24, 12-22.

1. Biologie, tests biochimiques pour identifier des bactéries.
2. Chapitre 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. ELECTRE II et HERMES (cf. Fichet (1982)).
4. P.γ. Identification possible d'une bactérie.

5. Comparaison des méthodes HERMES, ELECTRE II et de méthodes statistiques fondées sur le maximum de vraisemblance.

FUNTOWICZ S., MUNDA G., PARUCCINI M. (à paraître) : "The aggregation of environmental data using multicriteria methods", *Environmetrics*.

1. Environnement, qualité de l'eau, construction d'indicateurs.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthode PRAGMA (Matarazzo, 1988).
4. P. γ .
5. Cadre conceptuel multicritère pour la construction d'indicateurs à partir de l'agrégation de données sur la qualité de l'eau.

GERSHON M., DUCKSTEIN L., McANIFF R. (1982) : "Multiobjective river basin planning with qualitative criteria", *Water Resources Research* 18, 193-202.

1. Gestion des ressources en eau, Arizona, Etats-Unis.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Présentation d'une méthodologie combinant ELECTRE I et ELECTRE II.
4. P. α et P. γ .
5. Utilisation d'ELECTRE I pour choisir un sous-ensemble de systèmes de planification. Utilisation d'ELECTRE II pour ranger les systèmes dans ce sous-ensemble. Analyse de sensibilité.

GLOVER F., MARTINSON F. (1987) : "Multiple-use land planning and conflict resolution by multiple objective linear programming", *European Journal of Operational Research* 28, 343-350.

1. Aménagement du territoire, planification régionale, Etats-Unis.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Variante de la méthode STEM.
4. P. α .
5. Présentation d'une méthode originale qui s'inspire de l'approche de la somme pondérée et de STEM.

GOMES L.F.A.M., LIMA M.M.P.M. (1991) : "TODIM : Basic and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts", *Foundations of Computing and Decision Sciences* 16, 113-127.

1. Environnement, transport routier, amélioration infrastructure routière, Brésil.

2. Chapitres 4 et 5 (PAMC de types I et II).
3. Méthode TODIM.
4. P.γ.
5. Utilisation d'une méthode originale à cheval sur l'école française et américaine. Elle combine des aspects provenant de la théorie de l'utilité multiattribut, de la méthode AHP et des méthodes ELECTRE.

GRASSIN N. (1986) : "Constructing 'population' criteria for the comparison of different options for a high voltage line route", *European Journal of Operational Research* 26, 42-57.

1. Localisation, ligne à très haute tension, Electricité de France.
2. Chapitre 1, 2 et 3.
3. Construction de critères permettant de comparer la sensibilité de la population vis-à-vis de différentes options possibles pour l'emplacement de lignes à très haute tension.

Voir aussi Grassin N. (1986).

GRAVEL M., MARTEL J.M., NADEAU R., PRICE W., TREMBLAY R. (1992) : "A multicriterion view of optimal resource allocation in job-shop production", *European Journal of Operational Research* 61, 230-244.

1. Gestion de la production d'un atelier avec la méthode Kanban.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. Présentation et application de trois méthodes :
 - méthode de la somme pondérée ;
 - méthode de multiplication des taux de Schärliig et Pasche (1980) ;
 - méthode de surclassement fondée sur des relations de dominance stochastique (cf. Martel et Zaras (1990)).
4. P.γ.
5. Présentation de méthodes multicritères originales pour la planification de la production. Construction, à l'aide de simulations numériques, d'une base de connaissance pour analyser le comportement du système de production sous différentes conditions.

HADZINAKOSI., YANNACOPOULOS D., FALTSETAS C., ZIOURKAS K. (1991) : "Application of the MINORA decision support system to the evaluation of landslide favourability in Greece", *European Journal of Operational Research* 50, 61-75.

1. Géologie, risque naturel, prévention des éboulements et des glissements de terrain, Grèce.

2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. MINORA : méthode UTA en mode interactif.
4. P.γ.

HALLEFJORD A., JÖRNSTEN K., ERIKSSON O. (1986) : "A long range forestry planning problem with multiple objectives", *European Journal of Operational Research* 26, 123-133.

1. Gestion forestière, Suède.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Combinaison d'un modèle de programmation linéaire multiobjectif avec un système de simulation de la croissance de la zone forestière étudiée.
4. P.α.
5. Comparaison de plusieurs techniques de programmation multiobjectif :
 - méthode de Belenson et Kapur (1973) ;
 - goal programming ;
 - méthode du point de référence.

HÄMÄLÄINEN R.P., KARJALAINEN R. (1982) : "Decision support for risk analysis in energy policy", *European Journal of Operational Research* 56, 172-183.

1. Energie, choix de stratégies, analyse des risques, Finlande.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut et analyse hiérarchique de Saaty (AHP).
4. P.γ.
5. Construction d'un SIAD combinant une analyse de risque puis l'analyse hiérarchique de Saaty.

Voir aussi Härmäläinen R.P. (1990) : "A decision aid in the public debate on nuclear power", *European Journal of Operational Research* 48, 66-76.

HENS L., PASTIJN H., STRUYS W. (1992) : "The allocation of grants to subcentral authorities : a multicriteria decision making approach", *Revue des Systèmes de Décision*, 1, 155-174.

1. Finance publique, économie urbaine, allocation de subventions aux villes flamandes, Belgique.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. PROMETHEE I et II, GAIA.
4. P.γ.

HENS L., PASTIJN H., STRUYS W. (1992) : "Multicriteria analysis of the burden sharing in the European Community", *European Journal of Operational Research* 59, 248-261.

1. Répartition équitable du financement de la Communauté Economique Européenne entre les états membres
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthodes PROMETHEE et GAIA.
4. P.γ.
5. Utilisation de AHP pour aider au choix des poids des critères.

HINLOOPEN E., NIJKAMP P., RIETVELD P. (1983) : "Qualitative discrete multiple criteria choice models in regional planning", *Regional Science and Urban Economics* 13, 77-102.

1. Planification régionale, choix du tracé d'un canal entre la ville d'Anvers et le Rhin, BENELUX.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthode REGIME (cf. Nijkamp et Spronk (1981)).
4. P.γ.
5. Survol de plusieurs méthodes d'évaluation qualitative en soulignant leurs points forts et leurs points faibles. Présentation d'une nouvelle méthode, REGIME. Etude a posteriori.

IGNIZIO J.P. (1981) : "Antenna array beam pattern synthesis via goal programming", *European Journal of Operational Research* 6, 286-290.

1. Ingénierie, conception optimale.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming linéaire séquentiel (Ignizio, 1978).
4. P.α.

JONES M., HOPE C., HUGHES R. (1990) : "A multi-attribute value model for the study of UK energy policy", *Journal of the Operational Research Society* 41, 919-929.

1. Energie, stratégie à long terme, Royaume-Uni.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Agrégation additive simple (méthode SMART, cf. Edwards (1977)).
4. P.γ.

JORDI K.C., PEDDIE D. (1988) : "A wildlife management problem : A case study in multiple-objective linear programming", **Journal of the Operational Research Society** 39, 1011-1020.

1. Gestion de réserves d'animaux sauvages, détermination du nombre d'herbivores, Afrique-du-Sud.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Programmation linéaire multiobjectif.
4. P.α.
5. Développement d'une approche interactive fondée sur plusieurs méthodes interactives qui ont été modifiées pour les besoins du problème.

KEENEY R.L. (1979) : "Evaluation of proposed pumped storage sites", **Operations Research** 27, 1979, 48-64 (chapitre 9 de Keeney (1980)).

1. Energie, localisation centrale hydroélectrique, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.γ.

Pour d'autres applications dans le domaine de la localisation, voir les autres chapitres de Keeney (1980).

KEENEY R.L., OZERNOY V.M. (1982) : "An illustrative analysis of ambient carbon monoxide standards", **Journal of the Operational Research Society** 33, 365-375.

1. Environnement, protection de l'environnement, construction de standards pour la qualité de l'air ambiant, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.γ.

KHOURY N., MARTEL J.M., YOUROUGOU P. (1991) : A multicriterion approach to country selection for global index funds, Document de travail 91-13, FSA, Université Laval, Québec, Canada.

1. Finance, choix de portefeuille.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Approche utilisant ELECTRE I pour identifier les portefeuilles du noyau et les comparer à ceux de la frontière efficace puis ELECTRE II pour classer ces portefeuilles "admissibles" selon les préférences du décideur.
4. P.α puis P.γ.

Voir aussi :

- Khoury N., Martel J.M., Yourougou P. (1991) : A disciplined approach to country selection for global index funds, Université Laval, FSA, Québec, Canada, **Document de travail** 91-36.
- Martel J.M., Khoury N., Bergeron M. (1988) : article commenté dans cette bibliographie.

KIVIJÄRVI H., TUOMINEN M. (1992) : "A decision support system for semistructured strategic decisions : A multi-tool method for evaluating intangible investments", *Revue des Systèmes de Décision* 1, 353-376.

1. Planification stratégique, choix d'investissements immatériels.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Analyse hiérarchique de Saaty (AHP).
4. P.γ.
5. Développement d'un SIAD qui utilise, entre autres, la méthode de Saaty avec un modèle de simulation dynamique.

KLIMBERT R., REVELLE C., COHON J. (1991) : "A multiobjective approach to evaluating and planning the allocation of inspection resources", *European Journal of Operational Research* 52, 55-64.

1. Contrôle de qualité, inspection, industrie pharmaceutique, Etats-Unis.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Modèle de programmation 0-1 à deux objectifs, méthode de Steuer et Choo (1983).
4. P.α.

KLINGMAN D., PHILLIPS N.V. (1984) : "Topological and computational aspects of preemptive multicriteria military personnel assignment problems", *Management Science* 30, 1362-1375.

1. Gestion du personnel, affectation, armée, Etats-Unis.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Présentation de méthodes multicritères d'affectation originales.
4. P.α.

KORHONEN A. (1987) : "A dynamic bank portfolio planning model with multiple scenarios, multiple goals and changing priorities", *European Journal of Operational Research* 30, 13-23.

1. Finance, banque, gestion de portefeuilles, Finlande.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming.
4. P.α. Choix de portefeuille.
5. Développement d'un modèle de goal programming linéaire en deux étapes fondé sur une combinaison de trois techniques de modélisation : la programmation multi-étapes en avenir incertain de Cohen et Thore (1970), la théorie du portefeuille de Markowitz (1959) et le goal programming.

KUNSCH P.L., TEGHEM Jr. J. (1987) : "Nuclear fuel cycle optimization using multi-objective stochastic linear programming", *European Journal of Operational Research* 31, 240-249.

1. Energie nucléaire, optimisation du cycle du combustible nucléaire.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. STRANGE (Teghem et al. (1986)).
4. P.α.

Voir aussi :

– Teghem Jr. J., Kunsch P.L. (1985) : "Multi-objective decision making under uncertainty : an example for power system", in Haimes Y.Y., Chankong V. (eds.), *Decision Making with Multiple Objectives*, LNMES 242, Springer-Verlag, 443-456.

– Kunsch P.L. (1990) : "Application of STRANGE to energy studies", in Slowinski R., Teghem J. (eds.), *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, 117-130.

LABAT J.M., FUTTERSACK M. (1992) : "Analyse multicritère et système expert - Un SIAD pour l'affectation des aides en faveur des chômeurs de longue durée", *Revue des Systèmes de Décision* 1, 79-92.

1. Emploi, réinsertion des chômeurs, France.
2. Chapitres 4 et 7 (PAMC de type I et méthode interactive).
3. Construction d'un SIAD intelligent à trois composantes : le système de diagnostic, le système de proposition et le système d'affectation. La modélisation multicritère apparaît dans un des modules du système expert utilisé pour le système de proposition de réinsertion.
4. P.α.

LANGEN D. (1989) : "A multi-objective decision model for bank asset/liability management", *Mathematical and Computer Modelling* 12, 1419-1435.

1. Banque, planification stratégique, Allemagne.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Développement d'un SIAD basé sur une version-test du programme non-linéaire DIDAS-NL (cf. Lewandowski et al. (1985)) qui utilise la méthode du point de référence de Wierzbicki (1980 et 1986).
4. P.α.
5. Définition des principaux objectifs quantifiables et conflictuels dans la gestion des avoirs bancaires. Insertion et prise en compte de ces objectifs dans le modèle d'aide multicritère à la décision et dans le SIAD.

LARA P., ROMERO C. (1992) : "An interactive multigoal programming model for determining livestock rations : an application to dairy cows in Andalusia, Spain", *Journal of the Operational Research Society* 43, 945-953.

1. Agriculture, alimentation du bétail, détermination des rations alimentaires, vaches laitières, Andalousie, Espagne.
2. Chapitres 7 (méthode interactive).
3. Multigoal programming (MGP) (Zeleny, 1982, pp. 298-300), méthode interactive de Zionts et Wallenius (1976).
4. P.α.
5. Construction d'un modèle en deux phases :
 - formulation d'un modèle de multigoal programming (MGP),
 - puis conversion de ce modèle sous une forme multicritère interactive, l'approche choisie étant celle proposée par Zionts et Wallenius (1976).

LATHROP W., WATSON S.R. (1982) : "Decision analysis for the evaluation of risk in nuclear waste management", *Journal of the Operational Research Society* 33, 407-418.

1. Energie nucléaire, environnement, gestion de déchets nucléaires, évaluation du risque radio-actif, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.γ.
5. Utilisation des techniques d'analyse de décision pour établir des indicateurs de risque qui reflètent les valeurs collectives. La nouveauté de l'approche présentée réside dans la création de fonctions d'utilité représentant des segments de l'opinion publique en construisant d'abord des fonctions d'utilité pour un nombre déterminé d'individus puis en les combinant pour former des fonctions d'utilité de groupe.

LE GALE S. C. (1982) : Management en épidémiologie. Méthodes et modèles permettant d'orienter les décisions en matière de planification sanitaire. Cas de la Trypanosomose Humaine Africaine, Université de Paris-Dauphine, UER Sciences des Organisations, Thèse de Doctorat de 3e Cycle.

1. Santé, épidémiologie, maladie du sommeil, Afrique Noire.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE I.
4. P.α. Comparaison de stratégies de lutte contre une maladie.

LIGHTNER M.R., DIRECTOR S.W. (1981) : "Multiple criterion optimization for the design of electronic circuits", IEEE Transactions on Circuits and Systems 3, 169-179.

1. Electronique, conception de circuits électroniques.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Méthode de somme pondérée et compromise programming.
4. P.α.

LOCK A.R. (1982) : "A strategic business decision with multiple criteria : The Bally men's shoe problem", Journal of the Operational Research Society 33, 327-332.

1. Planification stratégique, marché de la chaussure.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Agrégation additive simple, analyse conjointe.
4. P.γ.
5. On teste, dans un environnement réel, l'adéquation de l'analyse conjointe pour obtenir des fonctions d'utilité et les utiliser pour identifier une stratégie de relance du secteur de la chaussure pour hommes.

LOOTSMA F.A., BOONEKAMP P.G.M., COOKE R.M., VAN OOSTVOORN F. (1990) : "Choice of a long-term strategy for the national electricity supply via scenario analysis and multi-criteria analysis", European Journal of Operational Research 48, 189-203.

1. Energie, stratégie à long terme, offre électricité, Pays-Bas.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Méthode de comparaison par paires (Lootsma, 1987 et 1988).
4. P.γ.
5. On considère plusieurs scénarios de la croissance économique nationale des Pays-Bas puis, dans le cadre de chaque scénario, on entreprend une analyse

multicritère pour évaluer les stratégies de production d'électricité à long terme en présence de critères conflictuels.

LOOTSMA F.A., MENSCH T.C.A., VOS F.A. (1990) : "Multi-criteria analysis and budget reallocation in long-term research planning", **European Journal of Operational Research** 47, 292-305.

1. Energie non nucléaire, planification de la recherche, financement, CEE.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Méthode de comparaison par paires (Lootsma (1987 et 1988)).
4. P.γ.

Voir aussi :

– Kok M., Lootsma F.A. (1985) : "Pairwise comparison methods in multiple objective programming with applications in a long-term energy planning model", **European Journal of Operational Research** 22, 44-55.

– Lootsma F.A., Meisner J., Schellemans F. (1986) : "Multicriteria decision analysis as an aid to the strategic planning of energy research and development", **European Journal of Operational Research** 25, 216-234.

MARESCHAL B. (1989) : "Le système expert CHRONOS pour la prévision en aide à la décision multicritère : Développements théoriques et applications", **Cahiers du CERO** 31, 81-120.

1. Prévision, séries chronologiques.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthodes PROMETHEE.
4. P.α. Comparaison de modèles d'une série chronologique.
5. Développement d'un système expert d'aide à la prévision faisant appel à des méthodes multicritères pour aider l'utilisateur au choix final d'un modèle.

MARTEL J.M., AOUNI B. (1992) : "Méthode multicritère de choix d'un emplacement : Le cas d'un aéroport dans le Nouveau Québec", **INFOR** 30, 97-117.

1. Problème de localisation, choix de l'emplacement d'un aéroport dans le Nouveau Québec.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Proposition d'une méthode originale mêlant somme pondérée, goal programming et PROMETHEE.
4. P.α.

MARTEL J.M., D'AVIGNON G.R. (1982) : "Projects ordering with multicriteria analysis", *European Journal of Operational Research* 10, 56-69.

1. Evaluation et sélection de projets, santé, Québec.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Présentation d'une méthode de surclassement originale travaillant à partir du modèle $\Gamma(A)$.
4. P. γ . Comparaison de projets de développement sanitaire.
5. Présentation d'une méthode multicritère adaptée à une évaluation probabiliste des actions. Cette méthode repose sur la construction d'une relation de surclassement semblable à celle d'ELECTRE III mais qui est fondée sur deux indices : un indice de confiance et un indice de doute calculés à partir des évaluations probabilistes.

MARTEL J.M., KHOURY N.T., BERGERON M. (1988) : "An application of a multicriteria approach to portfolio comparisons", *Journal of the Operational Research Society* 39, 617-628.

1. Finance, risque, comparaison de portefeuilles.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Approche utilisant successivement les méthodes ELECTRE I et ELECTRE II.
4. P. α et P. γ .
5. Utilisation originale d'ELECTRE I et d'ELECTRE II sur un problème de comparaison de portefeuilles. La première méthode est utilisée pour identifier un sous-ensemble admissible de solutions, la seconde pour obtenir un classement de ces solutions.

Voir aussi Khoury et al. (1991), article commenté dans cette bibliographie.

McCORD M.R., SUN X.D., KERINS D.F., FRANZESE O. (1991) : "Simulating aeromedical helicopter capacities", *Proceedings of the Twenty-Second Annual Pittsburgh Conference on Modeling and Simulation* 22, Part 1, 145-151.

1. Santé, transport des malades par hélicoptères, accroissement de la flotte d'hélicoptères.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P. γ . Comparaison de stratégies d'expansion d'une flotte d'hélicoptères.
5. Modélisation des distributions de probabilités. Proposition d'une technique originale pour présenter et interpréter les résultats. Analyse de sensibilité.

MERKHOFFER M.W., KEENEY R.L. (1987) : "A multiattribute utility analysis of alternative sites for the disposal of nuclear waste", **Risk Analysis** 7, 173-194.

1. Localisation de dépôts de déchets nucléaires.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. P.γ.

Voir aussi Keeney R.L. (1987) : "An analysis of the portfolio of sites to characterize for selecting a nuclear repository", **Risk Analysis** 7, 195-218.

MIN H. (1988) : "The dynamic expansion and relocation of capacitated public facilities : A multi-objective approach", **Computer and Operations Research** 15, 243-252.

1. Localisation, service public, bibliothèque, Columbus, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming avec variables entières.
4. P.α.
5. Intégration d'un modèle fondé sur le goal programming flou dans un SIAD stratégique qui autorise des mécanismes flexibles d'interaction.

MLADINEO N., LOZIC I., STOSIC S., MLINARIC D., RADICA T. (1992) : "An evaluation of multicriteria analysis for DSS in public policy decision", **European Journal of Operational Research** 61, 219-229.

1. Transport routier, choix de tracés, Croatie.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. PROMETHEE II, GAIA.
4. P.γ.

MLADINEO N., STOSIC S., TOMIC T., BARIC A. (1992) : "The applications of multicriteria analysis for estimating pollution in urban and coastal zones", **Revue des Systèmes de Décision** 1, 401-419.

1. Environnement, pollution urbaine et côtière, base de Kastela Splet, Croatie.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Méthode PROMETHEE, logiciels GAIA et PROMCALC.
4. P.γ.
5. Développement d'un SIAD permettant de suivre les variations de la pollution au fil des mois. La visualisation géographique des résultats permet une utilisation en temps réel du système au niveau des municipalités.

PARENT E., SCHNÄBELE P. (1988) : "Le choix d'un aménagement aquacole - Exemple d'utilisation de la méthode ELECTRE III et comparaison avec d'autres méthodes multicritères d'aide à la décision", Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE 47, 68.

1. Aménagement du territoire, planification régionale, aquaculture, Ile-de-Ré, France.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. ELECTRE III. Compromise programming. Q-analysis (Atkin (1974)).
4. P.γ.
5. Analyse de robustesse de la méthode effectuée a posteriori par la confrontation d'ELECTRE III avec la méthode de Compromise Programming et la technique de Q-analysis.

POMEROL J.Ch., ROY B., ROSENTHAL-SABROUX C., SAAD A. (1993) : "An 'intelligent' DSS for the multicriteria evaluation of railway timetables", Communication at IFORS 13, Lisbon, Portugal, July.

1. Evaluation des grilles horaires de trains, SNCF, France.
2. Chapitres 1, 2 et 3.
5. Construction d'un SIAD intelligent pour évaluer, pour un réseau ferroviaire donné, n'importe quel horaire réalisable de façon à pouvoir comparer la robustesse (face à des perturbations aléatoires) de différentes grilles horaires et ainsi orienter le choix d'investissement. Caractérisation de cette méthode de robustesse à l'aide d'une famille de critères appropriée.

Voir aussi Sranon A. (1990) : **Réalisation d'un système basé sur la connaissance pour l'évaluation de la robustesse des grilles horaires des trains**, Université de Paris-Dauphine, LAMSADE, Mémoire de DEA 103.

RICHARD J.L. (1983) : "Aide à la décision stratégique en PME", in Jacquet-Lagrèze E. et Siskos J. (textes rassemblés par), **Méthode de Décision Multicritère**, Editions Hommes et Techniques, 119-143.

1. Planification stratégique de l'entreprise.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. ELECTRE II et UTA (Jacquet-Lagrèze et Siskos (1982)).
4. P.γ. Comparaison de stratégies de développement.
5. Comparaison des deux méthodes.

Voir aussi :

– Richard J.L. (1981) : **Procédure multicritère d'aide à la décision en matière d'audit de stratégie : Cas des moyennes et petites industries**,

Université de Paris-Dauphine, UER Sciences des Organisations, Doctorat de 3e Cycle.

– Richard J.L. (1980) : "Vers une méthodologie multicritère de l'aide à la décision stratégique", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 29, 72 p.

ROBERTS J.H., URBAN G.L. (1988) : "Modeling multiattribute utility, risk and belief dynamics for new consumer durable brand choice", **Management Science** 34, 167-185.

1. Marketing, lancement d'un nouveau produit, industrie automobile, General Motors, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut.
4. $P.\alpha$.

ROHMER J.P., VERET J.O. (1983) : "Choix d'une stratégie commerciale dans la distribution succursaliste", in Jacquet-Lagrèze E. et Siskos J. (textes rassemblés par), **Méthode de Décision Multicritère**, Editions Hommes et Techniques, 91-118.

1. Stratégie commerciale des entreprises coopératives.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE II.
4. $P.\alpha$ et $P.\gamma$. Comparaison de stratégies commerciales.
5. Proposition d'une variante d'ELECTRE II.

Voir aussi :

– Rohmer J.P., Veret J.O. (1980) : **Distribution coopérative et choix multicritères**, Université de Paris-Dauphine, UER Sciences des Organisations, Doctorat de 3e Cycle.

– Rohmer J.P., Veret J.O. (1980) : "Choix d'une stratégie commerciale dans la distribution succursaliste en présence de critères multiples", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 31, 56 p.

ROY B., LETELLIER F. (1989) : "Une approche multicritère pour piloter la gestion des approvisionnements dans une structure de stockage à deux niveaux", Actes du Colloque AFCET sur le Développement des Sciences et Pratiques de l'Organisation et 4e Journées Francophones sur la Logistique et les Transports, Thème 1989 : Logistique, Production, Distribution, Transports, Paris, 63-70.

1. Gestion des stocks, approvisionnement, RATP, France.
2. Chapitres 1, 2 et 3.
3. Présentation d'un modèle expérimental de simulation de politiques de réapprovisionnement dont l'originalité réside dans le fait qu'il s'insère dans le contexte d'un changement organisationnel et que l'essentiel des résultats acquis s'énonce indépendamment des coûts (études de surfaces efficaces).

Voir aussi :

- Roy B., Letellier F., Hougas B. (1990) : "Un modèle multicritère de réapprovisionnement sur deux niveaux de stockage", *Revue Générale des Chemins de Fer*, 37-40.
- Valbon-Sutour M.C. (1993).

ROY B., PRÉSENT M., SILHOL D. :

- "Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : Un cas d'application de la méthode ELECTRE III", Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE 24, juillet 1983, 67 p.
- "A programming method for determining which Paris metro stations should be renovated", *European Journal of Operational Research* 24, 1986, 318-334.

1. Transports collectifs urbains, planification de travaux lourds, France.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE III.
4. P.γ.
5. Attribution de valeurs aux seuils de préférence et d'indifférence. Illustration de la procédure décrite au 5.4 pour donner des valeurs aux coefficients d'importance. Analyse de robustesse importante.

ROY B., SLOWINSKI R., TREICHEL W. (1992) : "Multicriteria programming of water supply systems for rural areas", *Water Resources Bulletin* 28, 13-31.

1. Planification rurale, aménagement d'un système d'approvisionnement en eau, Pologne.
2. Chapitres 5, 6 et 7 (PAMC de type II et méthode interactive).

3. Utilisation d'ELECTRE III pour établir un ordre de priorité pour connecter les utilisateurs au réseau puis utilisation de PREFCALC pour choisir la variante technique représentant le meilleur compromis.
4. P.γ et P.α.
5. Méthodologie originale permettant de trouver un compromis entre des points de vue socio-économiques et des points de vue techniques.

Voir aussi Roy et Slowinski (1993).

SCHNIEDERJANS M.J., HOFFMAN J. (1992) : "Multinational acquisition analysis : A zero-one goal programming model", **European Journal of Operational Research** 62, 175-185.

1. Finance internationale, acquisition de multinationale.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming 0-1 (Schniederjans, 1984).
4. P.α.
5. Pour l'application de cette méthode à un processus d'acquisition d'entreprises, voir aussi Schniederjans M.J., Fowler K.L. (1989) : "Strategic acquisition management - A multi-objective synergistic approach", **Journal of the Operational Research Society** 40, 333-345.

SCHNIEDERJANS M.J., SANTHANAM R. (1989) : "A zero-one goal programming approach for the journal selection and cancellation problem", **Computers and Operations Research** 16, 557-565.

1. Bibliothèque universitaire, acquisition de périodiques, University of Nebraska, Lincoln, Etats-Unis.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming 0-1 (cf. Schniederjans, 1984).
4. P.α.

SCHULZ V., STEHFEST H. (1984) : "Regional energy supply optimization with multiple objectives", **European Journal of Operational Research** 17, 302-312.

1. Energie, planification régionale, Bade-Würtemberg, Allemagne.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Théorie de l'utilité espérée multiattribut. Programmation non linéaire.
4. P.α. Choix d'un système d'approvisionnement énergétique.

SILVA LOPEZ R. (1990) : "Une technique systématique de modélisation multicritère pour l'évaluation d'alternatives de lutte contre la pollution industrielle : Technologies propres ou curatives", Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE 60, 53 p.

1. Protection de l'environnement, pollution industrielle, France.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE IS.
4. P. α .
5. Présentation d'une technique systématique de modélisation pour l'identification des dimensions, l'élaboration des critères et la construction du tableau des performances. Description d'une manière d'exploiter le modèle non seulement pour orienter le choix mais aussi pour en extraire des informations utiles pour définir des stratégies de promotion des technologies propres.

Voir aussi, dans le même domaine :

- pour la construction des critères : Rabearisoa V. (1988) : "Une application de l'analyse multicritère pour l'évaluation d'alternatives : Technologies préventives ou curatives de la pollution industrielle", Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE 85, 37 p. ;
- pour une méthodologie d'aide à la décision en matière de technologies propres/technologies curatives : Casteignau G., Roy B. (1991) : "L'analyse multicritère interactive comme outil d'aide à la décision pour la gestion des risques environnementaux et industriels", Communication au Congrès International Innovation, Progrès Industriel et Environnement - Préparer le XXI^e Siècle, Strasbourg, 93-102.

SILVENNOINEN P., VIRA J. (1981) : "An approach to quantitative assessment of relative proliferation risks from nuclear fuel cycles", *Journal of the Operational Research Society* 32, 457-466.

1. Risque de prolifération des armes nucléaires, armement.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Utilisation de la technique de comparaison par paires proposée par Saaty (1980) pour donner des valeurs aux poids des critères. Puis, pour évaluer les actions, on compare la théorie de l'utilité espérée (forme multiplicative de Keeney (1974)) et une méthode basée sur une mesure d'intégration floue (Sugeno (1977)).
4. P. γ .

SILVERMAN J., STEUER R.E., WHISMAN A.W. (1988) : "A multi-period, multiple criteria optimization system for manpower planning", **European Journal of Operational Research** 34, 160-170.

1. Gestion du personnel, recrutement et promotion, marine américaine.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Méthode de Steuer et Choo (1983).
4. P.α.

SIMOS J. (1990) : "Gestion des déchets solides urbains genevois : les faits, le traitement, l'analyse", chapitres 5, 6 et 7 de Simos J., **Evaluer l'impact sur l'environnement**, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 65-145.

1. Environnement, gestion des déchets urbains, Suisse
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE III.
4. P.γ. Comparaison de politiques de gestion de déchets urbains.
5. Evaluation et prise en compte de l'aspect multi-juges (explicitation des préférences de chaque membres du comité). Technique originale de pondération des critères. Analyse de sensibilité à partir de graphiques. Comparaison des résultats obtenus par ELECTRE III avec ceux obtenus par la méthode de la somme pondérée.

Pour d'autres applications, voir les autres chapitres de cet ouvrage.

SISKOS J. (1986) : "Evaluating a system of furniture retail outlets using an interactive ordinal regression method", **European Journal of Operational Research** 23, 179-193.

1. Distribution, sélection de points de vente, France.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Méthode UTA en mode interactif.
4. P.γ. Comparaison de points de vente.
5. Utilisation interactive de la méthode UTA au travers d'un processus d'essai-erreur.

Voir aussi :

- Siskos J. (1983) : "Application de la méthode UTA I à un problème de sélection de points de vente mettant en jeu des critères multiples", **RAIRO Recherche Opérationnelle** 17, 121-136.
- Moscarola J., Siskos J. (1983) : "Analyse a posteriori d'une étude d'aide à la décision en matière de gestion de réseau de distribution", in E. Jacquet-

Lagrèze et J. Siskos (textes rassemblés par), **Méthode de Décision Multicritère**, Editions Hommes et Techniques, 143-167.

SISKOS J., ASSIMAKOPOULOS N. (1989) : "Multicriteria highway planning : A case study", **Mathematical and Computer Modelling** 12, 1401-1410.

1. Choix d'un tracé autoroutier entre deux villes, environnement, transport, France.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Méthode UTA avec évaluations distributionnelles.
4. P.γ. Comparaison de tracés autoroutiers.

SISKOS Y., DESPOTIS D.K., GHEDIRI M. (1993) : "Multiobjective modelling for regional agricultural planning : Case study in Tunisia", **European Journal of Operational Research** (à paraître).

1. Agriculture, gestion agricole, planification régionale, Tunisie.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Programmation linéaire multiobjectif, méthode en trois phases, logiciel ADELAIS (Siskos et Despotis, 1989).
4. P.α.

SISKOS J., HUBERT Ph. (1983) : "Multi-criteria analysis of the impacts of energy alternatives : A survey and a new comparative approach", **European Journal of Operational Research** 13, 278-299.

1. Energie, choix d'un type d'énergie pour produire de l'électricité, France.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Variantes d'ELECTRE III.
4. P.γ. Comparaison de stratégies de développement énergétique.
5. Proposition :
 - d'une variante de la procédure de construction du surclassement d'ELECTRE III permettant de traiter des performances floues ;
 - d'une variante de la procédure d'exploitation d'ELECTRE III.

SISKOS J., LOCHARD J., LOMBARD J. (1984) : "A multicriteria decision-making methodology under fuzziness : Application to the evaluation of radiological protection in nuclear power plants", in Zimmermann H.J., Zadeh L.A., Gaines B.R. (eds.), **Decision Analysis and Fuzzy Sets**, TIMS/Studies in the Management Sciences 20, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 261-283.

1. Energie nucléaire, choix de mesures de protection contre les radiations dans les centrales, France.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. Variante d'ELECTRE III spécialement conçue pour la problématique P.α.
4. P.α. Comparaison de systèmes de protection radiologique.

Voir aussi Lochard J., Siskos J. (1983) : "La gestion des risques environnementaux d'origine industrielle", in Jacquet-Lagrèze E., Siskos J. (textes rassemblés par), **Méthodes de décision multicritère**, Editions Hommes et Techniques, 67-90.

SISKOS J., LOMBARD J., OUDIZ A. (1986) : "The use of multicriteria outranking methods in the comparison of control options against a chemical pollutant", **Journal of the Operational Research Society** 37, 357-371.

1. Environnement, contrôle de la pollution chimique, France.
2. Chapitres 5 et 6 (PAMC de type II).
3. ELECTRE III.
4. P.γ.

STAM A., KUULA M., CESAR H. (1992) : "Transboundary air pollution in Europe : An interactive multicriteria tradeoff analysis", **European Journal of Operational Research** 56, 263-277.

1. Environnement, pollution atmosphérique, pluie acide, Europe.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. SIAD utilisant le logiciel d'optimisation multiobjectif non linéaire DIDAS-N (cf. Lewandowski et al., 1985) fondé sur la méthode du point de référence (Wierzbicki, 1982).
4. P.α.

STEUER R.E. (1984) : "Sausage blending using multiple objective linear programming", **Management Science** 30, 1376-1384.

1. Industrie alimentaire, problème de mélange, saucisses de Francfort.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Programmation linéaire multiobjectif avec techniques de filtrage (Steuer (1982), Steuer et Harris (1980)).
4. P.α.

STEWART T.J. (1988) : "Experience with prototype multicriteria decision support systems for pelagic fish quota determination", *Naval Research Logistics* 35, 719-731.

1. Ecologie, gestion des ressources naturelles, détermination des quota de pêche en haute mer, Province du Cap, Afrique-du-Sud.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Etude comparative de STEM, du goal programming séquentiel interactif introduit par Masud et Hwang (1981) et du goal programming interactif de Spronk (1981).
4. P.α.
5. Développement de SIAD prototypes pour implémenter chacune des méthodes. C'est la méthode de Spronk qui s'est révélée la plus utile dans ce contexte et qui a semblé faciliter l'obtention d'un consensus entre groupes d'intérêts différents.

SUTCLIFFE C., BOARD J., CHESHIRE P. (1984) : "Goal programing and allocation children to secondary school in Reading", *Journal of the Operational Research Society* 35, 719-730.

1. Education, découpage scolaire, Royaume-Uni.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Goal programming.
4. P.α.

TANNER L. (1991) : "Selecting a text-processing system as a qualitative multiple criteria problem", *European Journal of Operational Research* 50, 179-187.

1. Organisme public, association des villes finlandaises, sélection d'un système de traitement de texte.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. Méthode de Korhonen (1986).
4. P.γ.

TECLE A., FOGEL M.M., DUCKSTEIN L. (1988) : "Multicriterion analysis of forest watershed management alternatives", *Water Resources Bulletin* 24, 1169-1178.

1. Hydrologie, gestion forestière, Arizona, Etats-Unis.
2. Chapitres 4, 5 et 6 (PAMC de types I et II).
3. ELECTRE I et II, compromise programming (Zeleny, 1973, 1974, 1982).
4. P.α et P.γ.

VALADARES TAVARES L. (1986) : "Multicriteria scheduling of a railway renewal program", **European Journal of Operational Research** 25, 395-405.

1. Gestion projet, transport ferroviaire, renouvellement infrastructure, Portugal.
2. Chapitre 5 (compensation probante) (PAMC de type II).
3. Méthode TRIDENT (Tavares (1984)).
4. P.γ.

VANSNICK J.C. (1989) : "Application of multicriteria decision-aid to allocating budget for building repairs and maintenance", in Mario T. Tabucanon and Vira Chankong (ed.), **Multiple Criteria Decision Making : Applications in Industry and Service**, Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand, 629-642.

1. Secteur public, entretien et réfection d'un parc de logements pour des militaires de carrière, Belgique.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Agrégation additive (cas d'une mesure).
4. P.γ.
5. Technique originale d'obtention des fonctions d'utilité partielles.

VASKO F.J., WOLF F.E., McNAMARA J.A. (1989) : "A multiple-criteria approach to dynamic cold-ingot substitution", **Journal of the Operational Research Society** 40, 361-366.

1. Gestion de la production, aciérie.
2. Chapitre 4 (PAMC de type I).
3. Analyse hiérarchique de Saaty (AHP).
4. P.γ.
5. Complexité des actions. Aspects dynamiques.

P. VERDEIL, HERVÉ C., ROY B., HUGUENARD P. (1987) : "Régulation médicale - Analyse des critères composant la fonction", **Convergences Médicales**, 372-376.

1. Santé, régulation aide médicale d'urgence, France.
2. Chapitres 1, 2 et 3.
5. Modélisation du processus de décision d'un médecin régulateur d'un service d'urgences médicales. Analyse des conséquences des actions mises en œuvre et construction d'une famille de critères adaptée.

Voir aussi Verdeil P. (1986) : **Un décideur : Le médecin régulateur du SAMU 94**, Université de Paris-Dauphine, LAMSADE, Mémoire de DEA.

ZOPOUNIDIS C. (1987) : "A multicriteria decision-making methodology for the evaluation of the risk of failure and an application", **Foundations of Control Engineering** 12, 45-64.

1. Finance, risque de défaillance, financement d'entreprises, France.
2. Chapitre 7 (méthode interactive).
3. MINORA : méthode UTA (Jacquet-Lagrèze et Siskos, 1982 ; Siskos et Yannacopoulos, 1985) en mode interactif.
4. P.γ.
5. La nouvelle méthodologie développée pour évaluer le risque de défaillance des entreprises permet au décideur financier, à travers un processus continu d'apprentissage et de recherche d'information, de mieux connaître les entreprises à financer.

RÉFÉRENCES

Achilles A., Elster K.H., Nehse R. (1979) : "Bibliographie zur Vektoroptimierung (Theorie und Anwendungen)", **Mathematische Operationsforschung und Statistik** 10, 277-321.

Adams E.W. (1965) : "Elements of a theory of inexact measurement", **Philosophy of Science** 32, 205-228.

Aizerman M.A. (1985) : "New problems in the general choice theory : review of research trend", **Social Choice and Welfare** 2, 235-282.

Aizerman M.A., A.V. Malihevski A.V. (1981) : "General theory of best variant choice : some aspects", **IEEE Transactions on Automatic Control** 26, 1030-1041.

Allais M. (1953) : "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine", **Econometrica** 21, 503-546.

Allais M. (1979) : "The so-called Allais Paradox and rational decisions under uncertainty", in Allais M. and Hagen O. (eds.), **Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 437-681.

Allais M. (1986) : "The general theory of random choices in relation to the invariant cardinal utility function and the specific probability function", in B. Munier (ed.), **Risk, Decision and Rationality**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 231-289.

Allais M., Hagen O. (eds.) (1979) : **Expected utility hypotheses and the Allais Paradox**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Ancot J.P. (1988) : **Micro-Qualiflex, an interactive software package for the determination and analysis of the optimal solution to decision problems**, Kluwer Academic Publishers Group.

Arrow K.J. (1963) : **Social choice and individual values**, 2nd edition, John Wiley and Sons, New-York.

Arrow K.J., Raynaud H. (1986) : **Social choice and multicriterion decision making**, MIT Press, Cambridge, Mass.

Atkin R. (1974) : **Mathematical structure in human affairs**, Heineman, London.

Bana e Costa C.A. (1986) : "A multicriteria decision aid methodology to deal with conflicting situations on the weights", **European Journal of Operational Research** 26, 22-34.

Bana e Costa C.A. (1989) : "Une méthode pour l'aide à la décision en situations multicritères et multiacteurs", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 59, 66 p.

Bana e Costa C.A. (ed.) (1990) : **Readings in multiple criteria decision aid**, Springer-Verlag.

Bana e Costa C.A. (à paraître) : "Les problématiques dans le cadre de l'activité d'aide à la décision", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE**.

Bana e Costa C.A., Dinis das Neves C. (à paraître) : "Describing and formalizing the evaluation process of Portuguese navy officers", **Interfaces**, Special Issue on Military Applications of Operations Research and Management Science.

Bana e Costa C.A., Vincke Ph. (1988) : "Quelques questions sur la prise en compte de l'imprécision des coefficients d'importance des critères", **Communication aux 27e Journées du Groupe de Travail Européen "Aide Multicritère à la Décision"**, Mons, Belgique.

Bana e Costa C.A., Vincke Ph. (1992) : "Indices de crédibilité construits sur la base de taux de substitution imprécis", Document de Travail, Université Libre de Bruxelles, Belgique.

Bana e Costa C.A., Vincke Ph. (à paraître) : "Comment prendre en compte l'imprécision des taux de substitution dans un modèle additif d'agrégation des préférences", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE**.

Banks J.S. (1985) : "Sophisticated voting outcomes and agenda control", **Social Choice and Welfare** 4, 295-306.

Barbier M. (1971) : "Essai de rationalisation du choix des investissements de transport pour le VIe Plan en Région Parisienne", **Cahiers de l'IAURP** 25.

Baron F.H., Von Winterfeld D., Fischer G.W. (1984) : "Empirical and theoretical relationships between value and utility functions", *Acta Psychologica* 56, 233-244.

Barrett C.R. (1987) : "Fuzzy preferences and choice. A progress report", *Fuzzy Sets and Systems* 21, 127-129.

Barrett C.R., Pattanaik P.K. (1985) : "On vague preferences", in G. Enderl (ed.), *Ethik und Wirtschaftswissenschaft*, Berlin, Duncker & Humblot.

Barrett C.R., Pattanaik P.K. (1989) : "Fuzzy sets, preference and choice : some conceptual issues", *Bulletin of Economic Research* 41, 229-253.

Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. (1986) : "On the structure of fuzzy social welfare functions", *Fuzzy Sets and Systems* 19, 1-10.

Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. (1990a) : "Aggregation of fuzzy preferences", in *Multiperson Decision Making using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.), 155-162.

Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. (1990b) : "On choosing rationally when preferences are fuzzy", *Fuzzy Sets and Systems* 34, 197-212.

Barrett C.R., Pattanaik P.K., Salles M. (1992) : "Rationality and aggregation in an ordinal fuzzy framework", *Fuzzy Sets and Systems* 49, 9-14.

Barthélémy J.P. (1979) : "Caractérisations axiomatiques de la distance de la différence symétrique entre relations binaires", *Mathématiques et Sciences Humaines* 17, 85-113.

Barthélémy J.P., Guénoche A., Hudry O. (1989) : "Median linear orders : Heuristics and a branch and bound algorithm", *European Journal of Operational Research* 42, 313-325.

Barthélémy J.P., Monjardet B. (1988) : "The median procedure in data analysis : new results and open problems", in *Classification and Related Methods of Data Analysis*, HH Bock Editor, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 309-316.

Basu K., Deb R., Pattanaik P.K. (1992) : "Soft sets : an ordinal formulation of vagueness with some applications to the theory of choice", *Fuzzy Sets and Systems* 45, 45-58.

Bateson G. (1977) : *Vers une écologie de l'esprit* (Tome 1), Seuil (édition française).

Belenson S.H., Kapur K.C. (1973) : "An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples", **Operational Research Quarterly** 24, 65-77.

Bell D.E., Keeney R.L., Raiffa H. (eds.) (1977) : **Conflicting objectives in decision**, IIASA, Laxenburg and Wiley.

Belton V., Gear T. (1983) : "On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies", **Omega** 11, 228-230.

Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J., Larichev O. (1971) : "Linear programming with multiple objective functions : STEP Method (STEM)", **Mathematical Programming** 1, 366-375.

Berhaut H. (1981) : **Modélisation des préférences recueillies par paires d'attributs**, Thèse de 3e cycle, Université de Paris-Dauphine.

Bertier P., Gagey D., de Montgolfier J., Roy B. (1972) : "Choix de tracés autoroutiers en milieu suburbain : faut-il vraiment endommager des sites urbains et/ou forestiers, lesquels?", **Communication aux Journées de Formation "Transports et Agglomérations"**, Nice.

Billot A. (1991) : "Aggregation of preferences : The fuzzy case", **Theory and Decision** 30, 51-93.

Blair D.H., Pollak R.A. (1979) : "Collective rationality and dictatorship : The scope of the Arrow theorem", **Journal of Economic Theory** 21, 186-194.

Blair D.H., Pollak R.A. (1982) : "Acyclic collective choice rules", **Econometrica** 50, 931-943.

Blair D.H., Pollak R.A. (1983) : "Polychromatic acyclic tours in coloured multigraphs", **Mathematics of Operations Research** 8, 471-476.

Blau J.H. (1979) : "Semiorders and collective choice", **Journal of Economic Theory** 21, 195-206.

Blau J.H., Deb R. (1977) : "Social decision functions and veto", **Econometrica** 45, 871-879.

Bordes G. (1983) : "On the possibility of reasonable consistent majoritarian choice : Some positive results", **Journal of Economic Theory** 31, 122-132.

Bouyaux P. (1990) : "Préférences et rationalité stochastiques", **Mathématique, Informatique et Sciences Humaines** 28, 17-40.

- Bouyssou D. (1984) : "Decision-aid and expected utility theory : A critical survey", in O. Hagen and F. Wenstøp (eds.), **Progress in Utility and Risk Theory**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 181-216.
- Bouyssou D. (1986) : Some remarks on the notion of compensation in MCDM", **European Journal of Operational Research** 26, 150-160.
- Bouyssou D. (1989) : "Modelling inaccurate determination, uncertainty, imprecision using multiple criteria", in A.G. Lockett, G. Islei (eds.), **Improving Decision Making in Organisations**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 335, Springer-Verlag, 78-87.
- Bouyssou D. (1990) : "Building criteria : A prerequisite for MCDA", in C.A. Bana e Costa (ed.), **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 58-80.
- Bouyssou D. (1991) : "A note on the 'Min in favor' ranking method for valued preference relations", DR 91019, CERESSEC, Cergy, France, 8 p.
- Bouyssou D. (1992a) : "Les relations de surclassement ont-elles des propriétés remarquables ?", Document de Travail, 32 p.
- Bouyssou D. (1992b) : "On some properties of outranking relations based on a concordance-discordance principle", in A. Goicoechea, L. Duckstein, S. Zions (eds.), **Multiple Criteria Decision Making**, Springer-Verlag, 93-106.
- Bouyssou D. (1992c) : "A note on the sum of differences choice function for fuzzy preference relations", **Fuzzy Sets and Systems** 47, 197-202.
- Bouyssou D. (1992d) : "Ranking methods based on valued preference relations : A characterization of the net flow network", **European Journal of Operational Research** 60, 61-67.
- Bouyssou D., Perny P. (1992) : "Ranking method for valued preference relations : A characterization of a method based on leaving and entering flows", **European Journal of Operational Research** 61, 186-194.
- Bouyssou D., Roy B. (1987) : "La notion de seuils de discrimination en analyse multicritère", **INFOR** 25, 302-313.
- Bouyssou D., Vansnick J.C. (1986) : "Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures", **Theory and Decision** 21, 251-266.
- Bouyssou D., Vansnick J.C. (1988) : "A note on the relationships between utility and value function", in B. Munier (ed.), **Risk, Decision and Rationality**, D. Reidel Publishing Company, 103-114.

Bouyssou D., Vansnick J.C. (1990) : "'Utilité cardinale' dans le certain et choix dans le risque", **Revue Economique** 41, 979-1000.

Brans J.P., Mareschal B., Vincke Ph. (1984) : "PROMETHEE : A new family of outranking methods in multicriteria analysis", in J.P. Brans (ed.), **Operational Research '84**, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 408-421.

Bui T.X. (1987) : **Co-oP - A group decision support system for cooperative multiple criteria group decision making**, in G. Gos and J. Hartmanis (eds.), **Lecture Notes in Computer Science** 290, Springer-Verlag.

Camacho A. (1982) : **Societies and social decision functions**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Charnes A., Cooper W.W. (1977) : "Goal programming and multiple objective optimization", **European Journal of Operational Research** 1, 39-54.

Climaco J. (1992) : "A discussion about ELECTRE family methods potentialities based on an interactive decision support package", **Communication EURO XII/TIMS XXXI International Conference "Operational Research/Management Science"**, Helsinki, Finland.

Cohen K.J., Thore S. (1970) : "Programming bank portfolios under uncertainty", **Journal of Bank Research** 1, 42-61.

Cohon J.L. (1978) : **Multiobjective programming and planning**, Academic Press, New York.

Cohon J.L., Marks D.H. (1975) : "A review and evaluation of multiobjective solution techniques", **Water Resources Research** 11, 208-220.

Colson G., Zeleny M. (1980) : "Multicriterion concept of risk under incomplete information", **Computers and Operations Research** 7, 125-143.

Copeland A.H. (1951) : "A 'reasonable' social welfare function", **Document de Travail**, University of Michigan, Seminar on Applications of Mathematics to the Social Sciences.

D'Avignon G., Vincke Ph. (1988) : "An outranking method under uncertainty", **European Journal of Operational Research** 36, 311-321.

Debreu G. (1960) : "Topological methods in cardinal utility", in K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.), **Mathematical Methods in the Social Sciences**, Stanford University Press, 16-26.

- Dekel E. (1986) : "An axiomatic characterization of preference under uncertainty : weakening the independence axiom", **Journal of Economic Theory** 40, 304-318.
- Despotis D.K., Yannacopoulos D. (1989) : "Méthode d'estimation d'utilités additives concaves en programmation linéaire multiobjectifs", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 94, 26 p.
- Diday E., Lemaire P., Pouget J., Testu F. (1982) : **Eléments d'analyse de données**, Dunod, Paris.
- Doignon J.P., Monjardet B., Roubens M., Vincke Ph. (1988) : "Biorder families, valued relations and preference modelling", **Journal of Mathematical Psychology** 30, 435-480.
- Dubois D., Prade H. (1980) : **Fuzzy sets and systems : Theory and applications**, Academic Press, New York.
- Dupuy J.P. (1982) : **Ordre et désordre - Enquête sur le nouveau paradigme**, Seuil, Paris.
- Dutta B. (1987) : "Fuzzy preferences and social choice", **Mathematical Social Sciences** 13, 215-219.
- Dutta B. (1988) : "Covering sets and a new Condorcet choice correspondence", **Journal of Economic Theory** 44, 63-80.
- Dutta B. (1990) : "On the tournament equilibrium set", **Social Choice and Welfare** 7, 381-383.
- Dutta B., Panda S., Pattanaik P.K. (1986) : "Exact choice and fuzzy preferences", **Mathematical Social Sciences** 11, 53-68.
- Dyer J.S. (1973) : "A time-sharing computer program for the solution of the multiple criteria problem", **Management Science** 19, 1379-1383.
- Dyer J.S. (1990) : "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", **Management Science** 36, 249-258.
- Dyer J.S., Sarin R.K. (1979a) : "Group Preference Aggregation Rules Based on Strength of Preference", **Management Science** 25, 822-831.
- Dyer J.S., Sarin R.K. (1979b) : "Measurable multiattribute value functions", **Operations Research** 27, 810-822.

- Eckenrode R.T. (1965) : "Weighting multiple criteria", **Management Science** 12, 180-192.
- Edwards W. (1977) : "The use of multiattribute utility measurement for social decision making", in D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa (eds.), **Conflicting Objectives in Decision**, Wiley, Chichester, 247-276.
- Edwards W., Newman J.R. (1982) : **Multiattribute evaluation**, Sage, Beverly Hills, CA.
- Faivre J.P., Pioche A. (1976) : "L'analyse des décisions d'achat par le modèle trade-off", **Revue Française de Marketing** 64-65, 171-203.
- Farquhar P.H. (1975) : "A fractional hypercube decomposition theorem for multiattribute utility functions", **Operations Research** 23, 941-967.
- Farquhar P.H. (1980) : "Advances in multiattribute utility theory", **Theory and Decision** 12, 381-394.
- Farquhar P.H. (1983) : "Research directions in multiattribute utility analysis", in P. Hansen (ed.), **Essays and Survey on MCDM**, Springer-Verlag, 63-85.
- Farquhar P.H. (1984) : "Utility assessment methods", **Management Science** 30, 1283-1300.
- Farquhar P.H., Fishburn P.C. (1981) : "Equivalences and continuity in multivalent preference structures", **Operations Research** 29, 282-293.
- Farquhar P.H., Fishburn P.C. (1983) : "Indifference spanning analysis", in B. Stigum, F. Wenstøp (eds.), **Foundations of Utility and Risk Theory**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 443-459.
- Fichefet J. (1982) : "Une méthode multicritère hiérarchique tenant compte d'une information incomplète sur l'importance des critères : la méthode HERMES", in *Actes du Colloque Statistique et Analyse des Données*, Pointe-à-Pitre, Guadeloupe, 13-18 décembre, INRIA, Le Chesnay, France.
- Fishburn P.C. (1967) : "Methods for estimating additive utilities", **Management Science** 13, 435-453.
- Fishburn P.C. (1970a) : **Utility theory for decision-making**, John Wiley and Sons, New-York.
- Fishburn P.C. (1970b) : "Intransitive indifference in preference theory : A survey", **Operations Research** 18, 207-228.

Fishburn P.C. (1974) : "Lexicographic orders, utilities and decision rules : A survey", **Management Science** 20, 1442-1471.

Fishburn P.C. (1975) : "Axioms for lexicographic preferences", **Review of Economic Studies** 42, 415-419.

Fishburn P.C. (1976) : "Non-compensatory preferences", **Synthese** 33, 393-403.

Fishburn P.C. (1977a) : "Condorcet social choice functions", **SIAM Journal on Applied Mathematics** 33, 469-489.

Fishburn P.C. (1977b) : "Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns", **American Economic Review** 67, 116-126.

Fishburn P.C. (1977c) : "Multiattribute utilities in expected utility theory", in D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa (eds.), **Conflicting Objectives in Decisions**, Wiley, New-York, 172-194.

Fishburn P.C. (1978) : "A survey of multiattribute/multicriteria evaluation theories", in S. Zionts (ed.), **Multicriteria Problem Solving**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 155, Springer-Verlag, 181-224.

Fishburn P.C. (1982) : "Nontransitive measurable utility", **Journal of Mathematical Psychology** 26, 31-67.

Fishburn P.C. (1983) : "Transitive measurable utility", **Journal of Economic Theory** 31, 293-317.

Fishburn P.C. (1987) : **Interprofile conditions and impossibility**, Harwood Academic Publishers, Chur.

Fishburn P.C. (1988) : **Nonlinear preference and utility theory**, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Fishburn P.C. (1990a) : "Continuous nontransitive additive conjoint measurement", **Mathematical Social Sciences** 20, 165-193.

Fishburn P.C. (1990b) : "Multiperson decision making : A selective review", in **Multiperson Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory**, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.), Kluwer Academic Publishers, 143-154.

Fishburn P.C. (1991) : "Nontransitive additive conjoint measurement", **Journal of Mathematical Psychology** 35, 1-40.

Fishburn P.C. (1992a) : "Additive differences and simple preference comparisons", **Journal of Mathematical Psychology** 36, 21-31.

Fishburn P.C. (1992b) : "Induced binary probabilities and the linear ordering polytope : a status report", **Mathematical Social Science** 23, 67-80.

Fodor J. (1991) : "Strict preference relations based on weak t-norms", **Fuzzy Sets and Systems** 43, 327-336.

Fodor J., Roubens M. (1992) : "Fuzzy preference modelling : an overview", Document de Travail, Université de Liège.

Fodor J., Roubens M. (1993) : **Aggregation, ranking and choice procedures with applications to multiple criteria decision making methods dealing with valued binary relations**, Kluwer.

Frank M., Wolfe P. (1956) : "An algorithm for quadratic programming", **Naval Research Logistics Quarterly** 3, 95-110.

French S. (1986) : **Decision theory : An introduction to the mathematics of rationality**, Ellis Horwood, Chichester.

Fryback D.G., Keeney R.L. (1983) : "Constructing a complex judgmental model : an index of trauma severity", **Management Science** 29, 869-883.

Gabrel V. (1990) : **Expérimentations sur la non-indépendance vis-à-vis des tierces alternatives et la non-monotonie des méthodes ELECTRE III et IV**, Université de Paris-Dauphine, Mémoire de DEA 103.

Gargaillo L. (1982) : Réponse à l'article "Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type de l'analyse multicritère", **Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports** 7, 52-57.

Geoffrion A.M., Dyer J.S., Feinberg A. (1972) : "An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department", **Management Science** 19, 357-368.

Gibbard A. (1969) : "Intransitive social indifference and the Arrow dilemma", Document de Travail.

Gomes L.F.A.M. (1989) : "Multicriteria ranking of urban transportation system alternatives", **Journal of Advanced Transportation** 23, 43-52.

Gorman W.M. (1968) : "The structure of utility functions", **Review of Economic Studies** XXXV, 367-390.

Grabe W. (1978) : "Choix d'un moyen de transport urbain", *UTTP Revue* 3, 205-210.

Grassin N. (1986) : **Aide à la décision pour le choix des lignes à très haute tension**, Thèse de 3e Cycle, Université de Paris-Dauphine.

Groussaud G., Le Galès C. (1980) : **Représentation des préférences dans un contexte multicritère à l'aide de relations de surclassement emboîtées**, Université de Paris-Dauphine, Mémoire de DEA 103.

Hagen O., Wenstøp F. (eds.) (1984) : **Progress in utility and risk theory**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Harsanyi J.C. (1955) : "Cardinal welfare, individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility", *Journal of Political Economy* 63, 309-321.

Henriet D. (1985) : "The Copeland choice function - An axiomatic characterization", *Social Choice and Welfare* 2, 49-64.

Hershey J.C., Kunreuther H., Schoemaker P. (1980) : "Risk taking and problem context in the domain of losses : An expected utility analysis", *Journal of Risk and Insurance* 47, 111-132.

Hudry O. (1989) : **Recherche d'ordres médians : complexité, algorithmique et problèmes combinatoires**, Thèse, ENST, Paris.

Hwang C.L., Masud A.S. (1979) : **Multiple objective decision making - Methods and Applications**, Springer-Verlag, Berlin.

Ignizio J.P. (1978) : "A review of goal programming : A tool for multiobjective analysis", *Journal of the Operational Research Society* 29, 1109-1119.

Jacquet-Lagrèze E. (1978) : "De la logique d'agrégation de critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements", Université de Paris-Dauphine, *Cahier du LAMSADE* 18, 26 p.

Jacquet-Lagrèze E. (1981) : **Systèmes de décision et acteurs multiples - Contribution à une théorie de l'action pour les sciences des organisations**, Thèse d'Etat, Université de Paris-Dauphine.

Jacquet-Lagrèze E. (1983) : "PREFCALC, évaluation et décision multicritère", *EURO-DÉCISION*.

Jacquet-Lagrèze E. (1990) : "Interactive assessment of preferences using holistic judgements : The PREFCALC system", in C.A. Bana e Costa (ed.) : **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 336-350.

Jacquet-Lagrèze E., Meziani R., Slowinski R. (1987) : "MOLP with an interactive assessment of a piecewise linear utility function", **European Journal of Operational Research** 3, 350-357.

Jacquet-Lagrèze E., Shakun M. (1984) : "Decision support systems for semi-structured buying decisions", **European Journal of Operational Research** 16, 48-58.

Jacquet-Lagrèze E., Siskos J. (1982) : "Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making : The UTA method", **European Journal of Operational Research** 10, 151-164.

Jaffray J.Y. (1974) : "On the extension of additive utilities to infinite sets", **Journal of Mathematical Psychology** 11, 431-452.

Jaffray J.Y. (1988) : "Choice under risk and the security factor : an axiomatic model", **Theory and Decision** 24, 169-200.

Jaffray J.Y. (1989) : "Some experimental findings on decision making under risk and their implications", **European Journal of Operational Research** 38, 301-306.

Jaffray J.Y., Cohen M. (1982) : "Experimental results on decision making under uncertainty", **Methods of Operations Research** 44, 276-289.

Jain N. (1990) : "Transitivity of fuzzy relations and rational choice", **Annals of Operations Research** 23, 265-278.

Johnson E.J., Schkade D.A. (1989) : "Bias in utility assessments : further evidence and explanations", **Management Science** 35, 406-424.

Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (1981) : **Judgement under uncertainty - Heuristics and biases**, Cambridge University Press.

Kahneman D., Tversky A. (1979) : "Prospect theory : An analysis of decisions under risk", **Econometrica** 47, 263-291.

Keeney R.L. (1974) : "Multiplicative utility functions", **Operations Research** 22, 22-34.

Keeney R.L. (1977) : "The art of assessing multiattribute utility function", **Organizational Behaviour and Human Performance** 19, 267-310.

Keeney R.L. (1980) : **Siting energy facilities**, Academic Press.

- Keeney R.L. (1981) : "Measurement scales for quantifying attributes", **Behavioral Science** 26, 29-36.
- Keeney R.L. (1982) : "Decision analysis : An overview", **Operations Research** 30, 805-838.
- Keeney R.L. (1988) : "Structuring objectives for problems of public interest", **Operations Research** 36, 396-405.
- Keeney R.L., Nair K. (1976) : "Evaluating potential nuclear power plant sites in the Pacific Northwest using decision analysis", **IIASA Professional Paper** 76-1.
- Keeney R.L., Raiffa H. (1976) : **Decisions with multiple objectives - Preferences and value tradeoffs**, John Wiley and Sons, New-York.
- Keeney R.L., Robillard G.A. (1977) : "Assessing and evaluating environmental impacts at proposed nuclear power plant sites", **Journal of Environmental Economics and Management** 4, 153-166.
- Keitel H.P. (1975) : "Anwendung der Nutzwertanalyse in der U-Bahn-Planung", **Nehverkehrs-Praxis** 6, 255-257.
- Kelly J.S. (1978) : **Arrow impossibility theorems**, Academic Press, New-York.
- Kelly J.S. (1991) : "Social choice bibliography", **Social Choice and Welfare** 8, 97-169.
- Kelsey D. (1984a) : "Acyclic choice without the Pareto principle", **Review of Economic Studies** 4, 693-699.
- Kelsey D. (1984b) : "The structure of social decision functions", **Social Choice and Welfare** 1, 245-250.
- Kelsey D. (1985) : "Acyclic choice and group veto", **Social Choice and Welfare** 2, 131-137.
- Kim J.B. (1983) : "Fuzzy rational choice functions", **Fuzzy Sets and Systems** 10, 37-43.
- Kirkwood C.W., Sarin R.K. (1985) : "Ranking with partial information", **Operations Research** 33, 38-48.
- Kiss L., Martel J.M., Nadeau R. (1992) : "ELECCALC - A DSS for modeling decision maker's preferences", Document de Travail, Université Laval, Québec.

Kitainik L.M. (1990) : "Decisions procedures with fuzzy binary relations", **BUSEFAL** 42, 105-123.

Kitainik L.M. (1992) : **Fuzzy decision procedures with binary relations, theory and applications**, Kluwer.

Korhonen P. (1986) : "A hierarchical interactive method for ranking alternatives with multiple qualitative criteria", **European Journal of Operational Research** 24, 265-276.

Korhonen P., Laakso J. (1986) : "A visual interactive method for solving the multiple criteria problems", **European Journal of Operational Research** 24, 277-287.

Korhonen P., Soismaa M. (1981) : "An interactive multiple criteria to ranking alternatives", **Journal of the Operational Research Society** 33, 577-582.

Krantz D.H. (1967) : "Extensive measurement in semiorders", **Philosophy of Science** 34, 348-362.

Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. (1971) : **Foundations of measurement, Volume 1 : Additive and polynomial representation**, Academic Press Inc., New-York.

Laffond G., Laslier J.F., Le Breton M. (1991) : "Choosing from a tournament : a progress report and some new results", Document de Travail, CNAM, Paris.

Le Boulanger H., Roy B. (1968) : "L'entreprise face à la sélection et à l'orientation des projets de recherche : La méthodologie en usage dans le Groupe SEMA", **Revue METRA** VII, 641-669.

Leclerc B. (1984) : "Efficient and binary consensus functions on transitively valued relations", **Mathematical Social Sciences** 8, 45-61.

Leclercq J.P. (1984) : "Propositions d'extension de la notion de dominance en présence de relations d'ordre sur les pseudo-critères : MELCHIOR", **Revue Belge de Recherche Opérationnelle, de Statistique et d'Informatique** 24, 32-46.

Le Moigne J.L. (1983) : "L'auto-organisation des systèmes de décision", in B. Roy (sous la direction de), **La décision : ses disciplines, ses acteurs**, Presses Universitaires de Lyon, 141-160.

Lévine P., Pomerol J.Ch. (1986) : "PRIAM, an interactive program for choosing among multiple attribute alternatives", **European Journal of Operational Research** 25, 272-280.

- Lewandowski A., Kreglewski T., Rogowski T. (1985) : "DIDAS-NL - a nonlinear version of the DIDAS system", in A. Lewandowski and A. Wierzbicki (eds.), **Software, Theory and Testing Examples in Decision Support Systems**, Wiley, 128-141.
- Lichtenstein S., Slovic P. (1971) : "Reversals of preference between bids and choice in gambling decision", **Journal of Experimental Psychology** 88, 46-55.
- Loomes G. (1988) : "Different experimental procedures for obtaining valuations of risky actions : implications for utility theory", **Theory and Decision** 25, 1-23.
- Lootsma F.A. (1987) : "Modélisation du jugement humain dans l'analyse multicritère au moyen de comparaisons par paires", **RAIRO Recherche Opérationnelle** 21, 241-257.
- Lootsma F.A. (1988) : "Numerical scaling of human judgement in pairwise comparison methods for fuzzy multicriteria decision analysis", in G. Mitra (ed.), **Mathematical Models for Decision Support**, Springer, Berlin, 57-88.
- Luce R.D. (1973) : "Three axiom systems for additive semiordered structures", **SIAM Journal on Applied Mathematics** 25, 41-53.
- Machina M.J. (1982) : "Expected utility without the independence axiom", **Econometrica** 50, 277-323.
- Machina M.J. (1988) : "Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty", Discussion Paper 88-49, University of California, San Diego.
- Macquin A. (1980) : **La régression qualitative avec variables ordinales, problèmes méthodologiques et applications**, Thèse de 3e Cycle, Université de Paris-Dauphine.
- Mareschal B. (1988) : "Weights stability intervals in multicriteria decision aid", **European Journal of Operational Research** 33, 54-64.
- Mareschal B., Brans J.P. (1988) : "Geometrical representations for MCDA", **European Journal of Operational Research** 34, 69-77.
- Markowitz H. (1959) : **Portfolio selection : Efficient diversification of investments**, Wiley, New York.
- Martel J.M., D'Avignon G.R., Couillard J. (1986) : "A fuzzy outranking relation in multicriteria decision making", **European Journal of Operational Research** 25, 258-271.

Martel J.M., Nadeau R. (1988) : "Revealed preference modeling with ELECTRE II : an interactive approach", **Communication au Congrès EURO IX-TIMS XXVIII**, Paris.

Martel J.M., Zaras K. (1990) : "Dominance stochastique en analyse multicritère face au risque", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 100, 32 p.

Mas-Collell A., Sonnenschein H.F. (1972) : "General possibility theorems for group decisions", **Review of Economic Studies** 39, 185-192.

Massaglia R., Ostanello A. (1991) : "N-TOMIC : A decision support for multicriteria segmentation problems", in P. Korhonen (ed.) : **International Workshop on Multicriteria Decision Support**, Helsinki 7-11, 1989 ; Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 356, Springer-Verlag, 167-174.

Masud A.S., Hwang C.L. (1981) : "Interactive sequential goal programming", **Journal of the Operational Research Society** 32, 391-400.

Matarazzo B. (1986) : "Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons (MAPPAC)", **Applied Mathematics and Computation** 18, 119-141.

Matarazzo B. (1988) : "Preference ranking global frequencies in multicriterion analysis (PRAGMA)", **European Journal of Operational Research** 36, 36-50.

McClelland G., Coombs C.H. (1975) : "ORDMET : A general algorithm for constructing all numerical solutions to ordered metric structures", **Psychometrika** 40, 269-290.

McCord M.R., de Neufville R. (1982) : "Empirical demonstration that expected utility decision analysis is not operational", in B. Stigum and F. Wenstøp (eds.), **Foundations of Utility and Risk Theory**, D. Reidel Publishing Company, 181-199.

McCord M.R., de Neufville R. (1986) : "Lottery equivalents : Reducing the certainty effect problem in utility assessment", **Management Science** 32, 56-60.

McGarvey D.C. (1953) : "A theorem on the construction of voting paradoxes", **Econometrica** 21, 608-610.

Meziani R. (1987) : **Méthodes interactives en optimisation linéaire sur micro-ordinateur - Conception, réalisation et application**, Thèse de 3e Cycle, Université de Paris-Dauphine.

Miller N. (1977) : "Graph theoretical approaches to the theory of voting", **American Journal of Political Science** 21, 769-803.

Miller N. (1980) : "A new solution set for tournaments and majority voting : further graph theoretical approaches to the theory of voting", **American Journal of Political Science** 24, 69-96.

Ministère des Transports (1984), Direction des Transports Terrestres : **TGV-Atlantique : Rapports sur le projet de desserte de l'Ouest et du Sud-Ouest de la France par trains à grande vitesse**, La Documentation Française, Paris, n° 12 436.

Montero F.J., Tejada J. (1986) : "Some problems on the definition of fuzzy preference relation", **Fuzzy Sets and Systems** 20, 45-53.

Montero F.J., Tejada J. (1987) : "Fuzzy preferences in decision making", in B. Bouchon, R.R. Yager (eds.), **Uncertainty in Knowledge-Based Systems**, Springer-Verlag, Berlin, 144-150.

Montgolfier J. de, Bertier P. (1978) : **Approche multicritère des problèmes de décision**, Editions Hommes et Techniques, Paris.

Mood A.M. (1983) : **Introduction to policy analysis**, North-Holland, New York.

Moscarola J. (1977) : **Aide à la décision en présence de critères multiples fondée sur une procédure trichotomique - Méthodologie et application**, Université de Paris-Dauphine, Thèse de 3e Cycle.

Moulin H. (1983) : **The strategy of social choice**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Moulin H. (1985) : "Choice functions over a finite set : a summary", **Social Choice and Welfare** 2, 147-160.

Moulin H. (1986) : "Choosing from a tournament", **Social Choice and Welfare** 3, 271-291.

Mousseau V. (1993) : **Problèmes liés à l'évaluation de l'importance en aide multicritère à la décision : Réflexions théoriques et expérimentations**, Thèse, Université de Paris-Dauphine.

Munier B. (ed.) (1988) : **Risk, decision and rationality**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Munier B. (1989a) : "New models of decisions under uncertainty", **European Journal of Operational Research** 38, 307-317.

Munier B. (1989b) : "Calcul économique et révision de la théorie de la décision en avenir risqué", **Revue d'Economie Politique** 99, 276-306.

Musselman K., Tavalage J. (1980) : "A tradeoff cut approach to multiple objective optimization", **Operations Research** 28, 1424-1435.

Nadeau R, Martel J.M., Kiss L. (1991) : "ELECCALC : Modeling the decision maker's preference with ELECTRE II", in M. Cerny, D. Glúckařova, D. Loula (eds.), **Multicriteria Decision Making : Methods, Algorithms, Applications**, Proceedings of the International Workshop held at Liblice, Czechoslovakia, March 18-22, 109-119.

Nijkamp P., Spronk J. (1981) : **Multicriteria analysis : Operational methods**, Gower, Aldershot.

Nurmi H., Kacprzyk J. (1991) : "On fuzzy tournaments and their solution concepts in group decision making", **European Journal of Operational Research** 51, 223-232.

O'Leary T.J. (1979) : "The cost/benefit analysis : It can be a misleading tool for transportation planners", **Transportation Planning and Methodology** 5, 189-193.

Orlovski S.A. (1978) : "Decision-making with a fuzzy preference relation", **Fuzzy Sets and Systems** 1, 155-167.

Ovchinnikov S.V. (1981) : "Structure of fuzzy binary relations", **Fuzzy Sets and Systems** 1, 155-167.

Ovchinnikov S.V. (1990) : "Modelling valued preference relations", in **Multiperson Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory**, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.), Kluwer Academic Publishers, 143-154.

Ovchinnikov S.V. (1991) : "Social choice and Łukasiewicz logic", **Fuzzy Sets and Systems** 43, 275-289.

Ovchinnikov S.V., Ozernoy V.R. (1988) : "Using fuzzy binary relations for identifying noninferior decision alternatives", **Fuzzy Sets and Systems** 25, 21-32.

Ovchinnikov S.V., Roubens M. (1991) : "On strict preference relations", **Fuzzy Sets and Systems** 43, 319-326.

- Ovchinnikov S.V., Roubens M. (1992) : "On fuzzy strict preference, indifference, and incomparability relations", **Fuzzy Sets and Systems** 49, 15-20.
- Paelinck J. (1978) : "Qualiflex, a flexible multiple criteria method", **Economic Letters** 3, 193-197.
- Parks R.P. (1976) : "An impossibility theorem for fixed preferences : a dictatorial Bergson-Samuelson welfare function", **Review of Economic Studies** 43, 447-450.
- Pasche C. (1987) : "Une approche de l'analyse multicritère par les systèmes experts", **Cahiers du CERO** 1-2, 49-60.
- Pasche C. (1991) : "Extra : an expert system for multicriteria decision making", **European Journal of Operational Research** 52, 224-234.
- Pastijn H., Leysen J. (1989) : "Constructing an outranking relation with ORESTE", **Mathematical and Computer Modelling** 12, 1255-1268.
- Perny P. (1990) : "Construction et exploitation de systèmes relationnels de préférences floues", in **Extended Abstracts of the Third International Conference "Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems"**, Paris, 431-433.
- Perny P. (1992) : **Modélisation, agrégation et exploitation des préférences floues dans une problématique de rangement : Bases axiomatiques, procédures et logiciels**, Thèse, Université de Paris-Dauphine.
- Perny P., Roy B. (1992) : "The use of fuzzy outranking relations in preference modelling", **Fuzzy Sets and Systems** 49, 33-53.
- Petitdemange C. (1985) : **La maîtrise de la valeur**, AFNOR-GESTION.
- Pfanzagl J. (1971) : **Theory of measurement**, Physica Verlag, Würzburg-Wien.
- Pirlot M. (1991) : "Une caractérisation de la procédure Max Min", Document de Travail, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique.
- Pirlot M., Vincke Ph. (1992) : "Lexicographic aggregation of semi-orders", **Journal of Multiple Criteria Decision Analysis** 1, 47-58.
- Plott C.R., Little J.T., Parks R.P. (1975) : "Individual choice when objects have 'ordinal' properties", **Review of Economic Studies** 32, 403-413.
- Pollack R.A. (1979) : "Bergson-Samuelson social welfare function and the theory of social choice", **Quarterly Journal of Economics** 93, 73-90.

Pomerol J.Ch., Trabelsi T. (1987) : "An adaptation of PRIAM to multiobjective linear programming", **European Journal of Operational Research** 31, 335-351.

Pratt J.W. (1964) : "Risk aversion in the small and in the large", **Econometrica** 3, 122-136.

Quiggin J. (1982) : "A theory of anticipated utility", **Journal of Economic Behaviour and Organization** 3, 323-343.

Raiffa H. (1970) : **Decision analysis - Introductory lectures on choices under uncertainty**, Addison-Wesley, Reading (traduction française : Dunod, 1972).

Renard F. (1986) : "Utilisation d'ELECTRE dans l'analyse des réponses à un appel d'offres : Le cas de la machine de tri paquets à la Direction Générale des Postes", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 73, 36 p.

Roberts F.S. (1979) : **Measurement theory with applications to decision making, utility and the social sciences**, Addison-Wesley.

Roberts K. (1980) : "Social choice theory : the single-profile and multi-profile approaches", **Review of Economic Studies** 47, 441-450.

Rochat J.C. (1980) : **Mathématiques pour la gestion de l'environnement**, Birkhäuser, Bâle.

Romedor J.M. (1973) : **Méthodes et programmes d'analyse discriminante**, Dunod, Paris.

Rommel Y. (1989) : **Apport de l'intelligence artificielle à l'aide à la décision multicritère**, Université de Paris-Dauphine, Thèse de Doctorat.

Rosinger E.E. (1981) : "Interactive algorithm for multiobjective optimization", **Journal of Optimization Theory and Applications** 35, 339-365.

Roubens M. (1982) : "Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making", **European Journal of Operational Research** 10, 51-55.

Roubens M. (1989) : "Some properties of choice functions based on valued binary relations", **European Journal of Operational Research** 40, 115-134.

Roubens M., Vincke Ph. (1985) : **Preference Modelling**, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems 250, Springer-Verlag.

Roy B. (1968) : "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)", **RIRO** 8, 57-75.

Roy B. (1969-1970) : **Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales**, Dunod, Paris, 2 tomes.

Roy B. (1973) : "How outranking relations helps multiple criteria decision making", in J.L. Cochrane and M. Zeleny (eds.), **Multiple Criteria Decision Making**, University of South-Carolina Press, 179-201.

Roy B. (1974a) : "Critères multiples et modélisation des préférences (L'apport des relations de surclassement)", **Revue d'Economie Politique** 84, 1-44.

Roy B. (1974b) : "Management scientifique et aide à la décision", SEMA(Metra International), **Rapport de Synthèse n° 86**.

Roy B. (1976) : "From optimization to multicriteria decision aid : Three main operational attitudes", in H. Thiriez and S. Zionts (eds.), **Multiple Criteria Decision Making**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 130, Springer-Verlag, Berlin, 1-34.

Roy B. (1977) : "Partial preference analysis and decision-aid : The fuzzy outranking relation concept", in **Conflicting Objectives in Decisions**, David E. Bell, Ralph L. Keeney and Howard Raiffa (eds.), John Wiley and Sons, 40-75.

Roy B. (1978) : "ELECTRE III : Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples", **Cahiers du CERO** 20, 3-24.

Roy B. (1981) : "A multicriteria analysis for trichotomic segmentation problems", in **Multiple Criteria Analysis : Operational Methods**, Peter Nijkamp and Jaap Spronk (eds.), Gower Press, 245-257.

Roy B. (1985) : **Méthodologie multicritère d'aide à la décision**, Economica, Paris.

Roy B. (1987) : "Meaning and validity of interactive procedures as tools for decision making", **European Journal of Operational Research** 31, 297-303.

Roy B. (1988a) : "Des critères multiples en Recherche Opérationnelle : Pourquoi ?", in **Operational Research '87**, G.K. Rand (ed.), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 829-842.

Roy B. (1988b) : "Main sources of inaccurate determination, uncertainty and imprecision in decision models", in B. Munier and M.F. Shakun (eds.), **Compromise, Negotiation and Group Decision**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 43-62.

Roy B. (1990) : "Decision-aid and decision-making", in C.A. Bana e Costa (ed.), **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 17-35.

Roy B. (1992) : "Science de la décision ou science de l'aide à la décision ?", **Revue Internationale de Systémique** 6, 497-529.

Roy B., Bertier P. (1971) : "La méthode ELECTRE II", SEMA(Metra International), **Note de Travail** 142.

Roy B., Bertier P. (1973) : "La méthode ELECTRE II - Une application au média-planning", in M. Ross (ed.), **OR '72**, North-Holland Publishing Company, 291-302.

Roy B., Bouyssou D. (1983) : "Comparaison, sur un cas précis, de deux modèles concurrents d'aide à la décision", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 22, 109 p.

Roy B., Bouyssou D. (1986) : "Comparison of two decision-aid models applied to a nuclear plant siting example", **European Journal of Operational Research** 25, 200-215.

Roy B., Bouyssou D. (1988) : "Aide à la décision", **AFCET/INTERFACES** 65, 4-13.

Roy B., Hugonnard J.Ch. (1982a) : "Classement des prolongements de métro en banlieue parisienne (Présentation d'une méthode multicritère originale)", **Cahiers du CERO** 23, 153-171.

Roy B., Hugonnard J.Ch. (1982b) : "Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type de l'analyse multicritère", **Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports** 6, 77-108.

Roy B., Hugonnard J.Ch. (1982c) : "Réponse à Monsieur Laurent GARGAILLO", **Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports** 7, 58-64.

Roy B., Hugonnard J.Ch. (1982d) : "Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method", **Transportation Research** 16A, 301-312.

- Roy B., Moscarola J. (1977) : "Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur une segmentation trichotomique en présence de critères multiples", **RAIRO Recherche Opérationnelle** 11, 145-173.
- Roy B., Mousseau V. (à paraître) : "Prise en compte formelle de la notion d'importance des critères en aide multicritère à la décision", **Cahiers du CERO**.
- Roy B., Présent M., Silhol D. (1983) : "Programmation de la rénovation des stations du métro parisien : un cas d'application de la méthode ELECTRE III", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 24, 67 p.
- Roy B., Skalka J.M. (1984) : "ELECTRE IS - Aspects méthodologiques et guide d'utilisation", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE** 30, 125 p.
- Roy B., Slowinski R. (1993) : "Criterion of distance between technical programming and socio-economic priority", **RAIRO Recherche Opérationnelle** 27, 45-60.
- Rubinstein A. (1980) : "Ranking the participants in a tournament", **SIAM Journal of Applied Mathematics** 38, 108-111.
- Saaty T.L. (1980) : **The analytic hierarchy process**, McGraw-Hill, New York.
- Saaty T.L. (1981) : **Decision making for leaders**, Learning, Belmont (traduction française : **Décider face à la complexité**, Entreprise Moderne d'Édition, Paris, 1984).
- Savage L.J. (1954) : **The foundations of statistics**, John Wiley and Sons, New-York.
- Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985) : **Theory of multiobjective optimization**, Academic Press, New York.
- Schärlig A. (1985) : **Décider sur plusieurs critères - Panorama de l'aide à la décision multicritère**, Presses Polytechniques Romandes.
- Schärlig A., Pasche D. (1980) : "La multiplication des ratios : Une méthode multicritère préférable à la somme dans les problèmes de localisation industrielle", Université de Genève, Département d'Economie Commerciale et Industrielle, **Document de Travail** 8006.
- Schmeidler D. (1984) : "Subjective probability and expected utility without additivity", IMA Preprint Series, University of Minnesota.

- Schniederjans M.J. (1984) : **Linear goal programming**, Petrocelli Books, Princeton, NJ.
- Schwartz T. (1972) : "Rationality and the myth of the maximum", *Notûs* 6, 97-117.
- Schwartz T. (1990) : "Cyclic tournaments and cooperative majority voting : A solution", *Social Choice and Welfare* 7, 19-29.
- Scott D. (1964) : "Measurement models and linear inequalities", *Journal of Mathematical Psychology* 1, 233-247.
- Scott D., Suppes P. (1958) : "Foundational aspects of theories of measurement", *Journal of Symbolic Logic* 23, 113-128.
- Sen A.K. (1969) : "Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions", *Review of Economic Studies* 36, 381-393.
- Sen A.K. (1970) : **Collective choice and social welfare**, Holden Day, S.F.
- Sen A.K. (1977) : "On weights and measures : Informational constraints in social welfare analysis", *Economica* 45, 1539-1572.
- Sen A.K. (1979) : "Interpersonal Comparisons of Welfare", in M. Boskin (ed.), **Economics and Human Welfare : Essays in Honour of Tibor Scitovsky**, New York, Academic Press.
- Sen A.K. (1982) : **Choice, welfare and measurement**, Basil Blackwel, Oxford.
- Sen A.K. (1986) : "Social choice theory", in K.J. Arrow and M.D. Intriligator (eds.), **Handbook of Mathematical Economics III**, North-Holland, Amsterdam, 1073-1181.
- Sfez L. (1992) : **Critique de la décision**, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 4e édition entièrement refondue et augmentée (première édition : 1973).
- Simon H. (1955) : "A behavioural model of rational choice", *Quarterly Journal of Economics* 69, 99-118.
- Simpson J.D. (1976) : "Denver Mass Transit Systems : Choice Analysis", **Mass Transit Review**.
- Siskos J. (1983) : "Analyse de systèmes de décision en univers aléatoire", *Foundations of Control Engineering* 8, 193-212.

Siskos J. (1984) : **Systèmes d'évaluation et aide à la décision interactive en présence de critères multiples**, Thèse d'Etat, Université de Paris-Dauphine.

Siskos J., Despotis D.K. (1989) : "A DSS oriented method for multiobjective linear programming problems", **Decision Support System** 5, 47-55.

Siskos J., Hubert Ph. (1983) : "Multicriteria analysis of the impacts of energy alternatives : A survey and a new comparative approach", **European Journal of Operational Research** 13, 278-299.

Siskos J., Wäscher G., Winkels H.M. (1983) : "A bibliography on outranking approaches (1966-1982)", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE** 45, 31 p.

Siskos J., Yannacopoulos D. (1985) : "UTASTAR, an ordinal regression method for building additive value functions", **Investigação Operacional** 5, 39-53.

Slowinski R. (1990) : "'FLIP' : an interactive method for multiobjective linear programming with fuzzy coefficients", in R. Slowinski, J. Teghem (eds.), **Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty**, Kluwer Academic Publishers, 249-262.

Spronk J. (1981) : **Interactive multiple goal programming**, Martinus Nijhoff, The Hague.

Steuer R.E. (1976) : "Multiple objective linear programming with interval criterion weights", **Management Science** 23, 455-462.

Steuer R.E. (1982) : "Operating manual for the ADBASE multiple objective linear programming computer package" (Release : 8/80), College of Business Administration, University of Georgia.

Steuer R.E. (1986) : **Multiple criteria optimization : Theory, computation, and application**, John Wiley and Sons, New York.

Steuer R.E., Choo E.U. (1983) : "An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming", **Mathematical Programming** 26, 326-344.

Steuer R.E., Gardiner L.R. (1990) : "Interactive multiple objective programming : Concepts, current status and future directions", in C.A. Bana e Costa (ed.), **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 413-444.

Steuer R.E., Harris F.W. (1980) : "Intra-set point generation and filtering in decision and criterion space", **Computers and Operations Research** 7, 41-53.

Stigum B.P., Wenstøp F. (eds.) (1983) : **Foundations of utility and risk theory with applications**, Theory and Decision Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Sugeno M. (1977) : "Fuzzy measures and fuzzy integrals - A survey", in M.M. Gupta (ed.), **Fuzzy Automata and Decision Processes**, North-Holland, 89-102.

Suppes P., Krantz D.H., Luce R.D., Tversky A. (1989) : **Foundations of measurement** (Vol. 2), Academic Press, New York.

Suzumura K. (1983) : **Rational choice, collective decisions and social welfare**, Cambridge University Press.

Switalski Z. (1988) : "Choice functions associated with fuzzy preference relations", in J. Kacprzyk and M. Roubens (eds.), **Non-conventional Preference Relations in Decision Making**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 131, Springer-Verlag, Berlin-New York.

Switalski Z. (1990) : "A note on fuzzy rational choice functions", **Fuzzy Sets and Systems** 35, 341-343.

Tassinari R. (1983) : **La maîtrise des coûts**, Les Editions d'Organisation, Paris.

Tavares L.V. (1984) : "The TRIDENT approach to rank alternative tenders for large engineering projects", **Foundations of Control Engineering** 9, 181-191.

Teghem J., Dufrane D., Thauvoye M., Kunsch P. (1986) : "STRANGE : an interactive method for multi-objective linear programming under uncertainty", **European Journal of Operational Research** 26, 65-82.

Teghem J. Jr., Kunsch P. (1985) : "Multi-objective decision making under uncertainty : an example for power system", in Y. Haimès, V. Chankong (eds.), **Decision Making with Multiple Objectives**, Springer-Verlag, Berlin, 443-456.

Ting H.M. (1971) : "Aggregation of attributes for multiattributed utility assessment", MIT, Operations Research Center, **Technical Report** 66.

Tsoukias A., Vincke Ph. (1992) : "A survey on nonconventional preference modelling", **Ricerca Operativa** 61, 5-49.

Tversky A. (1967) : "A general theory of polynomial conjoint measurement", **Journal of Mathematical Psychology** 4, 1-20.

Tversky A. (1972) : "Elimination by aspects - A theory of choice", **Psychological Review** 79/4, 281-299.

Tversky A. (1977) : "On the elicitation of preferences : Descriptive and prescriptive considerations", in D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa (eds.), **Conflicting Objectives in Decisions**, Wiley, New-York, 209-219.

Valbon-Sutour M.C. (1993) : **Approche multicritère de la gestion des stocks et des approvisionnements**, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Dauphine.

Vanderpooten D. (1987) : "L'approche interactive dans l'aide multicritère à la décision", Université de Paris-Dauphine, **Document du LAMSADE 38**, 57 p.

Vanderpooten D. (1989a) : "The interactive approach in MCDA : a technical framework and some basic conceptions", **Mathematical and Computer Modelling 12**, 1213-1220.

Vanderpooten D. (1989b) : "The use of preference information in multiple criteria interactive procedures", in A.G. Lockett and G. Islei (eds.), **Improving Decision Making in Organisations**, Springer-Verlag, 390-399.

Vanderpooten D. (1989c) : "Une procédure multicritère interactive par apprentissage localement dirigé", Université de Paris-Dauphine, LAMSADE, **Document de Travail**.

Vanderpooten D. (1990) : **L'approche interactive dans l'aide multicritère à la décision : Aspects conceptuels, méthodologiques et informatiques**, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Dauphine.

Vanderpooten D., Vincke Ph. (1989) : "Description and analysis of some representative interactive multicriteria procedures", **Mathematical and Computer Modelling 12**, 1221-1238.

Vansnick J.C. (1984) : "Strength of preference : Theoretical and practical aspects", in J.P. Brans (ed.), **OR '84**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 449-463.

Vansnick J.C. (1986a) : "De Borda et Condorcet à l'agrégation multicritère", Université de Paris-Dauphine, **Cahier du LAMSADE 70**, 25 p.

Vansnick J.C. (1986b) : "On the problems of weights in MCDM (the noncompensatory approach)", **European Journal of Operational Research 24**, 288-294.

Vansnick J.C. (1988) : "Principes et applications des méthodes multicritères", Document de Travail, Université de Mons-Hainaut, Belgique.

- Vansnick J.C. (1990) : "Measurement theory and decision aid", in Carlos A. Bana e Costa (ed.), **Readings in Multiple Criteria Decision Aid**, Springer-Verlag, 81-100.
- Vincke Ph. (1976) : "Une méthode interactive en programmation linéaire à plusieurs fonctions économiques", **RAIRO** 10, 5-20.
- Vincke Ph. (1982) : "Aggregation of Preferences : A Review", **European Journal of Operational Research** 9, 17-22.
- Vincke Ph. (1986) : "Analysis of multicriteria decision aid in Europe", **European Journal of Operational Research** 25, 160-168.
- Vincke Ph. (1989) : **L'aide multicritère à la décision**, Editions Ellipses (France) et Editions de l'Université de Bruxelles (Belgique).
- Vincke Ph. (1992) : "Exploitation of a crisp relation in a ranking problem", **Theory and Decision** 32, 221-240.
- Vind K. (1991) : "Independent preferences", **Journal of Mathematical Economics** 20, 119-135.
- Von Neumann J., Morgenstern O. (1947) : **Theory of games and economic behavior**, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.
- Von Winterfeldt D., Edwards W. (1986) : **Decision analysis and behavioral research**, Cambridge University Press, New York.
- Wakker P. (1986) : "The repetition approach to characterize cardinal utility", **Theory and Decision** 20, 33-40.
- Wallenius H. (1991) : "Implementing interactive multiple criteria decision methods in public policy", Jyväskylä Studies in Computer Sciences, Economics and Statistics 18, University of Jyväskylä, Finland.
- Watson S.R. (1991) : "The presumptions of prescription", Management Studies, Research Paper 5/91, Cambridge University, Engineering Department.
- Watson S.R., Buede D. (1987) : **Decision synthesis : The principles and practice of decision analysis**, Cambridge University Press, Cambridge.
- Weymark J.A. (1983) : "Arrow's theorem with social quasi-orderings", **Public Choice** 42, 235-246.

White D.J. (1990) : "A bibliography on the applications of mathematical programming multi-objective methods", **Journal of the Operational Research Society** 41, 669-691.

Wierzbicki A.P. (1979) : "A methodological guide to multiobjective optimization", **Proceedings of the 9th Conference on Optimization Techniques**, Warsaw, Poland.

Wierzbicki A.P. (1980) : "The use of reference objectives in multiobjective optimization", in G. Fandel and T. Gal (eds.), **MCDM Theory and Application**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 177, Springer-Verlag, Berlin, 468-486.

Wierzbicki A.P. (1982) : "A mathematical basis for satisficing decision making", **Mathematical Modelling** 3, 391-405.

Wierzbicki A.P. (1986) : "On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems", **OR Spektrum** 8, 73-97.

Winner K. (1978) : "Nutzen-Kosten-Analysen im Verkehrswesen - Das standardisierte Bewertungsverfahren des Bundesministers für Verkehr", **Kritischer, Verkehr und Technik**, Heft 3.

Yaari M.E. (1987) : "The dual theory of choice under risk", **Econometrica** 55, 95-115.

Yannacopoulos D. (1985) : **Mise en place et expérimentation d'un système interactif d'aide à la décision multicritère : le système MINORA**, Thèse, Université de Paris-Dauphine.

Yu W. (1992) : **Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique du tri : Concepts, méthodes et applications**, Thèse de Doctorat, Université de Paris-Dauphine.

Zeleny M. (1973) : "Compromise programming", in Cochrane J.L., Zeleny M. (eds.) : **Multiple Criteria Decision Making**, University of South-Carolina Press, Columbia, South-Carolina, 262-301.

Zeleny M. (1974) : "A concept of compromise programming solution and the method of the displaced ideal", **Computers and Operations Research** 1, 479-496.

Zeleny M. (1982) : **Multiple criteria decision making**, McGraw-Hill.

Zionts S. (1977) : "Integer linear programming with multiple objectives", **Annals of Discrete Mathematics** 1, 551-562.

Zionts S. (1981) : "A multiple criteria method for choosing among discrete alternatives", **European Journal of Operational Research** 7, 143-147.

Zionts S., Wallenius J. (1976) : "An interactive programming method for solving the multiple criteria problem", **Management Science** 22, 652-663.

Zionts S., Wallenius J. (1983) : "An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions", **Management Science** 29, 519-529.

INDEX TERMINOLOGIQUE¹

- Acteur, 1 (glossaire), 1.1
Action, 1 (glossaire), 1.2
– efficace, 7.2.3
– fictive, 1.2
– fragmentaire, 1 (glossaire)
– globale, 1 (glossaire)
– idéale, 1.2
– irréaliste, 1.2
– potentielle, 1 (glossaire), 1.2, 9.3.1
– réaliste, 1.2
– réelle, 1.2
– de référence, 5.4.2 c), 6.1.3
– S-efficace, 6.1.2 b)
Agis, 1.1
Agrégation
– additive, 4.2.1, 4.4.2, 4.5.2.2
– additive et multiplicative (cas de la théorie de l'utilité espérée), 4.5.2.2
– additive simple, 4.5.2
– multiplicative, 4.4.2, 4.5.2.2
– des performances, 3.2.4
– agrégation des préférences en théorie du choix social, 3.2.4
Aide à la décision, 1, 1.1, 6.2.1 c)
Alternative, 1.2
Analyse
– axiomatique, 4.2.1.2
– de la discordance, 3.1.3
– monocritère, 1.6.1
– multicritère, 1.6.1
– de robustesse, 4.6, 5.4.4, 6.2.1 c), 8.4.4, 10.3.2
– de sensibilité, 5.4.4
Approche
– classique, 7.1.1
– interactive, 7.1.1
– opérationnelle, 1 (glossaire)
Axe de signification, 1.6.1, 9.2.2, 9.3.1
– mesurable, 1 (glossaire)
Axiomes
– de cohésion, 2.2.2, 2.2.2 b)
– d'exhaustivité, 2.2.1, 2.2.1 b), 2.2.1 c), 2.2.2 c), 2.2.3 c)
– fondamentaux de cohérence, 2.2
– de non redondance, 2.2.3
Bilan par compensation, 3.1.5
Catégorie
– fermée en bas, 6.1.3 a)
– fermée en haut, 6.1.3 a)
Coalition concordante, 3, 3.1.2
Codage d'une échelle, 1 (glossaire)
Cohérence, 2.3
Conclusion robuste, 5.4.4
Condition
– de compatibilité des données, 6.3 b)
– de concordance, 5.2.1 a1), 5.2.1 b1), 5.2.2 a1), 5.3.2 a1)
– de non veto, 5.2.1 a1), 5.2.1 b1), 5.2.2 a1), 5.3.2 a1)
Conflit
– dissymétrique, 3.1.1
– faible, 3.1.1
– fort, 3.1.1
Conséquence, 1 (glossaire), 1.5, 2.1
– élémentaire, 1 (glossaire)
Convergence psychologique, 7.1.2 b)
Critère, 1 (glossaire), 1.6.1
– concordant, 3.1.2
– en conflit dans la comparaison de deux actions, 3.1.1
– contractable, 4.2.1.4
– discordant, 3.1.3

¹ Cet index renvoie aux numéros de sections concernées.

- fondamental, 2.3.3
- gaussien, 5.3.1 a1)
- graduable, 1 (glossaire)
- inductif, 2.3.2
- isolable, 2.4.1
- mesurable, 1 (glossaire)
- mutuellement indépendant au sens des préférences, 4.2.1.1
- de niveau, 5.3.2 a1)
- redondant, 2.2.3 a)
- unique de synthèse, 1.7
- Décideur, 1.1
- Décision, 1.1
- Décomposition multilinéaire, 4.5.2.3
- Degré de crédibilité, 5.3.2.
- Demandeur, 1.1
- Dépassement de la dominance, 3.1.4
- Dépendance entre critères, 2.3
- Description segmentée, 5.4.2 d)
- Dimension, 1 (glossaire), 1.5, 9.2.3
- Distillation, 6.4.3 a)
- ascendante, 6.4.3 a)
- descendante, 6.4.3 a)
- Dominance canonique, 5.3.1 b1)
- Donnée inter-critère, 3.1.6, 5.3.1 b2)
- Ecart
- de performances, 5.1.2
- de préférences, 5.1.2
- Echelle
- (d'un critère), 1.6.2
- de préférence, 1 (glossaire), 1.5
- Echelon, 1 (glossaire)
- Eclatement, 1.6.2
- Ecrémage, 5.2.2 b)
- Effet
- Condorcet, 5.2.1 a2)
- de cumul, 2.2.2 d)
- de veto, 3.1.3
- Efficace (action), 7.2.1
- Ensemble d'actions
- évolutif, 1 (glossaire)
- imposé, 1 (glossaire)
- permanent, 1 (glossaire)
- révisable, 1 (glossaire)
- stable, 1 (glossaire)
- surclassant, 6.1.2 c)
- transitoire, 1 (glossaire)
- Etape
- de dialogue, 7.1.1
- de calcul, 7.1.1
- Etat d'avancement d'un processus de décision, 1 (glossaire), 1.1
- Exemples
- choix d'un nouvel emploi, 2.4.2
- comparaison de tracés de lignes à haute tension, 2.4.1
- tracé d'une liaison à grande vitesse, 2.2.3 c)
- Famille de critères, 2.1
- cohérente, 2.2.3 d), 8.3
- faiblement séparable, 2.3.2
- fondamentale, 2.3.3
- inductive, 2.3.1
- séparable, 2.3.2
- Fermure transitive, 6.1.4
- Flux
- entrant, 6.4.1 a)
- net, 6.4.1 a)
- sortant, 6.4.1 a)
- Fonction d'agrégation temporaire, 7.2.3
- Fonctions d'utilité, 9.2.5
- partielles, 4.5.3.2, 9.2.6
- Graduation, 1 (glossaire), 1.6.4, 4.4
- Homme d'étude, 1.1
- Importance
- absolue, 3.1.3
- relative, 3.1.3, 3.2.3
- relative des critères, 3.2.3
- Indépendance, 2.4
- vis-à-vis des actions non pertinentes, 3.2.1
- mutuelle au sens des préférences, 4.2.1.2 b)
- d'ordre structurel, 2.4.3
- au sens des différences de préférence, 4.4.2
- au sens des dispersions, 2.4.1

- au sens des préférences, 2.4.2, 4.2.1.2, 4.2.1.4, 4.5.2.1
- au sens des utilités, 2.4.1, 4.5.2.1

Indicateur

- de dispersion, 1.5
- de dispersion modulée, 1 (glossaire)
- d'état, 1 (glossaire), 1.5
- de modulation, 1 (glossaire)
- de robustesse, 6.2.2

Indice

- de concordance, 5.3.2 b1)
- de crédibilité, 5.3.2
- de discordance, 5.3.2 b1)

Information inter-critère, 3.1.6, 9.3.3

Interaction, 7.1.1

Interrogateur, 7.1.1

Interrogé, 7.1.1

Intervalle de dispersion, 1.6.3

Intervenant, 1.1

Isolabilité d'un critère 2.4.1

Jugement local interactif avec itérations essais-erreurs, 1.7

 λ -coupe, 5.3.2 λ -faiblesse, 6.4.3 a) λ -préférence, 6.4.3 a) λ -puissance, 6.4.3 a) λ -qualification, 6.4.3 a)

Loteries, 4.5.2.1

Mesure, 1 (glossaire), 4.4

Méthode

- d'analyse hiérarchique, 4.2.1.3 b)
- des déclassements comparés, 4.2
- ELECTRE I, 6.2.1
- ELECTRE IS, 6.2.1
- ELECTRE TRI optimiste, 6.3 b)
- ELECTRE TRI pessimiste, 6.3 a)
- ELECTRE II, 6.4.2
- ELECTRE III, 6.4.3
- ELECTRE IV, 6.4.4
- GDF, 7.3.1.2
- de Korhonen et Laakso, 7.3.2 e)
- du point de mire évolutif, 7.3.1.3

- du point de référence, 7.3.2 c)

- PREFCALC, 7.4

- PRIAM, 7.3.2 f)

- PROMETHEE I et II, 6.4.1

- STEM, 7.3.1.1

- de Steuer et Choo, 7.3.2 d)

- de Vanderpooten, 7.3.1.4

- de Vincke, 7.3.2 b)

- de Zionts et Wallenius, 7.3.2 a)

Modèle, 1 (glossaire)

- d'évaluation d'une action, 1 (glossaire)

Modélisation

- des conséquences, 1.5

- des préférences, 1.4

Monotonicité, 2.2.2 b)

Mutation, 1.4.3

Niveau

- d'aspiration, 5.2.2 b)

- exigé de concordance, 5.2.1 a1)

- d'exigence minimale, 7.2.3

- de référence, 7.2.3

Non monotonicité, 6.4.3 c)

Noyau, 6.1.2 c)

Nuage des conséquences, 1 (glossaire)

Optimisation, 1.7

Ordre

- complet, 1.4.2 a)

- d'intervalle, 1.4.2 b)

- partiel, 1.4.2 c)

Palier de séparation, 6.4.3 a)

PAMC

- concordance de type Rochat, 3.2.2 b)

- élémentaire de type concordance, 3.2.2 b)

- élémentaire de type concordance discordance, 3.2.2 c)

- élémentaires, 3.2.2

- lexicographique, 3.2.2 a)

- de type I, 5.1

- de type II, 5.1

- de type somme pondérée, 3.2.2 d)

Paramètres

- économiques, 5.4.4
- techniques, 5.4.4

Phase

- d'explication, 7.1.1
- d'interrogation, 7.1.1

Point

- anti-idéal, 7.2.1
- idéal, 7.2.1
- nadir, 7.2.1

Ponctualisation, 1.6.2

Pouvoir

- discriminant d'un critère, 1.6.3
- de veto, 3.1.3

Pré-critère, 4.3

Préordre

- complet, 1.4.2 a)
- partiel, 1.4.2 c), 6.1.2 b)

Principe

- de fiabilité, 1.5 c)
- d'intelligibilité, 1.5 a)
- d'universalité, 1.5 b)

Problématique

- du choix $P.\alpha$, 1 (glossaire), 6.1.2, 6.2
- de la description $P.\delta$, 1 (glossaire)
- de l'optimisation, 6.1.2
- du rangement $P.\gamma$, 1 (glossaire), 6.4.1
- de référence, 1.3
- du tri $P.\beta$, 1 (glossaire), 6.1.3, 6.3

Problème

- de l'agrégation des performances, 1 (glossaire), 1.7
- paramétrique, 4.6
- de qualité, 4.6
- structurel, 4.6

Procédure

- d'affectation, 6.1.1, 6.1.3, 6.5 b)
- d'agrégation additive et multiplicative (cas d'une mesure), 4.4.2

- d'agrégation multicritère PAMC, 3.2.1

- de classement, 6.1.1, 6.1.4

- par compensation probante, 5.3.2 c)

- conjonctive, 6.1.3 b)

- disjonctive, 6.1.3 b)

- d'exploitation, 6.1.1

- de rangement, 6.1.4, 6.5 c)

- de sélection, 6.1.1, 6.1.2, 6.5 a)

Processus de décision, 1.1

Profil de référence, 6.1.3

Propriétés de l'ensemble des actions potentielles, 1 (glossaire)

Protocole d'interaction, 7.1.1

Pseudo-critère, 1 (glossaire), 1.6.3

Pseudo-ordre, 1.4.2 b)

Quasi-critère, 1.6.3, 4.3

- de synthèse, 4.3.1

Quasi-dominance, 5.3.1 b1)

Quasi-ordre, 1.4.2 b)

Relation

- d'équivalence, 1.4.2 a)

- de préférence floue, 1.4.2 e)

- de surclassement floue, 5.3.2

- de synthèse, 5.1

Résultante des conflits, 3.1.1

Résultat

- sur la contagion des préférences, 2.3.2

- sur la contagion de surclassement, 2.2.2 b)

- sur l'égalité des performances, 2.2.1 b)

Robustesse, 6.2.2

Séparabilité de chaque sous-famille de critères, 2.4.2

Séquence de systèmes de préférences emboîtés, 5.3.1

Seuil

- de discrimination de l'indice de crédibilité, 6.4.3 a)

- d'indifférence, 1.6.3

- de préférence, 1.6.3

- de veto, 3.1.3

Situations fondamentales incompatibles

- d'incomparabilité, 1.4.1
- d'indifférence, 1.4.1
- de préférence faible, 1.4.1
- de préférence stricte, 1.4.1

Solution, 1.2

Sous-famille de critères

- contractable, 2.4.2
- faiblement séparable, 2.3.2
- séparable, 2.3.2

Spectre des conséquences, 1 (glossaire)

Structures de préférences, 1.4.2

Surclassement, 1.4.1

- Δ -surclassement, 3.1.4
- faible, 5.3.1 a1)
- fort, 5.3.1 a1)
- PQ-surclassement, 3.1.4

- de synthèse, 1.7

Système

- de préférences emboîtées, 5.3.1
- de référence, 5.4.4
- relationnel de préférences, 1.4.1

Tableau

- des gains, 7.2.1
- de performances, 1 (glossaire), 1.7, 8.3.3, 9.2.7, 10.1.3

Taux marginal de substitution, 3.1.5

Test de cohérence, 2.2, 2.2.1 c), 2.2.2 c), 2.2.3 c), 8.3.2

Théorème d'Arrow, 3.2.4

Théorie

- du choix social, 3.2.4
 - de l'utilité espérée, 4.5
- Vrai-critère, 1.6.3, 2.4.2, 4.2
- de synthèse, 4.2.2